АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 15 МАЙ, 1979 ВЫПУСК 2

УДК 524.5,524.3/4--32.+524.6

ПЛАЗМЕННЫЕ ВОЛНЫ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СИЛЬНО АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИЕСЯ ВДОЛЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

О. Г. ОНИЩЕНКО

Поступила 22 мая 1978
Пересмотрена 15 декабря 1978

Исследуются дисперсионные свойства плазменных волн в релятивистской плазме с одномерной функцией распределения частиц, распространяющиеся вдоль сильного магнитного поля. Показано, что незатухающие плазменные волны существуют в диапазоне частот $\omega_p < \omega < \omega_l$. Показано, что в плазме с одномерной ультрарелятивистской максвелловской или степенной функцией распределения существуют слабозатухающие плазменные волны с фазовой скоростью $v_\phi < c$ и частотой $\omega = \omega_l(1 - \Delta)$, $0 < \Delta \ll 1$.

Из общих представлений о природе пульсаров следует, что в окрестности нейтронной звезды возможно существование ультрарелятивистской плазмы в сильном магнитном поле. Поэтому проблема генерации и распространения электромагнитных волн в релятивистской плазме, находящейся в сильном магнитном поле, представляет большой интерес [1—4].

Электромагнитные свойства релятивистской плазмы существенно зависят от функции распределения частиц (в релятивистской плазме велика роль пространственной дисперсии). Капланом и Цытовичем [1, 2] было замечено, что вблизи нейтронной звезды могут осуществляться два процесса, в результате которых произвольная функция распределения релятивистских частиц по импульсу быстро становится практически одномерной — вытянутой вдоль магнитного поля B. Первый процесс — одномеризация функции распределения частиц по импульсу в результате потерь на синхротронное излучение и второй — одномеризация функции распределения частиц вследствие сохранения адиабатического инварианта $p_\perp^2/B = \text{const}$, где $p_\perp$ — поперечная компонента импульса частицы, при движении частицы в медленно убывающем магнитном поле. В качестве функции распределения частиц α-сорта по энергии E в [1, 2] предлагается

$$F_\alpha(E) = \frac{(\gamma-1)E_{*\alpha}^{\gamma-1}}{(E+E_{*\alpha})^\gamma}\begin{cases}1 & \text{при} \quad E < E_{\max\alpha}, \quad E_{\max\alpha} \gg E_{*\alpha} \gg m_\alpha c^2,\\ 0 & \text{при} \quad E > E_{\max\alpha},\end{cases} \tag{1}$$

m_α — масса частицы α-сорта, c — скорость света.

Суворовым и Чугуновым [3] в качестве одномерной функции распределения по импульсу p взята функция

$$\Phi_\alpha(p) = m_\alpha^2 c^2 (m_\alpha^2 c^2 + p^2)^{-3/2}. \tag{2}$$

При распределении (2) средняя энергия частиц $\langle E \rangle_\alpha = (\pi/2) m_\alpha c^2$. Частицы ультрарелятивистские лишь в хвосте распределения. Как показано в [5], если радиационное охлаждение происходит в сильном магнитном поле $B \sim 10^{10} \div 10^{12}$ Гс, то первый процесс одномеризации произвольного изотропного ультрарелятивистского распределения электронов в магнитосфере пульсара более эффективен, чем второй процесс. В этом случае из произвольного ультрарелятивистского изотропного распределения формируется распределение (2) за время $t_0 \sim m_\alpha^3 c^5 / e_\alpha^4 B^2$, e_α — заряд частицы α-сорта. Для электронов $t_0 \sim 10^{-15} (10^{12}/B)^2$ секунд.

Из наблюдений, в частности наблюдений излучения пульсара в Крабовидной туманности, есть основания полагать [6], что область, ответственная за излучение в оптическом и рентгеновском диапазонах частот (в этой области происходит радиационное остывание, одномеризация функции распределения электронов из-за синхротронного излучения), лежит вблизи светового цилиндра, где $B \sim 10^6$ Гс. Можно предположить, что в нижних слоях магнитосферы пульсара происходит ускорение частиц до ультрарелятивистских энергий продольным электрическим полем E_z и разогрев плазмы, формируется ультрарелятивистское анизотропное — вытянутое вдоль $\overline{B}$ распределение. В верхних слоях из анизотропного ультрарелятивистского распределения в результате радиационного остывания формируется ультрарелятивистское (релятивистское) практически одномерное распределение.

В данной работе исследуются продольные (плазменные) волны в релятивистской плазме, состоящей из частиц с произвольными одномерными функциями распределения $\Phi_\alpha(p)$. Волны распространяются вдоль магнитного поля $\overline{B}$. Результаты сравниваются с результатами [2, 3]. Ионы могут быть нерелятивистскими с изотропной функцией распределения. Частицами с положительным зарядом могут быть не только ионы, но и позитроны. Более подробно исследуется случай, когда $\Phi_\alpha(p)$ в ультрарелятивистской области спадает по степенному закону $\Phi_\alpha(p) \sim p^{-\gamma_\alpha}$ (соотнетствующее распределение по энергии $F_a(E) \sim E^{-\gamma_a}$), а в нерелятивистскую область $\Phi_a(p)$ продолжена так, чтобы была всюду не возрастающей функцией p и средняя энергия $\langle E\rangle_a \gg m_a c^2$. В качестве функции, обладающей указанными свойствами, наиболее удобным является выражение:

$$\Phi_a(p) = A_a(m_a^2c^2 + p^2)^{-1/2}(p + p_{*a})^{-\gamma_a+1} \begin{cases} 1 \text{ при } p < p_{\max a},\ p_{\max a} \gg p_{*a} \gg m_a c, \\ 0 \text{ при } p > p_{\max a}. \end{cases} \tag{3}$$

Распределение $\Phi_a(p)$ нормировано на единицу, то есть $\int\limits_0^\infty \Phi_a(p)\,dp = 1$.

При $\gamma_a > 1$ коэффициент $A_a = \dfrac{p_{*a}^{\gamma_a-1}}{\ln 2\dfrac{p_{*a}}{m_a c}}$, если $\gamma_a = 1$, то $A_a =$ $= \dfrac{1}{\ln 2\dfrac{p_{\max a}}{m_a c}}$. Если $\gamma_a > 2$, то $\dfrac{\langle E\rangle_a}{m_a c^2} = \dfrac{1}{\gamma_a - 2}\,\dfrac{p_{*a}}{m_a c}\,\dfrac{1}{\ln 2\dfrac{p_{*a}}{m_a c}}$,

$\dfrac{\langle E\rangle_a}{m_a c^2} = \ln\dfrac{p_{\max a}}{p_{*a}}\,\dfrac{p_{*a}}{m_a c}\,\dfrac{1}{\ln 2\dfrac{p_{*a}}{m_a c}}$ при $\gamma_a = 2$, $\dfrac{\langle E\rangle_a}{m_a c^2} = \dfrac{1}{\ln 2\dfrac{p_{\max a}}{m_a c}} \times$ $\times \dfrac{p_{\max a}}{m_a c}$ при $\gamma_a = 1$. Рассматривается также случай, когда $\Phi_a(p)$ — ультрарелятивистское одномерное распределение Максвелла.

Дисперсионное уравнение для плазменных волн, распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля ($k_z = k$, $k_\perp = 0$), в одномерной плазме имеет вид [2, 3] $\eta(\omega, k_z) = 0$, где

$$\eta(\omega, k_z) = 1 + \sum_a \delta\eta_a(\omega, k_z). \tag{4}$$

Выражение для эрмитовой части $\delta\eta_a$ можно представить в следующем виде:

$$\delta\eta_a^{\text{н}} = -\frac{\omega_{La}^2}{\omega^2}\, m_a c \oint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_z\sqrt{p_z^2 + m_a^2c^2}}{p_z^2\left(\dfrac{k_z^2c^2}{\omega^2} - 1\right) - m_a^2c^2}\,\frac{d}{dp_z}\Phi_a(p_z)\,dp_z; \tag{5}$$

$\Phi_a(p_z)$ — одномерное распределение по импульсу p_z частиц a-сорта, $\omega_{La}^2 = (4\pi N_a e_a^2)/m_a$, N_a — концентрация частиц. Интеграл в (5) вычисляется в смысле главного значения при $k_z c > \omega$, и в обычном смысле при $k_z c < \omega$. Антиэрмитова часть η равна

$$\eta^a = \sum_s \eta^a_s, \quad \eta^a_s = -i\pi \frac{\omega_{Ls}^2}{\omega^2} \frac{|k_z|c}{\omega} \frac{1}{m_s c} p_{rs}^3 \left| \frac{d}{dp} \Phi_s(p) \right|_{p = p_{rs}} \begin{cases} 1 \text{ при } |k_z|c > \omega, \\ 0 \text{ при } |k_z|c < \omega, \end{cases} \tag{6}$$

где $p_{rs} = m_s c\,(\omega/\sqrt{k_z^2c^2 - \omega^2})$ — импульс частицы, находящейся в резонансе с волной. (Если подставить значение скорости резонансной частицы $v_r = \omega/|k_z|$ и $p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, то получим $p_{rs} = m_s c\,(\omega/\sqrt{k_z^2c^2 - \omega^2})$). Если $\omega/\sqrt{k_z^2c^2 - \omega^2} \gg 1$, то резонансные частицы ультрарелятивистские, то есть $p_{rs} \gg m_s c$. Если $k_z c \to \omega$, то $p_{rs} \to \infty$ и $\eta^a_s \to 0$ для убывающих функций $\Phi_s(p)$. В дальнейшем индекс z у k_z, v_z, p_z для простоты опускаем.

1. *Длинноволновые плазменные колебания и плазменные волны с фазовой скоростью $v_\phi = \omega/k = c$ в одномерной релятивистской плазме.* Выведем дисперсионное уравнение длинноволновых плазменных колебаний. Воспользовавшись (5), можно вычислить эрмитову часть $\eta(\omega, k)$ для одномерной релятивистской плазмы с произвольной функцией распределения частиц в приближении длинных волн:

$$k^2 \langle v^2 \rangle \ll \omega^2. \tag{7}$$

Если плазма ультрарелятивистская ($\langle v^2 \rangle = c$), то приближение длинных волн будет иметь вид $k^2c^2 \ll \omega^2$. В этом случае антиэрмитова часть η и декремент затухания Ландау плазменных колебаний равны нулю. В рассматриваемом приближении (7) η^e имеет вид:

$$\eta^e(\omega, k) = 1 - \sum_s \frac{\omega_{Ls}^2}{\omega^2} \left[\left\langle \left(\frac{mc^2}{E}\right)^3 \right\rangle_s + 3\frac{k^2}{c^2} \left\langle v^2 \left(\frac{mc^2}{E}\right)^3 \right\rangle_s \right], \tag{8}$$

где $E = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$ — энергия частицы. Угловые скобки $\langle\ \rangle_s$ означают усреднение по одномерной функции распределения $\Phi_s(p)$, то есть $\langle \varphi(p, m, E) \rangle_s = \int \varphi(p, m_s, E_s)\Phi_s(p)\,dp$. По аналогии с нерелятивистской плазмой назовем плазменной частотой частоту длинноволновых ($k \to 0$) плазменных колебаний [1, 2],

$$\omega_p^2 = \sum_s \omega_{ps}^2, \qquad \omega_{ps}^2 = \omega_{Ls}^2 \left\langle \left(\frac{mc^2}{E}\right)^3 \right\rangle_s. \tag{9}$$

Дисперсионное уравнение плазменных колебаний в рассматриваемом приближении

$$\omega^2 = \omega_p^2 \left(1 + 3\frac{k^2}{\omega^2}\frac{\sum\limits_\alpha \left\langle v^2 \left(\frac{mc^2}{E}\right)^3\right\rangle_\alpha}{\sum\limits_\alpha \left\langle \left(\frac{mc^2}{E}\right)^3\right\rangle_\alpha}\right). \qquad (10)$$

Выражение (8) в нулевом приближении по k и, следовательно, выражение для плазменной частоты (9) можно получить из элементарных соображений (см. Приложение 1).

Использовав равенство

$$\left\langle v^2 \left(\frac{mc^2}{E}\right)^3\right\rangle_\alpha = c^2\left[\left\langle \left(\frac{mc^2}{E}\right)^3\right\rangle_\alpha - \left\langle \left(\frac{mc^2}{E}\right)^5\right\rangle_\alpha\right], \qquad (11)$$

можно (10) записать в следующем виде:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3\delta k^2 c^2, \qquad (12)$$

где

$$\delta = 1 - \frac{\sum\limits_\alpha \left\langle \left(\frac{mc^2}{E}\right)^5\right\rangle_\alpha}{\sum\limits_\alpha \left\langle \left(\frac{mc^2}{E}\right)^3\right\rangle_\alpha}. \qquad (13)$$

Если плазма нерелятивистская ($E_\alpha \simeq m_\alpha c^2$), то из (10), (12) следует известное дисперсионное уравнение Власова, $\delta = \langle v^2 \rangle / c^2 \ll 1$. В случае релятивистского распределения δ определяется, в основном, вкладом частиц в нерелятивистской и слаборелятивистской области и не зависит от ультрарелятивистского „хвоста" распределения.

Рассмотрим плазменные волны с фазовой скоростью $v_\phi = \omega/k = c$. В этом случае η будет иметь вид

$$\eta = 1 - \frac{\omega_l^2}{\omega^2}, \qquad \omega_l^2 = \sum_\alpha \omega_{l\alpha}^2, \qquad (14)$$

где

$$\omega_{l\alpha}^2 = \omega_{L\alpha}^2 \left| 2\left\langle \frac{E}{mc^2}\right\rangle_\alpha - \left\langle \frac{mc^2}{E}\right\rangle_\alpha - 2\,\frac{p_{\max\alpha}^2}{m_\alpha c}\,\Phi_\alpha(p_{\max\alpha})\right|. \qquad (15)$$

Если $\gamma_\alpha > 2$, то последним слагаемым в квадратных скобках (15) можно пренебречь. В случае ультрарелятивистской плазмы можно пренебречь вторым слагаемым в квадратных скобках по сравнению с первым.

Подставив распределения (1), (2), (3) в (9), (13), (15), получим соответственно следующие выражения для $\omega^2_{p\alpha}$, δ и $\omega^2_{l\alpha}$:

$$\omega^2_{p\alpha} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{m_\alpha c^2}{E_{*\alpha}} \omega^2_{L\alpha}, \quad \delta = \frac{1}{2}, \qquad \omega^2_{l\alpha} = \frac{2}{\gamma - 2} \frac{E_{*\alpha}}{m_\alpha c^2} \omega^2_{L\alpha}; \tag{16}$$

$$\omega^2_{p\alpha} = \frac{3\pi}{16} \omega^2_{L\alpha}, \quad \delta = \frac{1}{6}, \qquad \omega^2_{l\alpha} = \frac{3\pi}{4} \omega^2_{L\alpha}; \tag{17}$$

$$\omega^2_{p\alpha} = \frac{\pi}{4} \left(\ln 2 \frac{p_{*\alpha}}{m_\alpha c} \right)^{-1} \omega^2_{L\alpha}, \quad \delta = \frac{1}{4},$$
$$\omega^2_{l\alpha} = \frac{2}{\gamma_\alpha - 2} \left(\ln 2 \frac{p_{*\alpha}}{m_\alpha c} \right)^{-1} \frac{p_{*\alpha}}{m_\alpha c} \omega^2_{L\alpha}, \quad \text{при} \quad \gamma_\alpha > 2. \tag{18}$$

Если $\gamma_\alpha = 2$ в распределении (3), то

$$\omega^2_{l\alpha} = \left| 2 \ln \frac{p_{\max\alpha}}{p_{*\alpha}} - 1 \right| \frac{p_{*\alpha}}{m_\alpha c} \omega^2_{L\alpha}; \tag{19}$$

если $\gamma_\alpha = 1$, то

$$\omega^2_{p\alpha} = \frac{\pi}{4} \left(\ln 2 \frac{p_{\max\alpha}}{m_\alpha c} \right)^{-1} \omega^2_{L\alpha}, \qquad \omega^2_{l\alpha} = -\frac{\pi}{2} \left(\ln 2 \frac{p_{\max\alpha}}{m_\alpha c} \right)^{-1} \omega^2_{L\alpha}, \tag{20}$$

то есть, если $\gamma_\alpha = 1$ для всех сортов частиц, то плазменных волн с $\omega/k = c$ в такой плазме не существует, дисперсионная кривая $\omega(k)$ не пересекает прямую $\omega/k = c$. Выражения для $\omega^2_{p\alpha}$ и $\omega^2_{l\alpha}$ в (16), (17) совпадают с соответствующими выражениями в [2, 3]. В [1, 2] вместо коэффициента $\delta = 1/2$ в дисперсионном уравнении плазменных волн в длинноволновом приближении ошибочно написан коэффициент $\delta = 1/4$. Заметим, что если в (9), (15) подставить одномерное нерелятивистское распределение, то получим

$$\omega^2_{p\alpha} = \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\langle p^2 \rangle_\alpha}{m^2_\alpha c^2} \right) \omega^2_{L\alpha}, \qquad \omega^2_{l\alpha} = \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\langle p^2 \rangle_\alpha}{m^2_\alpha c^2} \right) \omega^2_{L\alpha}, \tag{21}$$

здесь $\langle p^2 \rangle_\alpha / m^2_\alpha c^2 \ll 1$.

Таким образом, в одномерной релятивистской плазме возможны незатухающие волны с частотой ω [2, 3]:

$$\omega_p < \omega < \omega_l. \tag{22}$$

Чем больше доля релятивистских (ультрарелятивистских) частиц в распределении, тем шире диапазон частот незатухающих плазменных волн. Частота ω_l разделяет незатухающие ($\omega < \omega_l$, $\omega/k > c$) и затухающие продольные волны ($\omega > \omega_l$, $\omega/k < c$, см. [2]), если такие волны существуют. Как показано в [3], в плазме с функцией распределения (3) продольных волн с частотой $\omega > \omega_l$ ($\omega/k < c$) не существует. Конкретный вид дисперсионного уравнения плазменных волн в области частот $\omega_p < \omega < \omega_l$ и ответ на вопрос о существовании плазменных волн с $\omega > \omega_l$ ($\omega/k < c$) требуют более детального рассмотрения с конкретной функцией распределения частиц.

2. *Плазменные волны в релятивистской одномерной максвелловской плазме.* Релятивистские частицы могут не подчиняться функции распределения Максвелла, т. к. кулоновские столкновения таких частиц крайне редки. Однако из-за того, что «хвост» максвелловского распределения быстро убывает, интеграл в (5) имеет простое асимптотическое разложение, и такое однопараметрическое распределение удобно рассмотреть в качестве иллюстрации.

Подставим в (5) одномерное релятивистское распределение Максвелла:

$$\Phi_\alpha(p) = \frac{1}{m_\alpha c K_1\left(\frac{m_\alpha c^2}{T_\alpha}\right)} \exp\left(-\frac{c\sqrt{m^2c^2+p^2}}{T_\alpha}\right). \tag{23}$$

$K_1(x)$ — функция МакДональда, T_α — температура в энергетических единицах. В результате элементарных преобразований получим следующее выражение для η^*:

$$\eta^*(\omega, k) = 1 - \sum_\alpha \omega_{L\alpha}^2 K_1^{-1}\left(\frac{m_\alpha c^2}{T_\alpha}\right)\frac{m_\alpha c^2}{T_\alpha}\int_1^\infty \frac{t\sqrt{t^2-1}}{k^2c^2-(k^2c^2-\omega^2)t^2}\times$$
$$\times \exp\left(-\frac{m_\alpha c^2}{T_\alpha}t\right)dt. \tag{24}$$

Интеграл в (24)

$$I = \oint_1^\infty \frac{t\sqrt{t^2-1}}{1-\frac{k^2c^2-\omega^2}{k^2c^2}t^2} \exp\left(-\frac{m_\alpha c^2}{T_\alpha}t\right)dt \tag{25}$$

вычисляется в смысле главного значения при $kc > \omega$ и в обычном смысле — при $kc < \omega$. Будем считать, что плазма ультрарелятивистская, то есть $m_\alpha c^2/T_\alpha = Z \ll 1$, в этом случае $K_1(Z) \simeq Z^{-1}$. Используем результат асимптотического разложения интеграла (25) по параметру Z для волн с $\omega > kc$ (см. Приложение 2), $I \simeq Z^{-1}/(\omega^2 - k^2c^2)$. Тогда

$$\eta = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - k^2c^2}, \qquad \omega_p^2 = \sum_\alpha \omega_{p\alpha}^2 = \sum_\alpha \omega_{L\alpha}^2 \frac{m_\alpha c^2}{T_\alpha}. \tag{26}$$

Следовательно, дисперсионное уравнение плазменных волн

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2c^2. \tag{27}$$

Из (26) видно, что плазменная частота ω_p определяется частицами с меньшей температурой T_α, в то время, как в нерелятивистской плазме плазменная частота определяется частицами с меньшей массой — электронами. Дисперсионное уравнение (27) аналогично дисперсионному уравнению для поперечных электромагнитных волн в изотропной нерелятивистской плазме в отсутствие внешнего магнитного поля. Дисперсионное уравнение (27) перестает быть справедливым при $\omega \gg \omega_p$, то есть для волн с $\omega \to kc$. Для волн с фазовой скоростью $v_\phi = c$ получим:

$$\eta = 1 - \frac{\omega_l^2}{\omega^2}, \qquad \omega_l^2 = \sum_\alpha \omega_{l\alpha}^2, \qquad \omega_{l\alpha}^2 = 2\,\frac{T_\alpha}{m_\alpha c^2}\,\omega_{L\alpha}^2. \tag{28}$$

Таким образом, в такой плазме существуют незатухающие продольные волны с дисперсионным уравнением (27) в диапазоне частот $\omega_p \leqslant \omega \leqslant \omega_l$, где ω_p и ω_l определены в (26) и (28).

Рассмотрим плазменные волны с дисперсионным уравнением

$$kc = \omega(1 + \Delta), \quad |\Delta| \ll 1 \tag{29}$$

так, что выполняется условие

$$\frac{\sqrt{|k^2c^2 - \omega^2|}}{kc}\,\frac{T_\alpha}{m_\alpha c^2} \ll 1. \tag{30}$$

Если $kc > \omega$, то $\dfrac{\sqrt{k^2c^2 - \omega^2}}{kc}\,\dfrac{T_\alpha}{m_\alpha c^2} = \dfrac{T_\alpha}{E_{r\alpha}}$, где $E_{r\alpha} = \dfrac{m_\alpha c^2}{\sqrt{1 - v_\phi^2/c^2}} =$ $= \dfrac{kc}{\sqrt{k^2c^2 - \omega^2}}\,m_\alpha c^2$ — энергия частицы, находящейся в резонансе с волной. Таким образом, при выполнении (30) для волн с $v_\phi < c$ резонансные частицы находятся в „хвосте“ распределения. В приближении (30) интеграл (25) имеет разложение (см. Приложение 2)

$$I \simeq 2Z^{-3}\left|1 + 12\,\frac{k^2c^2 - \omega^2}{k^2c^2}\,Z^{-2}\right|. \tag{31}$$

Вклад частиц α-сорта в эрмитову часть η будет:

$$4\pi\chi^\alpha = -\frac{\omega_{l\alpha}^2}{k^2c^2}\left\{1 + 12\,\frac{k^2c^2 - \omega^2}{k^2c^2}\left(\frac{T_\alpha}{m_\alpha c^2}\right)^2\right\}. \tag{32}$$

Если условие (30) выполняется для всех сортов частиц, то

$$\eta = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2c^2}\left\{1 + 12\,\frac{k^2c^2-\omega^2}{k^2c^2}\left(\frac{T_\alpha}{m_\alpha c^2}\right)^2\right\} +$$

$$+ i\frac{\pi}{2}\sum \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2c^2-\omega^2}\frac{kc}{\sqrt{k^2c^2-\omega^2}}\left(\frac{kc-\omega}{|kc-\omega|}+1\right)\left(\frac{m_\alpha c^2}{T_\alpha}\right)^2 \times \tag{33}$$

$$\times \exp\left(-\frac{m_\alpha c^2}{T_\alpha}\frac{kc}{\sqrt{k^2c^2-\omega^2}}\right).$$

Из (33) видно, что в рассматриваемом приближении в плазме, состоящей из электронов и ионов, вкладом ионов в η' и η'' можно пренебречь ($\omega_{Le}^2 \gg \omega_{Li}^2$ при $T_e/T_i \gg m_e/m_i$). Дисперсионное уравнение плазменных волн имеет вид:

$$\frac{k^2c^2-\omega_{Le}^2}{\omega_{Le}^2} = \frac{k^2c^2-\omega^2}{k^2c^2}\cdot 12\left(\frac{T_e}{m_ec^2}\right)^2. \tag{34}$$

Согласно условию (30) правая часть равенства (34) много меньше единицы, следовательно и $(k^2c^2-\omega_{Le}^2)/\omega_{Le}^2 \ll 1$. Если $kc = \omega$, то $\omega = \omega_{Le}$, а если $kc > \omega$, то $\omega > \omega_{Le}$. Таким образом, в ультрарелятивистской одномерной максвелловской плазме существуют продольные волны с частотой $\omega = \omega_{Le}(1+\Delta)$, $0 < \Delta \ll 1$ и $kc > \omega$. Такие волны будут затухать. Инкремент γ^l ($Im\,\omega = \gamma^l$) плазменных волн равен

$$\frac{\gamma^l}{\omega_{Le}} = -6\sqrt{3}\,\pi\,\frac{\omega_{Le}^2}{k^2c^2}\left(\frac{\omega_{Le}}{\sqrt{k^2c^2-\omega^2}}\right)^3\exp\left(-2\sqrt{3}\frac{\omega_{Le}}{\sqrt{k^2c^2-\omega^2}}\right) \ll 1. \tag{35}$$

Если плазма состоит из электронов и позитронов с $T_e = T_p$, то в (34), (35) надо вместо ω_{Le}^2 подставить $\omega_L^2 = 2\omega_{Le}^2$. В области частот ω и k, где выполняется условие $(\sqrt{k^2c^2-\omega^2}/kc)\,T_e/m_ec^2 = T_e/E_e \sim 1$, плазменных волн не существует (волны сильно затухают).

3. *Плазменные волны в одномерной ультрарелятивистской плазме со степенной функцией распределения*. Пусть функция распределения частиц α-сорта имеет вид (3). Рассмотрим плазменные волны, для которых выполняется условие:

$$\lambda_\alpha = \frac{\omega}{\sqrt{|k^2c^2-\omega^2|}}\frac{m_\alpha c}{p_{*\alpha}} \ll 1 \tag{36}$$

при $\gamma_\alpha > 1$, а при $\gamma_\alpha = 1$ пусть

$$\lambda_{1\alpha} = \frac{\omega}{\sqrt{|k^2c^2-\omega^2|}}\,\frac{m_\alpha c}{p_{\max\alpha}} \ll 1. \tag{37}$$

Условия (36), (37) выполняются в довольно широком интервале изменения ω и k, так как $m_\alpha c/p_{*\alpha} \ll 1$ и $m_\alpha c/p_{\max\alpha} \ll 1$. Заметим, что при $kc > \omega$, $\lambda_\alpha = p_{r\alpha}/p_{*\alpha}$, $\lambda_{1\alpha} = p_{r\alpha}/p_{\max\alpha}$, где $p_{r\alpha}$ — импульс частицы, находящейся в резонансе с волной. Воспользовавшись результатами асимптотического разложения интеграла в (5) с функцией распределения (3) по малому параметру λ_α (или по параметру $\lambda_{1\alpha}$ при $\gamma_\alpha = 1$), получим:

$$\delta\eta_\alpha = -\frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2c^2}\cdot 2\cdot\left[-1+\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-c^2k^2/\omega^2}} & \text{при} \quad ck/\omega<1 \\ \dfrac{1}{i\sqrt{c^2k^2/\omega^2-1}} & \text{при} \quad ck/\omega>1 \end{pmatrix}\right], \tag{38}$$

где выражение для $\omega_{p\alpha}$ см. (18) или (20). Если (36) (или (37) при $\gamma_\alpha = 1$) выполняется для всех сортов частиц, то

$$\eta = 1-\frac{\omega_p^2}{k^2c^2}\cdot 2\cdot\left[-1+\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-c^2k^2/\omega^2}} & \text{при} \quad ck/\omega<1 \\ \dfrac{1}{i\sqrt{c^2k^2/\omega^2-1}} & \text{при} \quad ck/\omega>1 \end{pmatrix}\right], \tag{39}$$

где $\omega_p^2 = \sum_\alpha \omega_{p\alpha}^2$. Дисперсионное уравнение $\eta(\omega, k) = 0$ в рассматриваемой области ω, k имеет решение только при $ck < \omega$:

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2} = \frac{1-4V+\sqrt{1+8V}}{2}, \tag{40}$$

где $V = \omega_p^2/\omega^2$. Из (40) видно, что в рассматриваемой плазме возможны незатухающие продольные волны при $0 < V \leqslant 1$, то есть возможны волны с частотой $\omega \geqslant \omega_p$. В приближении $kc/\omega \to 0$ из (40) можно получить дисперсионное уравнение $\omega^2 = \omega_p^2 + (3/4)k^2c^2$, как и следует из (12), (18). Для волн с частотой $\omega \gg \omega_p$ ($V \ll 1$) из (40) следует закон дисперсии

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2} = 1-\frac{1}{2}V^2. \tag{41}$$

Но так как при этом должно выполняться условие (36), то (41) справедливо для частот

$$\frac{\omega_*^4}{\omega^4} \gg 2\max\left\{\frac{m_\alpha^2 c^2}{p_{*\alpha}^2}\right\}. \tag{42}$$

Если плазма состоит из «горячих» (с функцией распределения (3)) электронов и «холодных» ионов, то дисперсионное уравнение плазменных волн будет иметь вид (40), где $V = \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \omega_{Li}^2}$.

Рассмотрим плазменные волны с дисперсионным уравнением (29), и пусть для частиц α-сорта с $\gamma_\alpha > 2$

$$\lambda_\alpha = \frac{\omega}{\sqrt{|k^2c^2 - \omega^2|}}\,\frac{m_\alpha c}{p_{*\alpha}} \gg 1. \tag{43}$$

Для волн с фазовой скоростью $v_\phi < c$ условие (43) означает, что резонансные частицы находятся в хвосте распределения ($p_{r\alpha} \gg p_{*\alpha}$). Вклад частиц α-сорта в ε_l^h будет:

$$\delta\varepsilon_l^h = -\frac{\omega_{l\alpha}^2}{\omega^2}, \tag{44}$$

где, согласно (18), $\omega_{l\alpha}^2 = 2/(\gamma_\alpha - 2)(\ln 2(p_{*\alpha}/m_\alpha c))^{-1}(p_{*\alpha}/m_\alpha c)\,\omega_{L\alpha}^2$. Если (43) выполняется для всех сортов частиц, то

$$\varepsilon_l^h = 1 - \frac{\omega_l^2}{\omega^2}, \qquad \omega_l^2 = \sum_\alpha \omega_{l\alpha}^2. \tag{45}$$

Дисперсионное уравнение плазменных волн: $kc \simeq \omega \simeq \omega_l$. Если $\gamma_\alpha \leqslant 2$, то для того, чтобы было справедливо (45), необходимо, чтобы выполнялось более сильное, чем (43), условие:

$$\lambda_{1\alpha} = \frac{\omega}{\sqrt{|k^2c^2 - \omega^2|}}\cdot\frac{m_\alpha c}{p_{\max\alpha}} \gg 1. \tag{46}$$

Рассмотрим подробнее наиболее интересный случай плазменных волн с $\omega/k < c$. Наиболее простой вид дисперсионного уравнения плазменных волн и выражения для инкремента в области ω и k, где выполняется условие $\lambda_\alpha \gg 1$ получается в случае, когда $\gamma_\alpha > 3$. Если $\gamma_\alpha > 3$, то в приближении $\lambda_\alpha \gg 1$ воспользуемся разложением интеграла в (5) с функцией распределения (3) по параметру λ_α^{-1} ($\lambda_{1\alpha}$ может быть много меньше единицы). В результате разложения получим:

$$\delta\varepsilon_{l\alpha} = -\frac{\omega_{l\alpha}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{l\alpha}^2}{\omega^2}\,\frac{4\gamma_\alpha - 9}{2(\gamma_\alpha - 3)}\,\lambda_\alpha^{-2} + i\pi\gamma_\alpha(\gamma_\alpha - 2)\,\frac{\omega_{l\alpha}^2}{\omega^2}\,\lambda_\alpha^{-\gamma_\alpha+2}. \tag{47}$$

В электронно-ионной плазме в рассматриваемом приближении (43) вкладом ионов в $\delta\gamma_i^*$ и γ_i^* можно пренебречь (если $p_{*e}/p_{*i} \gg (m_e/m_i)^2$). Дисперсионное уравнение плазменных волн будет аналогично (34):

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2} - 1 = \frac{\omega^2 - \omega_{le}^2}{\omega_{le}^2}\,\frac{2(\gamma_e - 3)}{4\gamma_e - 9}\,\frac{m_e^2c^2}{p_{*e}^2}. \tag{48}$$

Так как по условию $\lambda_e \gg 1$, то $(\omega^2 - \omega_{le}^2)/\omega_{le}^2 \ll 1$. Инкремент плазменных волн γ^l с $v_\phi < c$ $(\omega > \omega_{le})$ в рассматриваемой области ω и k (46) равен:

$$\frac{\gamma^l}{\omega_{le}} = -\frac{\gamma_e(\gamma_e - 2)}{2}\left(\frac{2(\gamma_e - 3)}{4\gamma_e - 9}\right)^{\frac{\gamma_e - 2}{2}}\left(\frac{\omega^2 - \omega_{le}^2}{\omega_{le}^2}\right)^{-\frac{\gamma_e - 2}{2}} \ll 1. \tag{49}$$

Если плазма состоит из электронов и позитронов с одинаковыми функциями распределения $\Phi_a(p)$ $(p_{*e} = p_{*p}, \gamma_e = \gamma_p)$, то дисперсионное уравнение и инкремент будут иметь вид (48) и (49), если в эти выражения вместо ω_{le}^2 подставить $\omega_l^2 = 2\omega_{le}^2$.

Если $\gamma_e < 3$, то область ω и k, в которой возможны слабозатухающие волны, должна быть ограничена более сильным, чем при $\gamma_e > 3$, условием: $\lambda_e = \omega/\sqrt{|k^2c^2 - \omega^2|}\cdot(m_ec)/p_{\max e} \lesssim 1$. Можно показать, что в области ω и k, где $\lambda_{1e} \lesssim 1$ при $\gamma \leqslant 3$ плазменных волн не существует (волны сильно затухают). Заметим, что в области, где $\Phi_a(p) \sim p^{-\gamma_a}$ соответствующее распределение по скорости $f(v) \sim$ $\sim\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{\gamma_a - 3}{2}}$, то есть при $\gamma_a < 3$ функция распределения $f(v)$ является возрастающей функцией v.

Приложение 1

Рассмотрим одномерные вдоль оси Z колебания релятивистской плазмы. Плазму будем считать одномерной и стационарной. Столкновениями пренебрегаем. Будем считать, что электрическое поле и скорость частиц a-сорта изменяются во времени по гармоническому закону, то есть $\tilde{v}_{Z_a}, \tilde{E}_Z \sim \exp(-i\omega t)$ и $|\tilde{v}_{Z_a}| \ll c$. Колебания рассмотрим в приближении длинных волн $k \to 0$. Уравнение движения частиц a-сорта

$$m_a \frac{\partial}{\partial t}\frac{v_{T_a} + \tilde{v}_{Z_a}}{\sqrt{1 - \frac{(v_{T_a} + \tilde{v}_{Z_a})^2}{c^2}}} = e_a\tilde{E}_Z, \tag{П.1.1}$$

где e_α — заряд частицы, v_{T_α} — скорость теплового движения частиц. Откуда

$$\frac{m_\alpha \tilde{v}_{z\alpha}}{\left(1-\frac{(v_{T\alpha}+\tilde{v}_{z\alpha})^2}{c^2}\right)^{3/2}} = e_\alpha \tilde{E}_z. \qquad (\text{П.1.2})$$

Так как колебания рассматриваются в линейном приближении ($|\tilde{v}_{z\alpha}| \ll c$), то можно считать, что энергия частиц остается постоянной, $\varepsilon_\alpha = (m_\alpha c^2)/\sqrt{1 - v_{T\alpha}^2/c^2}$. Из (П.1.2) получим выражение для средней скорости частиц α-сорта:

$$\langle \tilde{v}_z \rangle_\alpha = i\,\frac{e_\alpha}{m_\alpha \omega}\left\langle\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^3\right\rangle_\alpha. \qquad (\text{П.1.3})$$

Отсюда плотность тока

$$\tilde{j} = \sum_\alpha e_\alpha N_\alpha \langle \tilde{v}_z \rangle_\alpha = i\sum_\alpha \frac{e_\alpha^2 N_\alpha}{m_\alpha \omega}\left\langle\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^3\right\rangle_\alpha \tilde{E}_z, \qquad (\text{П.1.4})$$

т. е. проводимость

$$\sigma = i\sum_\alpha \frac{e_\alpha^2 N_\alpha}{m_\alpha \omega}\left\langle\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^3\right\rangle_\alpha, \qquad (\text{П.1.5})$$

откуда

$$\eta = 1 + i\,\frac{4\pi}{\omega}\,\sigma = 1 - \sum_\alpha \frac{4\pi N_\alpha e_\alpha^2}{m_\alpha \omega^2}\left\langle\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^3\right\rangle_\alpha. \qquad (\text{П.1.6})$$

Если записать по аналогии с холодной плазмой $\eta = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, то получим следующее выражение для плазменной частоты:

$$\omega_p^2 = \sum_\alpha \omega_{L\alpha}^2 \left\langle\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^3\right\rangle_\alpha, \qquad (\text{П.1.7})$$

где $\omega_{L\alpha}$ — ленгмюровская частота.

Приложение 2

Произведем асимптотическое разложение интеграла

$$I(\Delta, z) = \oint_1^\infty \frac{t\sqrt{t^2-1}}{1 \pm \Delta^2 t^2}\exp(-Zt)\,dt \qquad (\text{П.2.1})$$

по параметру $Z \gg 1$. Рассмотрим случай, когда в (П.2.1) берется верхний знак ($\omega > kc$ в (25)). Представим $I(\Delta, Z)$ в следующем виде:

$$
\left.
\begin{aligned}
&I(\Delta, Z) = I_1(\Delta, Z) + I_2(\Delta, Z),\\
&I_1(\Delta, Z) = \exp(-Z)\int_0^{\delta} \frac{t\sqrt{t^2+2t}}{1+\Delta^2 t^2}\exp(-Zt)\,dt\\
&I_2(\Delta, Z) = \exp(-Z)\int_{\delta}^{\infty} \frac{t\sqrt{t^2+2t}}{1+\Delta^2 t^2}\exp(-Zt)\,dt.
\end{aligned}
\right| \qquad (\text{П}.2.2)
$$

Для разложения интегралов $I_1(\Delta, Z)$, $I_2(\Delta, Z)$ в асимптотические ряды по Z воспользуемся методом последовательного разложения [7]. В результате получим:

$$
\begin{aligned}
&I_1(Z) = \exp(-Z)\frac{Z^{-1}}{\Delta^2} + O(1),\\
&I_2(Z) = \exp(-Z)\frac{\ln Z^{-1}}{\Delta^2} + O(1).
\end{aligned} \qquad (\text{П}.2.3)
$$

Таким образом,

$$
I = \frac{Z^{-1}\exp(-Z)}{\Delta^2} + O(\ln Z^{-1}). \qquad (\text{П}.2.4)
$$

Разложение (П.2.3), (П.2.4) равномерно применимо, т. е. отброшенная часть ряда (остаток) есть о малое от оставленных членов ряда, если $Z^{-1}\Delta \gg 1$.

Если $Z^{-1}\Delta \ll 1$, то интеграл (П.2.1) можно представить как

$$
I = \int_1^{\delta} t\sqrt{t^2-1}\,(1 \mp \Delta^2 t^2)\exp(-Zt)\,dt +
$$

$$
+ \oint_{\delta}^{\infty} \frac{t\sqrt{t^2-1}}{1 \pm \Delta^2 t^2}\exp(-Zt)\,dt, \qquad (\text{П}.2.5)
$$

где $1 > \delta\Delta \gg \Delta Z^{-1}$.

Тогда

$$
I = \int_1^{\delta} t\sqrt{t^2-1}\,(1 \mp \Delta^2 t^2)\exp(-Zt)\,dt \simeq
$$

$$
\simeq \int_1^{\infty} t\sqrt{t^2-1}\,(1 \mp \Delta^2 t^2)\exp(-Zt)\,dt = \qquad (\text{П}.2.6)
$$

$$
= \frac{2}{\sqrt{\pi}} Z^{-1}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)K_2(Z) \mp \Delta^2\frac{4}{\sqrt{\pi}}Z^{-2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)K_3(Z),
$$

$K_n(x)$ — функция МакДональда, $K_n(Z) \simeq 1/2(n-1)!\,(2Z^{-1})^n$ при $Z \ll 1$. Отсюда

$$I \simeq 2Z^{-3} + 24\Delta^2 Z^{-5}. \qquad (\text{П}.2.7)$$

Институт космических
исследований АН СССР

THE PLASMA WAVES IN A RELATIVISTIC STRONGLY ANISOTROPIC PLASMA, PROPAGATING ALONG THE MAGNETIC FIELD

O. G. ONISHCHENKO

The dispersive properties of the plasma waves in a relativistic plasma with a one-dimensional distribution function, propagating along the strong magnetic field are investigated. It is shown that undamped plasma waves exist in the frequency band $\omega_* \leqslant \omega \leqslant \omega_l$. It is shown that weakly damped waves with a phase velocity $v_\phi < c$ and a frequency $\omega \simeq \omega_l(1 + \Delta)$, $0 < \Delta \ll 1$ -exist in a plasma with one-dimensional ultra-relativistic Maxwellian distribution or power one.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. А. Каплан, В. Н. Цытович*. Плазменная астрофизика. Наука. М., 1972.
2. *С. А. Каплан, В. Н. Цытович*. Астрофизика, 8, 441, 1972
3. *Е. В. Суворов, Ю. В. Чугунов*. Астрофизика, 11, 305, 1975
4. *О. Г. Онищенко*. Астрон. ж., 52, 278, 1975.
5. *Е. В. Суворов, Ю. В. Чугунов*. Astrophys. Space Sci., 23, 189, 1973.
6. *И. С. Шкловский*. Ap. J. Lett., 159, 177, 1970
7. *Э. Я. Рискстыньш*. Асимптотические разложения интегралов, т. 1, Изд. «Зинатне», Рига, 1974.