АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 15

АВГУСТ, 1979

ВЫПУСК 3

УДК 523.035.2

РАСЧЕТ СПЕКТРА ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ. II. ПЛОСКИЙ СЛОЙ КОНЕЧНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ТОЛЩИНЫ

Д. И. НАГИРНЕР

Поступила 15 декабря 1978

Предлагается итерационный метод расчета спектра интегрального уравнения Фредгольма с ядром, зависящим от модуля разности аргументов и представимого в виде суперпозиции экспонент. Собственные функции выражены через вспомогательные функции, определяемые уравнением, которое удобно решать итерациями. На частных случаях ядер и предельных случаях соотношения между длиной промежутка интегрирования τ_0 и номером собственного числа показано, что уже нулевое приближение дает хорошую точность. Для асимптотически степенного ядра получены уравнения, описывающие асимптотическое поведение спектра при $\tau_0 \rightarrow \infty$. Произведен расчет для двух показателей степени.

1. *Преобразование Лапласа собственной функции.* В этой второй части работы мы изучим решения уравнения

$$S_n(\tau, \tau_0) = \frac{\tau_0(\tau_0)}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) S_n(\tau', \tau_0) d\tau', \quad (1)$$

где, как и в первой части [1],

$$K(\tau) = \int_0^{\delta} A(y) e^{-y\tau} dy. \quad (2)$$

Формулы из [1] мы, как правило, повторять не будем, а при ссылке будем ставить впереди номера формулы римскую цифру I.

Из симметричности ядра уравнения (1) следует, что с. ф. $S_n(\tau, \tau_0)$ либо четные, либо нечетные относительно середины промежутка $[0, \tau_0]$:

$$S_n(\tau_1 - \tau_0, \tau_0) = (-1)^n S_n(\tau_1, \tau_0). \quad (3)$$

Введем преобразование Лапласа от с. ф. $S_n(\tau, \tau_0)$ по конечному промежутку

$$\bar{S}_n(p, \tau_0) = \int_0^{\tau_0} e^{-p\tau} S_n(\tau, \tau_0) d\tau. \quad (4)$$

Из свойства четности с. ф. (3) вытекает, что

$$\bar{S}_n(-p, \tau_0) = (-1)^n e^{-p\tau_0} \bar{S}_n(p, \tau_0). \quad (5)$$

Применим преобразование Лапласа на конечном промежутке $[0, \tau_0]$ к уравнению (1) и используем формулы (2) и (5). Тогда получим линейное уравнение для $\bar{S}_n(p, \tau_0)$

$$[1 - \lambda_n U(p)] \bar{S}_n(p, \tau_0) = -s_n(-p, \tau_0) - (-1)^n e^{-p\tau_0} s_n(p, \tau_0), \quad (6)$$

где введено обозначение

$$s_n(p, \tau_0) = \frac{\lambda_n(\tau_0)}{2} \int_a^b A(y) S_n(y, \tau_0) \frac{dy}{y+p}. \quad (7)$$

Уравнение (6) при p из промежутка $[a, b]$ является сингулярным интегральным уравнением не характеристического типа и не допускает точного аналитического решения в явном виде. Оно может быть регуляризовано, то есть сведено к уравнению Фредгольма методами теории сингулярных уравнений (см., например, [2, 3]). Однако линейные интегральные уравнения, встречающиеся в теории переноса, и, в частности, уравнение (6) являются специфическим типом уравнений, их можно рассматривать на всей комплексной плоскости p . Регуляризации уравнения (6) можно достичь без обращения к теории сингулярных уравнений. При этом нам понадобятся аналитические свойства функции $H(1/p, \lambda)$, изложенные в первой части работы [1]. Этот метод решения применим и при $\lambda < 1$, и к неоднородным уравнениям, нужно лишь, чтобы свободный член был аналитической функцией p .

В следующем разделе мы выразим с. ф. $S_n(\tau, \tau_0)$ через вспомогательную функцию $s_n(p, \tau_0)$, для которой будет получено несингулярное линейное интегральное уравнение.

2. Уравнения для вспомогательной функции. Множество с. ч. $\lambda_n(\tau_0)$ уравнения (1) лежит внутри промежутка $[1/V(0), \infty)$. При $\tau_0 \rightarrow \infty$ с. ч. сгущаются и при $\tau_0 = \infty$ заполняют весь промежуток. Положим, как и для непрерывного спектра в первой части,

$$i_n(\tau_0) = 1/V(u_n(\tau_0)). \quad (8)$$

С. ч. λ_n и величины u_n связаны однозначно.

Из уравнения (6), положив в нем $p = \pm iu_n$ и учтя (8), получим соотношение между значениями вспомогательной функции $s_n(\pm iu_n, \tau_0)$:

$$\begin{aligned} s_n(iu_n, \tau_0) &= (-1)^{n+1} e^{iu_n \tau_0} s_n(-iu_n, \tau_0) = \\ &= s_n^0(\tau_0) \exp\{i[u_n \tau_0 - \pi(n+1)]/2\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где введена величина $s_n^0(\tau_0)$. Она определяется условием нормировки с. ф. (см. ниже) и ее можно считать вещественной.

Теперь выведем уравнение для $s_n(p, \tau_0)$. Для этого заменим в уравнении (6) p на $-p$, затем умножим его на $H(1/p, i_n)/p$ и напишем формулу Коши при $\text{Re } p > 0$ для функции $H(1/p, i_n) s_n(p, \tau_0)/p$, взяв в качестве контура интегрирования минимую ось с обходом полюсов H -функции справа:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} H\left(\frac{1}{p}, i_n\right) s_n(p, \tau_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dp'}{p' - p} \left[\frac{p'}{p'^2 + u_n^2} \overline{s_n(-p', \tau_0)} + \right. \\ &\left. + (-1)^n H(1/p', i_n) e^{ip' \tau_0} s_n(-p', \tau_0)/p' \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь использовано уравнение (6), а при написании первого слагаемого в квадратных скобках — соотношение (1.15). Легко убедиться, что интеграл от этого слагаемого равен нулю, так как подынтегральная функция регулярна в левой полуплоскости, включая минимую ось, то есть слева от контура интегрирования. Во втором же интеграле контур интегрирования деформируем к линии ветвления — отрезку вещественной оси $[-b, -a]$ взяв вычеты в полюсах H -функции. Пользуясь формулами (9), а также (1.5), (1.15) и (1.19), получим искомое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} H\left(\frac{1}{p}, i_n\right) s_n(p, \tau_0) &= \frac{C_0}{u_n} s_n^0 \frac{u_n \cos r_n + (-1)^{n+1} p \sin r_n}{u_n^2 + p^2} + \\ &+ (-1)^n \int_a^b \frac{R(y, \lambda_n)}{H(1/y, i_n)} \frac{y}{y^2 + u_n^2} e^{-y \tau_0} s_n(y, \tau_0) \frac{dy}{y + p}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь введено обозначение

$$r_n = (-1)^{n+1} [u_n \tau_0/2 + u_n \tau_0(u) - \pi(n+1)/2], \quad (12)$$

$R(y, i)$, $\tau_0(u)$ и C_0 даются формулами (1.23), (1.21) и (1.20). Величину r_n можно выразить и через функцию $s_n(p, \tau_0)$. Для этого умножим

уравнение (11) на p и устремим p к бесконечности. Так как $H(0, i) = 1$, а $s_n(\infty, \tau_0) = 0$, то

$$\sin r_n = \frac{u_n}{C_n} \frac{1}{s_n^0} \int \frac{R(y, i_n)}{H(1/y, i_n)} \frac{y du}{y^2 + u_n^2} e^{-y^2} s_n(y, \tau_0). \quad (13)$$

При помощи (13) уравнение (11) можно записать в несколько другой форме, которая удобнее при больших p :

$$H\left(\frac{1}{p}, i_n\right) s_n(p, \tau_0) = C_0 s_n^0 \frac{p \cos r_n - (-1)^{n+1} u_n \sin r_n}{p^2 + u_n^2} - (-1)^n \int \frac{R(y, i_n)}{H(1/y, i_n)} \frac{y^2}{y^2 + u_n^2} e^{-y^2} s_n(y, \tau_0) \frac{dy}{y - p}. \quad (14)$$

Уравнения (11) (или (14)) и (12) полностью определяют с. ч. и вспомогательные функции $s_n(y, \tau_0)$. Для их решения можно применить итерации. Из (13) по s_n находим r_n , затем из (12) по r_n определяем u_n , а из (11) получаем следующее приближение для s_n . Итерационные процедуры для каждого n выполняются независимо. В качестве начального приближения можно взять $s_n = 0$.

Найдя u_n , а значит i_n и $s_n(y, \tau_0)$, можно вычислить и с. ф. Действительно, напишем формулу обращения преобразования Лапласа и подставим вместо $\bar{S}_n$ его выражение из (6),

$$S_n(\tau, \tau_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-l\infty}^{l\infty} \bar{S}_n(p, \tau_0) e^{p\tau} dp = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-l\infty}^{l\infty} \frac{dp}{1 - i_n U(p)} [e^{p\tau} s_n(-p, \tau_0) + (-1)^n e^{i(i_n-1)\tau} s_n(p, \tau_0)]. \quad (15)$$

В силу соотношения (9) подынтегральная функция во втором интеграле в (15) непрерывна на мнимой осн. Деформируем контур интегрирования. Для первого слагаемого в квадратных скобках преобразуем контур налево к линии ветвления функции $\dot{U}(p)$ — отрезку $[-b, -a]$, а для второго слагаемого — направо, к линии ветвления $[a, b]$. Такие преобразования контура законны при $0 < \tau < \tau_0$. У одного из слагаемых надо взять вычеты в полюсах $\pm iu_n$. Приняв во внимание соотношение (9), получим

$$S_n(\tau, \tau_0) = s_n^0 \frac{C_0^2}{u_n} \sin \left[u_n \left(\tau - \frac{\tau_0}{2} \right) + \pi \frac{n+1}{2} \right] - \\ - \int_a^b R(y, \lambda_n) s_n(y, \tau_0) [e^{-y\tau} + (-1)^n e^{-y(\tau-\tau_0)}] dy. \quad (16)$$

Для $S_n(0, \tau_0)$, кроме следующего из (16), можно получить и другое выражение. Для этого умножим (14) на p и устремим затем p к бесконечности. Учтя, что $ps_n(p, \tau_0) \rightarrow S_n(0, \tau_0)$ при $p \rightarrow \infty$, найдем

$$S_n(0, \tau_0) = C_0 s_n^0 \cos r_n - (-1)^n \int_a^b \frac{R(y, \lambda_n)}{H'(1/y, \lambda_n)} \frac{y^2}{y^2 + u_n^2} e^{-y\tau} s_n(y, \tau_0) dy. \quad (17)$$

Из полученных уравнений определяются лишь $s_n(p, \tau_0)/s_n^0$ и $S_n(\tau, \tau_0)/s_n^0$. Множитель $s_n^0(\tau_0)$, как уже говорилось, необходимо найти из условия нормировки.

Теперь обсудим полученные результаты и рассмотрим частные случаи.

3. *Обсуждение результатов. Частные случаи.* Уравнения (11), (12), (13) и (16) для ядра — интегро-экспоненциальной функции

$$K(\tau) = E_1(\tau) = \int_1^\infty e^{-y\tau} dy y \quad (18)$$

были получены методом Кейза в связи с задачей критичности теории переноса нейтронов (см. [4]). При этом уравнения и соотношения, выведенные для $0 < \lambda \leq 1$, формально распространялись на $\lambda > 1$. Как уже отмечалось в первой части [1], это возможно не для всех ядер вида (2), хотя для λ на спектре уравнения во всех случаях похожи. Наш вывод основан на применении традиционного для ленинградской школы теории переноса излучения метода преобразования Лапласа [5, 6].

Обычно с. ч. и с. ф. линейных уравнений рассчитывают при помощи вариационных методов (см., например, [7, 8]). При этом, как правило, с ростом номера с. ч. N расчеты становятся все труднее, а точность их снижается. Поэтому большое значение имеют асимптотические формулы при $N \rightarrow \infty$. Когда в уравнении (1) τ_0 велико, с. ч. с близкими номерами мало отличаются и важно знать их асимптотики при $\tau_0 \rightarrow \infty$. Обзор асимптотических результатов для спектра уравнения с разностным ядром дается в [9].

Для уравнения (1) с ядром вида (2), как мы видим, оказалось возможным предложить способ точного расчета спектра, например, методом последовательных приближений. При этом уже начальное приближение

дает хорошие асимптотические результаты. В этом приближении λ_n (через u_n) определяется уравнением

$$u_n(\tau_0) [\tau_0 + 2\tau_0(u_n(\tau_0))] = \pi(n+1). \quad (19)$$

В этом же приближении $S_n(\tau, \tau_0)$ равно внеинтегральному члену в (16). Для того, чтобы продемонстрировать хорошую точность начального приближения, рассмотрим частные случаи ядер и предельные соотношения между τ_0 и n .

а) Для $K(\tau) = e^{-\tau}$ функции $V(u) = 1/(1+u^2)$, $\tau_0 = \arctg u$, а уравнение (19) является точным при всех τ_0 и n [5]. Это ядро описывает монохроматическое рассеяние в одномерной среде.

б) При $a > 0$ и $\tau_0 \rightarrow \infty$ уравнение (19) дает λ_n с погрешностью порядка $e^{-a\tau_0}$. С той же точностью с. ф. $S_n(\tau, \tau_0)$ можно принять равной внеинтегральному слагаемому в (16). Как видно из уравнений (11) и (13), величина $e^{-a\tau_0}$ определяет и скорость сходимости итераций.

в) Если $n \gg 1 + \tau_0$ (τ_0 — любое), то из (19) следует, что

$$\lambda_n \sim 1/V(\pi(n+1)/\tau_0), \quad (20)$$

что показано в [10].

г) Если при $u \rightarrow +0$ выполняется $1 - V(u) = V_0 u^2 + O(u^{2+\delta})$, где V_0 и $\delta > 0$ — постоянные, то, как легко заметить из формулы (1.21), $\tau_0(0)$ — конечное число

$$\tau_0(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \ln \frac{V_0 u^2}{1 - V(u)} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{2}{u} + \frac{V'(u)}{1 - V(u)} \right] \frac{du}{u}. \quad (21)$$

Тогда из (19) следует, что при $\tau_0 \gg n+1$ и любых n

$$\lambda_n - 1 \sim V_0 \left[\pi \frac{n+1}{\tau_0 + 2\tau_0(0)} \right]^2 \sim V_0 \left(\pi \frac{n+1}{\tau_0} \right)^2 \left[1 - 4 \frac{\tau_0(0)}{\tau_0} \right]. \quad (22)$$

Такое представление λ_n было получено в [11]. В частности, для ядра (18) $V(u) = \arctg u/u$, а $\tau_0(0) = 0.710446\dots$ — постоянная Хопфа [4–6].

Более подробно рассмотрим случай, представляющий интерес для теории рассеяния в спектральной линии. Для него были получены асимптотики основных функций и в первой части [1], которыми мы здесь и воспользуемся.

4. Асимптотики при $\tau_0 \rightarrow \infty$. Пусть теперь при $u \rightarrow +0$,

$$1 - V(u) \sim V_0(u) u^{2\gamma}, \quad (23)$$

где $0 < \gamma < 1$, а $V_0(u)$ — медленно меняющаяся функция. Если $\tau_0 \rightarrow \infty$, а n закреплено, то $u_n \tau_0$ стремится к конечной величине, обозначим ее v_n . Примем $a = 0$, $b = \infty$, а $A(y)$ и остальные функции равными своим асимптотикам при $u \rightarrow +0$ (см. (1.40) — (1.45)). Подставив эти асимптотики в уравнения (11), (13) и (16), получим, что $s_n(u_n t, \tau_0) \sim s_n^0(\tau_0) s_n^*(t)$, а величины v_n и $s_n^*(t)$ определяются уравнениями

$$v_n = \pi(2n + 1 + \gamma)/2 - 2(-1)^n r_n, \quad (24)$$

$$r_n = \arcsin \left[\sqrt{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \int_0^\infty f(t) s_n^*(t) e^{-v_n t} dt / h_1(t) \right], \quad (25)$$

$$\frac{h_1(t)}{\sqrt{1+t^2}} s_n^*(t) = \frac{1}{1-\gamma} \frac{\cos r_n + (-1)^{n+1} t \sin r_n}{1+t^2} + \quad (26)$$

$$+ (-1)^n \int_0^\infty f(t') s_n^*(t') e^{-v_n t'} dt' / h_1(t')(t+t),$$

где в согласии с (1.46)

$$f(t) = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \frac{t^{2\gamma}}{\sqrt{1+t^2} (1+t^{4\gamma} - 2 \cos \pi \gamma t^{2\gamma})}. \quad (27)$$

Асимптотика с. ф. $S_n(\tau, \tau_0)$ имеет вид

$$S_n(\tau, \tau_0) \sim s_n^0(\tau_0) \frac{u_n^{1-2\gamma}}{V_0} \left\{ \frac{1}{\gamma} \sin \left[v_n \left(\tau - \frac{1}{2} \right) + \pi \frac{n+1}{2} \right] - \int_0^\infty f(t) \sqrt{1+t^2} s_n^*(t) dt \left[e^{-v_n \tau} + (-1)^n e^{-v_n (1-\tau) \tau} \right] \right\}, \quad (28)$$

причем через τ обозначено τ/τ_0 . Величина $S_n(0, \tau_0)$ имеет более высокий порядок малости. Действительно, из (17) следует, что

$$S_n(0, \tau_0) \sim s_n^0(\tau_0) u_n^{1-\gamma} M / \sqrt{\gamma V_0}, \quad (29)$$

где

$$M = \cos r_n - (-1)^n \sqrt{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \int_0^\infty f(t) e^{-v_n t} dt s_n^*(t) / h_1(t). \quad (30)$$

Если же исходить из формулы (28), то, используя формулы (1.47), (1.48) и (1.49), легко показать, что в этом приближении $S_n(0, \tau_0) = S_n(\tau_0, \tau_0) = 0$.

Итак, асимптотика $\lambda_n(\tau_0)$ при $\tau_0 \gg n + 1$ дается формулой

$$\lambda_n - 1 \sim V_0 (1/\tau_0) v_n^{2l} \tau_0^{-2l}. \quad (31)$$

Постоянную нормировки $s_n^0(\tau_0)$ также можно просто выразить через $s_n^0(t)$. Легче всего это сделать следующим образом. Продифференцировав (1) по τ_0 , получим неоднородное уравнение для $\partial S_n(\tau, \tau_0)/\partial \tau_0$. Так как решение этого уравнения существует, а λ_n принадлежит спектру, то свободный член указанного уравнения должен быть ортогонален с. ф., то есть

$$\frac{1}{\lambda_n} \frac{\partial s_n^0}{\partial \tau_0} \left\{ S_n^2(\tau, \tau_0) d\tau + S_n^2(0, \tau_0) \right\} = 0. \quad (32)$$

Приравняв интеграл в (32) единице и подставив туда соотношение (31), получим

$$S_n(0, \tau_0) \sim |2\gamma V_0 v_n^l \tau_0^{-l-1/2}|. \quad (33)$$

Сравнив это с (29), найдем

$$s_n^0(\tau_0) \sim |2\gamma V_0 v_n^{2l-1} \tau_0^{-2l-1/2}/M|. \quad (34)$$

Таким образом, нормированная с. ф. имеет асимптотику

$$S_n(\tau, \tau_0) \sim \sqrt{\frac{2}{\tau_0}} \frac{1}{M} \left\{ \sin \left[v_n \left(\xi - \frac{1}{2} \right) + \pi \frac{n+1}{2} \right] - \right. \\ \left. - \gamma \int_0^\infty f(t) |1+t^2|^{-1} s_n^0(t) dt \left[e^{-v_n t} + (-1)^n e^{-v_n(1-t)t} \right] \right\}. \quad (35)$$

В качестве нулевого приближения в (31), (33) и (34) для v_n можно взять формулу (24) с $r_n = 0$, то есть $v_n = \pi(2n+1+\gamma)/2$ и положить $M=1$.

При $0 < \gamma < 1/2$ в связи с задачей о высвечивании слоя плазмы в резонансной линии асимптотику λ_n при $\tau_0 \rightarrow \infty$ изучал Холстейн [12]. Он получил правильную функциональную форму зависимости $\lambda_n - 1$ от τ_0 , а численные коэффициенты для $\gamma = 1/6, 1/4$ и $1/2$ нашел вариационным методом. При любых γ Вайдом [13] вывел функциональную форму стремления λ_n к 1 и указал ядро K^n , с. ч. которого (зависящие от γ и n , но не от τ_0 и V_0) определяют числовые множители.

Ван Триггом было упрощено выражение для ядра K^* и предложено для нахождения его спектра разлагать с. ф. по полиномам Якоби [14]. Им же для $\gamma = 1/4$ и $1/2$ и $n = 0, 1, 2, 3, 4$ были произведены расчеты. Обсуждение этих результатов и их физическая интерпретация содержатся в [15].

Уравнения (24), (25) и (26) дают новый способ изхождения с. ч. и с. ф. ядра K^* . Мы численно решили эти уравнения для $\gamma = 1/4$ и $1/2$. В табл. 1 приводятся значения v_n и M в зависимости от номера итерации m . Как видно из этой таблицы, сходимость итераций очень быстрая, а начальное приближение при $n=0$ имеет погрешность, равную для $\gamma = 1/4$ и $1/2$ соответственно 4.3 и 1.8%. Для коэффициента при τ_0^{-2n} в формуле (31) относительные ошибки будут равны 2.1 и 1.8%. Ошибка начального приближения для этого коэффициента убывает как $n^{-2(n+1)}$.

Таблица 1
ВЕЛИЧИНЫ v_n И M В ЗАВИСИМОСТИ ОТ НОМЕРА ИТЕРАЦИИ m

$\gamma = 1/2$		v_n			M		
$n \backslash m$	0	1	2, ∞	0	1	2, ∞	
0	2.35619	2.31725	2.31555	1.0	0.98938	0.98921	
1	5.49779	5.50971	5.50951	1.0	1.00166	1.00165	
2	8.63938	8.63366	8.63360	1.0	0.99941	0.99943	
3	11.78097	11.78432	11.78429	1.0	1.00025	1.00025	
4	14.92257	14.92037	14.92035	1.0	0.99987	0.99987	
5	18.06416	18.06571	18.06571	1.0	1.00008	1.00008	

$\gamma = 1/4$		0	1	∞	0	1	∞
0	1.96350	1.88957	1.88244	1.0	0.98041	0.97956	
1	5.10509	5.13095	5.12985	1.0	1.00301	1.00295	
2	8.21668	8.23273	8.23223	1.0	0.99884	0.99882	
3	11.38827	11.39728	11.39703	1.0	1.00053	1.00052	
4	14.52987	14.52344	14.52328	1.0	0.99968	0.99968	
5	17.67146	17.67633	17.67622	1.0	1.00019	1.00019	

Рассмотренные в разделах 3 и 4 частные случаи показывают, что при $\tau_0 \gg n + 1$ и $n \gg \tau_0 + 1$ для нахождения с. ч. с хорошей точностью можно использовать уравнение начального приближения (19). При $\tau_0 \gg 1$ и произвольном соотношении между n и τ_0 уравнение (19) является интерполяционным между двумя предельными случаями и

также должно давать неплохие результаты, но его тогда необходимо решать численно. Заметим, что для написания асимптотического уравнения (19) выполнения условия (2) не требуется.

Произведенные нами вычисления асимптотик и хорошая точность начального приближения, а также опыт расчетов для ядра (18) [4] позволяют надеяться, что предложенный способ расчета спектра уравнений вида (1) окажется достаточно эффективным.

В заключение заметим следующее. Как известно, задача о свечении шара оптического радиуса τ_0 сводится к задаче о слое толщиной $2\tau_0$, причем надо брать нечетные решения (см., например, [16]). Поэтому все наши уравнения могут быть применены для расчета спектра для шара. Например, чтобы получить уравнение начального приближения для шара радиуса τ_0 , надо в (19) заменить τ_0 на $2\tau_0$, а n брать только нечетные. Задача о свечении цилиндра сводится к плоской лишь в асимптотической области. Метод получения асимптотических результатов для цилиндра излагается в [4]. Пользуясь этим методом, легко показать, что аналогом уравнения (19) для бесконечного цилиндра оптического радиуса τ_0 служит

$$u_n(\tau_0) [\tau_0 + \tau_r(u_n(\tau_0))] = \pi(n + 3/4). \quad (36)$$

Ленинградский государственный
университет

THE CALCULATION OF THE SPECTRUM OF THE INTEGRAL EQUATION OF RADIATIVE TRANSFER. II. THE PLANE LAYER OF FINITE OPTICAL THICKNESS

D. I. NAGIRNER

An iterative method is proposed for the calculation of the spectrum of Fredholm integral equation with symmetrical displacement kernel which is a superposition of exponentials. The eigenfunctions are expressed in terms of auxiliary functions. These functions are solutions of equations that can be solved iteratively. Several particular forms of the kernel are considered with special attention to limiting cases of the relation between the length of integration range τ_0 and number of eigenvalue. It is found that even the zeroth approximation gives a good accuracy. For the kernels with a power decrease at infinity the equations are found that describe the asymptotic behaviour of the spectrum under the assumption that $\tau_0 \rightarrow \infty$. Numerical data are given for two particular values of the exponent of the power decrease of the kernel.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. И. Назирнер, *Астрофизика*, 15, 229, 1979.
2. Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, Наука, М., 1977.
3. Н. И. Мухомелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, Наука, М., 1968.
4. К. Кейз, П. Цвайфель, *Линейная теория переноса*, Мир, М., 1972.
5. В. В. Соболев, *Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет*, ГИТТЛ, М., 1956.
6. В. В. Иванов, *Перенос излучения и спектры небесных тел*, Наука, М., 1969.
7. С. Г. Михлин, *Вариационные методы в математической физике*, Наука, М., 1970.
8. С. Гуд, *Вариационные методы в задачах о собственных значениях*, Мир, М., 1970.
9. П. П. Забрейко и др., *Интегральные уравнения*, Наука, М., 1968.
10. H. Widom, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 109, 278, 1963.
11. H. Widom, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88, 491, 1958.
12. T. Holstein, *Phys. Rev.*, 72, 1212; 83, 1159, 1951.
13. H. Widom, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 98, 430, 1961.
14. C. van Trigt, *Phys. Rev.*, 181, 97, 1969.
15. А. М. Дыхне, А. П. Напарович, *Перенос резонансного излучения в неоднородной плазме*, ИАЭ—2026, М., 1970.
16. Д. И. Назирнер, *Астрофизика*, 8, 353, 1972.