Л. В. КАЗАРЯН

О ФОРМУЛЕ ДЖ. РОУЗА В СТРУКТУРАХ С ОТНОСИТЕЛЬНЫМИ ПСЕВДОДОПОЛНЕНИЯМИ

Следуя Биркгофу [1], мы будем рассматривать модель конструктивной логики в виде структур с относительными псевдодополнениями, т. е. таких структур, в которых для любых двух элементов A и B в множестве элементов x таких, что $A \cap x \leqslant B$, имеется наибольший элемент (называемый псевдодополнением элемента A относительно элемента B и обозначаемый через A^*B) (см. [1], стр. 209).

Мы будем изучать соответствие между этой моделью и реальной конструктивной логикой, ограничиваясь при этом рассмотрением формул исчисления высказываний. Будем трактовать* коньюнкцию $A\&B$ как умножение элементов структуры $A \cap B$, дизъюнкцию $A \cup B$ — как сумму элементов структуры A и B, импликацию $A \supset B$ — как псевдодополнение A^*B и отрицание $\neg A$ — как псевдодополнение элемента A.

При этом псевдодополнением элемента A называется элемент A^*0 ([1], стр. 209).

Под тождественно истинной формулой исчисления высказываний (в конструктивной логике) понимается такая формула, что любая подстановка в нее формул логико-математического языка или формальной арифметики вместо пропозициональных переменных обращает ее в конструктивно истинную формулу ([2], стр. 454, сноска 2).

* Биркгоф вводит свое определение следующим образом: „Брауэрова логика есть структура, дуальная структуре с относительными псевдодополнениями". При этом логическая дизъюнкция понимается Биркгофом как произведение элементов структуры, конъюнкция — как сумма элементов структуры, истинное высказывание — как 0, ложное высказывание — как 1. При нашей трактовке логических связей определение Биркгофа должно быть изменено следующим образом: „Брауэрова логика есть структура с относительными псевдодополнениями". Ясно, что по существу такое определение эквивалентно определению Биркгофа. Следует отметить, что под „брауэровой логикой", или „интуиционистской логикой" в математической литературе подразумевается конструктивная логика.

Аналогичное определение можно ввести и при алгебраическом рассмотрении вопроса.

Пусть задана некоторая структура с 0 и 1 и с относительными псевдодополнениями. Формулу исчисления высказываний $P(A, B, \ldots, F)$ назовем структурно истинной формулой относительно данной структуры, если, каковы бы ни были элементы этой структуры $A_0, B_0, \ldots, F_0$, всегда соответствующий элемент $P(A_0, B_0, \ldots, F_0)$ есть 1.

Известно ([1], стр. 273), что все формулы, выводимые в конструктивном исчислении высказываний, являются структурно истинными формулами относительно любой структуры с относительными псевдодополнениями.

Мы покажем, что конструктивно истинная формула может, вообще говоря, не быть структурно истинной относительно некоторых структур с относительными псевдодополнениями, а именно, покажем, что можно привести пример такой структуры с относительными псевдодополнениями, что формула Дж. Роуза $((\neg\neg D \supset D) \supset (\neg\neg D \vee \neg D)) \supset \supset (\neg\neg D \vee \neg D)$, где $D = \neg A \vee \neg B$, структурно не истинна относительно этой структуры. Таким образом, оказывается, что модель конструктивной логики в виде произвольной структуры с относительными псевдодополнениями в некоторых отношениях не соответствует реальной конструктивной логике, и, следовательно, утверждение Биркгофа о том, что „брауэрова логика есть структура с относительными псевдодополнениями“, заведомо нуждается в уточнении.

Определим структуру L_1 как множество всевозможных открытых множеств, содержащихся в интервале (0, 1), причем

1. $A \cup B$ — означает теоретико-множественную сумму A и B.
2. $A \cap B$ — пересечение множеств A и B.
3. „0“ — есть пустое множество, „1“ — есть интервал (0, 1).
4. Включение $A \leqslant B$ означает теоретико-множественное включение множества A в множество B.

При таком определении структуры конъюнкция $A \& B$ будет соответствовать пересечению множеств A и B, дизъюнкция $A \vee B$ — сумме множеств A и B, импликация $A \supset B$ — дополнению замыкания разности $A \setminus B$ до интервала (0, 1) и отрицание $\neg A$ — дополнению замыкания A до (0, 1).

Очевидно, что L_1 есть структура с 0 и 1 и с относительными псевдодополнениями (см. [1], стр. 24). Следовательно, все формулы, выводимые в конструктивном исчислении высказываний, будут структурно истинными формулами относительно L_1.

Заметим, что некоторые классически истинные формулы, не являющиеся конструктивно истинными, не будут структурно истинными также и относительно структуры L_1. Например, формулы $A \vee \neg A$, $\neg\neg A \supset A$, $(A \supset (B \vee C)) \supset (A \supset B) \vee (A \supset C))$ не являются истинными относительно структуры L_1. В самом деле:

1. Если $A=\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, то $\neg A=\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$, и $A \vee \neg A=\left(0,\ \frac{1}{2}\right) \cup$ $\cup\left(\frac{1}{2},\ 1\right) \neq (0,\ 1)$.

2. Если $A=\left(0,\ \frac{1}{4}\right) \cup\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right)$, то $\neg A=\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$, $\neg\neg A=$ $=\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, $\neg\neg A \supset A=\left(0,\ \frac{1}{4}\right) \cup\left(\frac{1}{4},\ 1\right) \neq (0,\ 1)$.

3. Если $A=\left(0,\ \frac{1}{2}\right) \cup\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$, $B=\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, $C=\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$, то

$$B \vee C=\left(0,\ \frac{1}{2}\right) \cup\left(\frac{1}{2},\ 1\right),$$

$$A \supset (B \vee C)=(0,\ 1), \quad A \supset B=\left(0,\ \frac{1}{2}\right), \quad A \supset C=\left(\frac{1}{2},\ 1\right),$$

$$(A \supset B) \vee (A \supset C)=\left(0,\ \frac{1}{2}\right) \cup\left(\frac{1}{2},\ 1\right),$$

$$(A \supset (B \vee C)) \supset ((A \supset B) \vee (A \supset C))=\left(0,\ \frac{1}{2}\right) \cup\left(\frac{1}{2},\ 1\right) \neq (0,\ 1).$$

Таким образом, в структуре L_1 моделируются некоторые черты конструктивной логики. Вместе с тем, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Формула Дж. Роуза* $((\neg\neg D \supset D) \supset (\neg\neg D \vee \neg D)) \supset$ $\supset (\neg\neg D \vee \neg D)$, *где* $D=\neg A \vee \neg B$, ***не является структурно истинной относительно структуры*** L_1.

Доказательство. Зафиксируем произвольный интервал $(\alpha,\ \beta)$, где $0<\alpha<\beta<1$, и рассмотрим линейное отображение $y=(\beta-\alpha)\,x+\alpha$ интервала $(0,\ 1)$ на интервал $(\alpha,\ \beta)$. Через G обозначим образ канторова открытого множества G_0 при указанном отображении; через $(\alpha_i,\ \beta_i)$ $(i=1,\ 2,\cdots)$ обозначим составляющие интервалы множества G. Затем в качестве A возьмем $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\left(\alpha_i,\ \frac{\alpha_i+\beta_i}{2}\right) \cup (0,\ \alpha) \cup (\beta,\ 1)$, а в качестве $B=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_i+\beta_i}{2},\ \beta_i\right) \cup (0,\ \alpha) \cup (\beta,\ 1)$. Тогда

$$\neg A=B \setminus \{(0,\ \alpha) \cup (\beta,\ 1)\}, \quad \neg B=A \setminus \{(0,\ \alpha) \cup (\beta,\ 1)\}$$

$$D=(A \cup B) \setminus \{(0,\ \alpha) \cup (\beta,\ 1)\}.$$

$$\neg D=(0,\ \alpha) \cup (\beta,\ 1), \quad \neg\neg D=(\alpha,\ \beta)$$

$$\neg\neg D \supset D=(A \cup B) \setminus \{(0,\ \alpha) \cup (\beta,\ 1)\}$$

$$\neg\neg D \vee \neg D=(0,\ \alpha) \cup (\alpha,\ \beta) \cup (\beta,\ 1)$$

$$(\neg\neg D \supset D) \supset (\neg\neg D \vee \neg D)=(0,\ 1)$$

и, наконец,

$((\neg\neg D \supset D) \supset (\neg\neg D \vee \neg D)) \supset (\neg\neg D \vee \neg D) = (0, \alpha) \cup (\alpha, \beta) \cup (\beta, 1) \neq (0, 1)$,

что и доказывает теорему.

Теорема 1, в частности, позволяет заново доказать тот факт, что формула Дж. Роуза не выводима в конструктивном исчислении высказываний.

Определим теперь структуру L_2 как подструктуру L_1, состоящую из таких открытых множеств в интервале (0, 1), которые являются суммами конечного числа интервалов. В таком случае L_2 будет структурой с относительными псевдодополнениями, причем, как легко убедиться, все утверждения, сделанные нами в отношении структуры L_1 с точки зрения моделирования ею различных черт конструктивной логики, остаются справедливыми и для L_2. Вместе с тем, формула Дж. Роуза структурно истинна относительно структуры L_2. Это вытекает из следующего утверждения.

Теорема 2. *Для любого D формула $((\neg\neg D \supset D) \supset (\neg\neg D \vee \neg D)) \supset (\neg\neg D \vee \neg D)$ структурно истинна относительно структуры L_2.*

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. Если

$$A = (0, 1) \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$
$$B = (0, 1) \setminus \{b_1, b_2, \ldots, b_m\},$$

где a_i и b_j — точки из (0, 1) и $a_i \neq b_j$

$$(i = 1, 2, \ldots, n), \ (j = 1, 2, \ldots, m),$$

то $((A \supset B) \supset B) = (0, 1)$.

Доказательство. Пусть $x \in (A \supset B)$, т. е. $x \in C[A \setminus B]$, тогда $x \overline{\in} [A \setminus B]$, $x \overline{\in} A \setminus B$. Возможны два случая.

1. $x \in A$, тогда $x \in B$.

2. $x \overline{\in} A$, тогда $x = a_i$, а $a_i \in B$.

В обоих случаях $x \in B$, т. е. $A \subseteq B$, следовательно, $A \setminus B = \Lambda$, $C[A \setminus B] = (0, 1)$, что и требовалось доказать.

Теперь переходим к доказательству нашей теоремы. Пусть D — произвольное множество, состоящее из конечного числа интервалов. Разобьем составляющие интервалы множества D (их будет конечное число) на группы, относя интервалы I_1 и I_2 к одной и той же группе в том случае, если они имеют общие граничные точки, или если существует цепь $G_1, G_2, \ldots, G_n$ составляющих интервалов множества D, такая, что $G_1 = I_1$, $G_k = I_2$, и каждый интервал G_i имеет общую граничную точку с интервалом G_{i+1}. В таком случае D представится в виде $D = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{k_i} (\alpha_{i, j-1}, \alpha_{ij})$, где $(\alpha_{i, j-1}, \alpha_{ij})$ — составляющие интервалы i-группы $(1 \leqslant j \leqslant k_i)$.

Имеем:

$\alpha_{ij} < \alpha_{lm}$, если $i < l$, или если $i = l$, а $j < m$. Для единообразия обозначений введем дополнительные индексы 0 и $n+1$, причем будем считать, что $\alpha_{ok_0} = 0$ и $\alpha_{n+1, 1} = 1$.

Тогда*

$$\neg D = \bigcup_{l=0}^{n} (\alpha_{ik_l}, \alpha_{l+1,1});$$

$$\neg\neg D = \bigcup_{l=1}^{n} (\alpha_{l0}, \alpha_{ik_l});$$

$$\neg\neg D \supset D = (0, 1) \setminus \{\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1, k_1-1}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2, k_2-1}, \ldots, \alpha_{n, k_n-1}\};$$

$$\neg\neg D \vee \neg D = (0, 1) \setminus \{\alpha_{10}, \alpha_{1k_1}, \alpha_{20}, \alpha_{2k_2}, \ldots, \alpha_{n0}, \alpha_{nk_n}\}.$$

Ясно, что множества $(\neg\neg D \supset D)$ и $(\neg\neg D \vee \neg D)$ удовлетворяют условиям леммы, поэтому $((\neg\neg D \supset D) \supset (\neg\neg D \vee \neg D)) \supset (\neg\neg D \vee \neg D) = (0, 1)$. Таким образом, рассматриваемая формула истинна относительно структуры L_2, что и требовалось доказать.

Заметим, что структуру L_2, так же как и L_1, нельзя считать моделью конструктивной логики. Это следует из того, что формула $((\neg\neg D \supset D) \supset (\neg\neg D \vee \neg D)) \supset (\neg\neg D \vee \neg D)$, согласно результатам В. Янкова [3], не является конструктивно истинной.

Таким образом, различные структуры с относительными псевдодополнениями (являющиеся „брауэровыми логиками" в смысле определения Биркгофа) могут на самом деле определять существенно различные классы истинных формул исчисления высказываний.

Вопрос о том, для каких структур указанного типа класс структурно истинных формул совпадает с классом конструктивно истинных формул (и существуют ли вообще такие структуры), остается пока открытым.**

Լ. Վ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Զ. ՌՈՈՒԶԻ ԹԱՆԱՁԵՎԻ ՄԱՍԻՆ ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ՊՍԵՎԴՈԼՐԱՑՈՒՄՆԵՐՈՎ ՍՏՐՈՒԿՏՈՒՐԱՆԵՐՈՒՄ

Ամփոփում

Հետազոտվում է ստրուկտուրալ և կոնստրուկտիվ տրամաբանությունների փոխհարաբերությունը: Ապացուցվում է, որ տարբեր ստրուկտուրաներ, որոնք ըստ Բիրկհոֆի սահմանման հանդիսանում են կոնստրուկտիվ տրամաբանության մոդելներ, կարող են որոշել արտահայտությունների հաշվարկման ճշմարիտ բանաձևերի էապես տարբեր դասեր: Ապացուցվում է, որ մի ստրուկտուրայի նկատմամբ ճշմարիտ բանաձևերի դասը չի համընկնում մի այլ ստրուկտուրայի նկատմամբ ճշմարիտ բանաձևերի դասի հետ և այդ դասե-

---

* Под записью $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ik_{i-1}}$ в случае $k_i = 1$ будем понимать пустое множество точек.

** Примечание при корректуре. Как стало известно автору, теорема 1 может быть легко получена из результатов работы A. Tarski, Der Aussagenkalkül und die Topologie, Fund. Math. 31, 103—134 (1938).

րից ոչ մեկը չի համընկնում արտահայտությունների հաշվարկման կոնստրուկտիվ ճշմարիտ բանաձևերի դասի հետ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Биркгоф Г.* Теория структур, М., ИИЛ, 1952.
2. *Клини С. К.* Введение в метаматематику, М., ИИЛ, 1952.
3. *Янков В. А.* О реализуемости некоторых формул типа Джина Роуза. Доклад на IV Всесоюзном математическом съезде, Л., 1961.