Г. А. АМБАРЦУМЯН

О ВЕРОЯТНОСТЯХ ПОКАЗАНИЙ НЕНАДЕЖНОГО СЧЕТЧИКА ИМПУЛЬСОВ

1. Рассмотрим простой счетчик импульсов, состоящий из последовательно соединенных триггеров. Пусть на этот счетчик справа подаются импульсы (рис. 1). Допустим, что в начале работы счетчика показания на всех триггерах равны нулю.

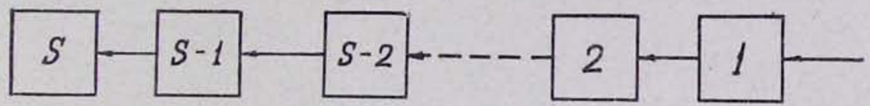

Рис. 1.

При безотказной работе триггеров импульс, поданный на первый триггер, сменит на нем нуль на единицу, при подаче на первый триггер второго импульса показание на нем сменится на нуль и он передаст один импульс на второй триггер и т. д. Таким образом, при подаче на счетчик n импульсов, он покажет число n, написанное в двоичной системе счисления по mod 2^s.

Рассмотрим ненадежный счетчик, состоящий из триггеров со сбоями*. Так при подаче импульса на любой триггер он только с некоторой вероятностью p_1 сменит нуль на единицу, или наоборот; точно так же импульс с одного триггера на соседний передается только с некоторой вероятностью p_2. Предположим, что для всех триггеров вероятности p_1 и p_2 постоянны. В настоящей работе решается следующая задача: при сделанных предположениях определить вероятность

$$P^{(n)}_{i_1 i_2 \ldots\ldots i_s}$$

различных показаний $i_1\ i_2 \cdots i_s$ счетчика на S-его триггерах при подаче n импульсов.

* Определение сбоя см. в статье Г. Л. Арешяна и Г. Б. Маранджяна „О вероятностном и энтропийном критериях надежности“.

2. Определим сначала $P_{1}^{(n)}$ $(i_1=0,1)$. Очевидно,

$$P_0^{(1)}=1-P_1;\ P_1^{(1)}=P_1,$$

а при $n>1$ $P_0^{(n)}$ и $P_1^{(n)}$ удовлетворяют системе уравнений в конечных разностях

$$P_0^{(n)}=F_0^{(n-1)}\ (1-p_1)+P_1^{(n-1)}p_1;\qquad (2)$$

$$1=P_0^{(n)}+P_1^{(n)}.$$

Решение этой системы, удовлетворяющей условиям (1), будет:

$$P_0^{(n)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2p_1)^n,$$

$$P_1^{(n)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2p_1)^n.\qquad (3)$$

3. Определим теперь $P_{i_1 i_1}^{(n)}$ $(i_2,\ i_2=0,1)$.

Имеем

$$P_{00}^{(1)}=1-p_1;\ P_{c1}^{(1)}=p_1;\ P_{10}^{(1)}=0;\ P_{11}^{(1)}=0,\qquad (4)$$

а при $n>1$ $P_{i_1 i_2}^{(p)}$ удовлетворяют следующей системе в конечных разностях

$$P_{00}^{(n)}=P_{00}^{(n-1)}(1-p_1)+P_{01}^{(n-1)}\ p_1\ (1-p_1 p_2)+P_{11}^{(n-1)}\ p_1^2 p_2;$$

$$P_{01}^{(n)}=P_{00}^{(n-1)}p_1+P_{01}^{(n-1)}(1-p_1);\qquad (5)$$

$$P_{10}^{(n)}=P_{10}^{(n-1)}\ (1-p_1)+P_{01}^{(n-1)}\ p_1^2 p_2+p_1\ (1-p_1 p_2)\ P_{11}^{(n-1)};$$

$$P_{11}^{(n)}=P_{10}^{(n-1)}\ p_1+P_{11}^{(n-1)}\ (1-p_1).$$

Решение этой системы, удовлетворяющей условиям (4), будет

$$P_{00}^{(n)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(1-2p_1)^n+\frac{1}{4}(r_1^n+r_2^n);$$

$$P_{10}^{(n)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(1-2p_1)^n-\frac{1}{4}(r_1^n+r_2^n);\qquad (6)$$

$$P_{01}^{(n)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(1-2p_1)^n+\frac{r_1^n-r_2^n}{4\sqrt{1-2p_1p_2}};$$

$$P_{11}^{(n)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(1-2p_1)^n-\frac{r_1^n-r_2^n}{4\sqrt{1-2p_1p_2}},$$

где

$$r_1=(1-p_1)+p_1\sqrt{1-2p_1p_2};$$

$$r_2=(1-p_1)-p_1\sqrt{1-2p_1p_2}.\qquad (7)$$

Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty}=P_{00}^{(n)}=\lim_{n\to\infty}P_{01}^{(n)}=\lim_{n\to\infty}P_{10}^{(n)}=\lim_{n\to\infty}P_{11}^{(n)}=\frac{1}{4},$$

так как

$$|r_1| < 1;\ |r_2| < 1.$$

4. Для рассмотрения общего случая произвольного числа S триггеров приведем решение вспомогательной задачи.

Пусть на первый триггер подается n-импульсов. Если бы счетчик был надежный, то на второй триггер было бы подано ровно $\left[\frac{n}{2}\right]$ импульсов. В случае же ненадежного счетчика число m-импульсов, поданных на второй триггер, будет случайной величиной.

Если через $Q_m^{(n)}$ обозначить вероятность того, что на второй триггер подано ровно m-импульсов, то эта вероятность есть сумма

$$Q_m^{(n)} = P^{(n)}(0, m) + P^{(n)}(1, m),$$

где $P^{(n)}(0, m)$ есть вероятность совместного наступления двух событий: вскрытия на первом триггере нуля и передачи на второй триггер m импульсов; аналогично $P^{(n)}(1, m)$ есть вероятность совместного наступления двух событий: вскрытия единицы на первом триггере и передачи на второй триггер m импульсов. Несложные вычисления дают следующие выражения для этих вероятностей:

$$P^{(n)}(0, m) = C_n^{2m}(1-p_1)^{n-2m} p_1^{2m} p_2^m + C_n^{2m+2}(1-p_1)^{n-2m-2} p_1^{2m+2} \times$$
$$\times C_{m+1}^m p_2^m (1-p_2) + C_n^{2m+4}(1-p_1)^{n-2m-4} p_1^{2m+4} C_{m+2}^m p_2^m (1-p_2)^3 +$$
$$+ C_n^{2m+6}(1-p_1)^{n-2m-6} p_1^{2m+6} C_{m+3}^m p_2^m (1-p_2)^3 +$$
$$+ \cdots + \begin{cases} p_1^n C_{\frac{n}{2}}^m p_2^m (1-p_2)^{\frac{n}{2}-m}, & n \text{ четное} \\ C_n^{n-1}(1-p_1) p_1^{n-1} C_{\frac{n-1}{2}}^m p_2^m (1-p_2)^{\frac{n-1}{2}-m}, & n \text{ нечетное} \end{cases}$$

$$P^{(n)}(1, m) = C_n^{2m+1}(1-p_1)^{n-m2+1} p_1^{2m+1} p_2^m + C_n^{2m+3}(1-p)_1^{n-2m-3} p_1^{2m+3} \times$$
$$\times C_{m+1}^m p_2^m (1-p_2) + C_n^{2m+5}(1-p)_1^{n-2m-5} p_1^{2m+5} C_{m+2}^m p_2^m (1-p_2)^2 + C_n^{2m+7} \times$$
$$\times (1-p_1)^{n-2m-7} p_1^{2m+7} C_{m+3}^m p_2^m (1-p_2)^3 +$$
$$+ \cdots + \begin{cases} C_{\frac{n-1}{2}}^m p_1^n p_2^m (1-p_2)^{\frac{n-1}{2}-m}, & n \text{ нечетное} \\ C_n^{n-1}(1-p_1) p_1^{n-1} C_{\frac{n}{2}}^m p_2^m (1-p_2)^{\frac{n}{2}-m}, & n \text{ четное} \end{cases}$$

5. Введем в рассмотрение линейные преобразования

$$L_0^{(k)}(\vec{U}) = \sum_{m=0}^{n} P^{(k)}(0, m)\, U_m;\quad L_1^{(k)}(\vec{U}) = \sum_{m=0}^{n} P^{(k)}(1, m)\, U_m,$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

вектора $\vec{U} = \{U_0, U_1, U_2 \cdots U_n\}$ в вектора

$$\vec{L}_0 = \{L_0^{(0)}, L_0^{(1)}, \cdots, L_0^{(n)}\},$$

$$\vec{L}_1 = \{L_1^{(0)}, L_1^{(1)}, \cdots, L_1^{(n)}\}$$

с матрицами: $P_0 = \| P^{(k)}(0, m) \|$; $P_1 = \| P^{(k)}(1, m) \|$,

где положено $P^{(k)}(0, m) = 0$; $P^{(k)}(1, m) = 0$,

$$\text{при} \quad m > \left[\frac{k}{2}\right].$$

В частности, для вектора $\vec{U} = \{1, 1, 1, \cdots, 1\} = \vec{1}$, имеем

$$L_0^{(k)}(\vec{1}) = \sum_{m=0}^{n} P^{(k)}(0, m) = P_0^{(k)}; \quad L_1^{(k)}(\vec{1}) = \sum_{m=0}^{n} P^{(k)}(1, m) = P_1^{(k)}.$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots, n).$$

Пользуясь формулой полной вероятности имеем

$$P_{00}^{(k)} = \sum_{m=0}^{n} P^{(k)}(0, m) \; P_0^{(m)} = L_0^{(k)}(P_0) = L_0^{(k)}\left(\overrightarrow{L_0(\vec{1})}\right);$$

$$P_{01}^{(k)} = \sum_{m=0}^{n} P^{(k)}(1, m) \; P_0^{(m)} = L_1^{(k)}(P_0) = L_1^{(k)}\left(\overrightarrow{L_0(\vec{1})}\right);$$

$$P_{10}^{(k)} = \sum_{m=0}^{n} P^{(k)}(0, m) \; P_1^{(m)} = L_0^{(k)}(P_1) = L_0^{(k)}\left(\overrightarrow{L_1(\vec{1})}\right);$$

$$P_{11}^{(k)} = \sum_{m=0}^{n} P^{(k)}(1, m) P_1^{(m)} = L_1^{(k)}(P_1) = L_1^{(k)}\left(\overrightarrow{L_1(\vec{1})}\right);$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots n).$$

В общем же случае искомые вероятности представятся так:

$$P_{i_1 i_2 \ldots i_s}^{(k)} = L_{i_s}\left\{\overrightarrow{L_{i_{s-1}} \cdots \overrightarrow{\left[L_{i_2}\left(\overrightarrow{L_{i_1}(\vec{1})}\right)\right]}}\right\}$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots, n).$$

Вычисление искомых вероятностей можно произвести, принимая во внимание следующие очевидные соотношения. Если

$$\vec{U}_r = \{1, r, r^2 \cdots r^n\},$$

то

$$L_0^{(k)}(\vec{U}_r) = \frac{r_1^k + r_2^k}{2}; \quad L_1^{(k)}(\vec{U}_r) = \frac{r_1^k - r_2^k}{2\sqrt{1 - p_2 + p_2 r}},$$

где

$$r_1 = 1 - p_1 + p_1\sqrt{1 - p_2 + p_2 r},$$

$$r_2 = 1 - p_1 - p_1\sqrt{1 - p_2 + p_2 r}.$$

Так, например:

$$P_{011}^{(k)} = L_1^k \left[\overrightarrow{L_1\,(\overrightarrow{L_0(\vec{1})})} \right] = L_1^{(k)}\,\overrightarrow{(P_{01})},$$

где вектор $\vec{P}_{01}$ есть вектор, компоненты которого $P_{01}^{(k)}$.

Согласно (6) $\vec{P}_{01} = \frac{1}{4}\vec{1} - \frac{1}{4}\vec{U}_{(1-2p_1)} + \frac{\vec{U}_{r_1} - \vec{U}_{r_2}}{4\sqrt{1-2p_1p_2}}$, поэтому

$$P_{011}^{(k)} = L_1^{(k)}\left[\frac{1}{4}\vec{1} - \frac{1}{4}\vec{U}_{(1-2p_1)} + \frac{\vec{U}_{r_1} - \vec{U}_{r_2}}{4\sqrt{1-2p_1p_2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}L_1^{(k)}(\vec{1}) - \frac{1}{4}L_1^{(k)}\vec{U}_{(1-2p_1)} + \frac{1}{4\sqrt{(1-2p_1p_2)}}L_1^{(k)}(\vec{U}_{r_1} - \vec{U}_{r_2}) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-2p_1)^k\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{r_1^k - r_2^k}{2\sqrt{1-2p_1p_2}}\right] +$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{1-2p_1p_2}}\,\frac{r_{11}^k - r_{12}^k}{2\sqrt{1-p_2+p_2r_1}} - \frac{1}{4\sqrt{1-2p_1p_2}}\,\frac{r_{21}^k - r_{22}^k}{\sqrt{1-p_2+p_2r_2}},$$

или

$$P_{011}^{(k)} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}(1-2p_1)^k - \frac{r_1^k - r_2^k}{8\sqrt{1-2p_1p_2}} +$$

$$+ \frac{r_{11}^k - r_{12}^k}{8\sqrt{1-2p_1p_2}\,\sqrt{1-p_2+p_2r_1}} - \frac{r_{21}^k -}{8\sqrt{1-2p_1p_2}\,\sqrt{1+p_2r_2-p_2}};$$

$$r_{11} = 1 - p_1 + p_1\sqrt{1-p_2+p_2r_1};$$

$$r_{12} = 1 - p_1 - p_1\sqrt{1-p_2+p_2r_1};$$

$$r_{21} = 1 - p_1 + p_1\sqrt{1-p_1+p_2r_2};$$

$$r_{22} = 1 - p_1 - p_1\sqrt{1-p_2+p_2r_2}.$$

6. Введя в рассмотрение матрицу-строку

$$A'_{i_1i_2\ldots i_s} = (P^{(1)}_{i_1i_2\ldots i_s}, P^{(1)}_{i_1i_2\ldots i_s}\cdots P^{(n)}_{i_1i_2\ldots i_s}),$$

искомую матрицу можно записать как произведение найденных выше матриц P_0 и P_1, т. е.

$$A_{i_1i_2\ldots i_s} = P_{i_s}P_{i_{s-1}}\cdots P_{i_2}A_{i_1},$$

где

$$A_{i_1} = (P^{(1)}_{i_1}, P^{(2)}_{i_1}\cdots P^{(n)}_{i_1})$$

есть матрица элементов (3).

Задача, решенная в настоящей работе, была предложена доцентом ЕрПИ Г. Л. Арешяном.

Поступило 16.I.1964

Գ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

ԻՄՊՈՒԼՍՆԵՐԻ ԱՆՀՈՒՍԱԼԻ ՀԱՇՎԻՉԻ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Իմպուլսների պարզ հաշվիչը ներկայացնում է հաջորդաբար միացած տրիգերների բազմություն։ Հաշվիչի հուսալի աշխատանքի դեպքում, նա ցույց է տալիս հաշվիչին տված իմպուլսների թիվը։ Հաշվիչի անհուսալի աշխատանքի դեպքում նրա ցուցումները կլինեն պատահական։ Տվյալ աշխատանքում հաշվված են հաշվիչի հնարավոր ցուցումների հավանականությունները որոշակի անհուսալիության դեպքում։ Հաշվումները կատարված են մեկ, երկու տրիգերներ պարունակող հաշվիչների համար և դուրս են բերված հավանականությունների համար համապատասխան բանաձև ընդհանուր դեպքում, երբ տրիգերների թիվը ցանկացած է։