

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 15

МАЙ, 1979

ВЫПУСК 2

УДК 523.035.2

РАСЧЕТ СПЕКТРА ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ. I. ПОЛУБЕСКОНЕЧНАЯ СРЕДА

Д. И. НАГИРНЕР

Поступила 15 декабря 1978

Исследуется спектр интегрального уравнения с ядром, зависящим от модуля разности аргументов и представимым в виде суперпозиции экспонент. Для случая полубесконечного промежутка интегрирования изучено поведение H -функции в окрестности непрерывного спектра. Получены явные выражения для резольвентной функции, H -функции и собственных функций и их асимптотики.

1. Введение. Как известно, многие задачи теории переноса излучения, а также нейтронов приводят к интегральным уравнениям с ядрами, зависящими от модуля разности аргументов [1—5].

$$S(z) = S_0(z) + \frac{\lambda}{2} \int_0^z K(|z-z'|) S(z') dz'. \quad (1)$$

Здесь $S_0(z)$ — известная, а $S(z)$ — неизвестная функции, λ и z_0 — положительные числа. Ядерная функция $K(z)$ в большинстве случаев представляется в виде суперпозиции экспонент:

$$K(z) = \int_a^b A(y) e^{-yz} dy, \quad (2)$$

где $0 \leq a < b \leq +\infty$, а $A(y) \geq 0$ и удовлетворяет на $[a, b]$ условию Гельдера [6]. Такие уравнения встречаются и в других разделах физики (береговая рефракция электромагнитных волн, течение разреженного газа, распространение аксионов и др.). Исследованию их посвящено много работ математиков, физиков и астрофизиков (см., например, [1—7]).

Большой интерес представляет расчет собственных чисел (с. ч.) λ и собственных функций (с. ф.) уравнения (1), то есть решение соответствующего однородного уравнения. В первой части настоящей работы при предположении (2) находятся в явном виде с. ф. (непрерывного спектра) уравнения

$$S(z) = S_0(z) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|z-z'|) S(z') dz', \quad (3)$$

соответствующего рассеянию в полубесконечной среде, а также асимптотики с. ф. Во второй (основной) части предлагается итерационный процесс расчета с. ф. и с. ч. (дискретных) уравнения (1) при конечных оптических толщинах среды z_0 . Изучено также поведение с. ч. и с. ф. при $z_0 \rightarrow \infty$.

Эти результаты можно непосредственно применять в теории нестационарного переноса излучения и при численном решении неоднородного уравнения (1). Они могут быть использованы также в теории вероятностных процессов [8].

Заметим, что некоторые из полученных результатов верны и без предположения (2). Однако для большинства из них предположение (2) существенно. Оно позволяет довести формулы до удобного для расчетов вида. Введем принятые в теории переноса резонансного излучения обозначения:

$$\bar{K}(p) = \int_a^b A(y) \frac{dy}{y+p}, \quad U(p) = \frac{1}{2} [\bar{K}(p) + \bar{K}(-p)], \quad V(u) = U(iu). \quad (4)$$

Функция $\bar{K}(p)$ — обычное, а $2U(p)$ — двустороннее преобразование Лапласа, $V(u)$ — косинус-преобразование Фурье от $K(z)$. При наших предположениях относительно $A(y)$ функция $V(u)$ непрерывна и монотонно убывает от $V(0)$ до $V(\infty) = 0$. Будем считать, что $\bar{K}(0) = V(0) = U(0) < 1$. Преобразование Лапласа $\bar{K}(p)$ как интеграл типа Коши является регулярной функцией на комплексной плоскости за исключением линии ветвления $[-b, -a]$ на вещественной оси, вблизи которой ее поведение описывается формулами Сохоцкого — Племеля [6]. Для функции U эти формулы записываются в виде

$$U(y \pm i0) = U(y) \pm i\pi A(y)/2, \quad (5)$$

где $|y| \in [a, b]$, входящий в $U(y)$ интеграл $\bar{K}(-|y|)$ понимается в смысле главного значения по Коши, $A(-y) = -A(y)$. Именно указанные свойства преобразований ядерной функции $K(z)$ и дают возможность сильно упростить теорию.

Решения однородного уравнения, соответствующего (3), мы найдем после того, как исследуем две основные функции, через которые выражаются решения неоднородного уравнения, на спектре. Начнем же с изложения тех из относящихся к уравнению (3) известных результатов при $\lambda \leq 1$, которые понадобятся нам в дальнейшем.

2. *Резольвента уравнения (3) и H-функция при $\lambda \leq 1$.* Резольвента $\Gamma(\tau, \tau_1, \lambda)$ уравнения (3), то есть решение (3) при $S_0(\tau) = -iK(|\tau - \tau_1|/2)$, выражается через резольвентную функцию $\Phi(\tau, \lambda) = \Gamma(\tau, 0, \lambda)$ [3, 5]:

$$\Gamma(\tau, \tau_1, \lambda) = \Phi(|\tau - \tau_1|, \lambda) + \int_0^{\min|\tau, \tau_1|} \Phi(\tau - t, \lambda) \Phi(\tau_1 - t, \lambda) dt. \quad (6)$$

Резольвентная функция определяется уравнением того же вида

$$\Phi(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{2} K(\tau) + \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty K(|\tau - \tau'|) \Phi(\tau', \lambda) d\tau'. \quad (7)$$

Преобразование Лапласа от $\Phi(\tau, \lambda)$ называется *H-функцией*

$$H(1/p, \lambda) = 1 + \bar{\Phi}(p, \lambda) = 1 + \int_0^\infty e^{-p\tau} \Phi(\tau, \lambda) d\tau. \quad (8)$$

Непосредственно применяя к (7) преобразование Лапласа и учитывая (2), либо комбинируя линейное и нелинейное уравнения для *H-функции* [9, 10, 5], можно получить соотношение

$$H(1/p, \lambda) H(-1/p, \lambda) [1 - \lambda U(p)] = 1. \quad (9)$$

Из него путем применения формулы Коши для регулярной в правой полуплоскости функции $\ln H(1/p, \lambda)$ выводится формула, выражающая *H-функцию* через $V(u)$ при $\operatorname{Re} p > 0$ [5]:

$$\ln H\left(\frac{1}{p}, \lambda\right) = -\frac{p}{\pi} \int_0^\infty \ln [1 - \lambda V(u')] \frac{du'}{u'^2 + p^2}. \quad (10)$$

При помощи формул (8) и (9), обращая преобразование Лапласа, можно получить выражение для $\Phi(\tau, \lambda)$ [11, 5], которое мы не приводим, так как оно в дальнейшем не используется.

Отметим, что решению $D(z, p, i)$ уравнения (3) со свободным членом $S_0(z) = \exp[-pz]$, как легко показать, исходя из (6), просто выражается через $\Phi(z, i)$ [3, 5]:

$$D(z, p, i) = H(1/p, i) \left\{ e^{-pz} + \int_0^z e^{-p(z-t)} \Phi(t, i) dt \right\}. \quad (11)$$

Теперь перейдем к изучению функций H и Φ при i , принадлежащих спектру уравнения (3).

3. H -функция на спектре. Она уже изучалась в работах [12, 13]. Здесь мы кратко повторим результаты [12] и получим новые.

Исходя из формулы (10), продолжим H -функцию на все комплексные i . Легко показать [12], что полученная аналитическая функция регулярна при всех i , кроме i из промежутка $[1/V(0), \infty)$, где H -функция имеет линию ветвления. Этот промежуток значений i и представляет спектр уравнения (3). Ниже, если не оговорено противное, через i мы будем обозначать значения из указанного промежутка.

Положим $i = 1/V(u)$. Так как функция $V(u)$ непрерывна и строго монотонна, то между i и $u > 0$ имеется взаимнооднозначное соответствие. Изучим поведение H -функции в окрестности линии ветвления, то есть при $i \pm i0$. Во входящем в (10) выражении $1 - (i \pm i0)V(u') = 1 - V(u')/V(u) \pm i0$ вещественная часть положительна при $u' > u$ и отрицательна при $u' < u$. Во втором случае логарифм ветвится. Учитывая это, находим

$$\begin{aligned} \ln H\left(\frac{1}{p}, i \pm i0\right) = & -\frac{p}{\pi} \left| \mp i\pi \int_0^u \frac{du'}{u'^2 + p^2} + \right. \\ & \left. + \int_0^\infty \ln|1 - iV(u')| \frac{du'}{u'^2 + p^2} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда получаем основную формулу [12]

$$H(1/p, i \pm i0) = H(1/p, i) (1 \pm iu/p), \quad (13)$$

$$H\left(\frac{1}{p}, i\right) = \frac{p}{V(u^2 + p^2)} \exp \left\{ -\frac{p}{\pi} \int_0^\infty \ln|1 - iV(u')| \frac{du'}{u'^2 + p^2} \right\}. \quad (14)$$

Для H -функции на спектре $H(1/p, i)$ справедливо соотношение, следующее из (9) с учетом (13):

$$H\left(\frac{1}{p}, i\right) H\left(-\frac{1}{p}, i\right) \frac{u^2 + p^2}{p^2} [1 - iU(p)] = 1. \quad (15)$$

При помощи этого соотношения, рассуждая точно так же, как при выводе (10) из (9), получим другое выражение для $H(1/p, i)$:

$$\begin{aligned} H\left(\frac{1}{p}, i\right) &= \frac{p^2}{u^2 + p^2} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \ln \left[\frac{1 - \lambda U(p')}{u^2 + p'^2} p'^2 \right] \frac{dp'}{p' - p} \right\} = \\ &= \frac{p^2}{u^2 + p^2} \exp \left\{ -\frac{p}{\pi} \int_0^\infty \ln \left[\frac{1 - \lambda V(u')}{u'^2 - u^2} u'^2 \right] \frac{du'}{u'^2 + p^2} \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Это выражение, конечно, тождественно равно (14), в чем нетрудно убедиться непосредственно, однако в некоторых случаях оно оказывается более удобным, так как логарифм под интегралом в (16) в отличие от (14) является непрерывной функцией. В частности, из (16), пользуясь формулами Сохоцкого, легко получить, что при $p - iu_0 \rightarrow 0$ оно переходит в

$$\begin{aligned} H\left(\frac{1}{iu_0}, i\right) &= \frac{iu_0}{u^2 - u_0^2} \sqrt{\frac{u_0^4 - u^2}{1 - \lambda V(u_0)}} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{iu_0}{\pi} \int_0^\infty \ln \frac{u'^2 - u^2}{1 - \lambda V(u')} \frac{du'}{u'^2 - u_0^2} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь для интеграла в показателе экспоненты берется главное значение по Коши. Интеграл, соответствующий множителю u^2 под знаком логарифма в (16), вычислен.

Из (16) или из (17) следует, что у функции $H(1/p, 1/V(u))$ имеется два полюса $\pm iu$. В то же время функции $H(1/p, 1/V(u) \pm i0)$ имеют только по одному полюсу, соответственно $\pm iu$, что видно из равенства (13). Чтобы найти вычеты в полюсах, нам наряду с (17) понадобится еще одно представление функции $H(1/p, \lambda)$.

Для его вывода в первом интеграле в (16) контур интегрирования — минимую ось — преобразуем в контур, обходящий линию ветвления подынтегральной функции, то есть отрезок вещественной оси $[-b, -a]$, где ветвится функция $U(p')$, и отрезок $[-a, 0]$, где ветвится $\ln p'^2$. В результате получим выражение для $H(1/p, i)$, верное при любых p , не принадлежащих $[-b, -a]$:

$$\ln H\left(\frac{1}{p}, i\right) = p \frac{p+a}{u^2 + p^2} \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_a^b \arccotg \frac{V(u) - U(y)}{A(y)/2} \frac{dy}{y + p} \right\}. \quad (18)$$

Здесь взята функция arctg , так как на промежутке $[a, b]$ разность $V(u) - U(y)$ может обратиться в нуль, а подынтегральная функция в (18) должна быть непрерывной.

Теперь из (17) и (18) для вычетов H -функции получим

$$\operatorname{res}_{p=0} H\left(\frac{1}{p}, \lambda\right) = \frac{C_0}{2} e^{\pm i u \pi}, \quad (19)$$

где введено два обозначения

$$C_0 = |-2uV(u); V'(u)|^{1/2}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \tau_+(u) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln \frac{u^2 - u'^2}{V(u') - V(u)} \frac{du'}{u'^2 - u^2} = \\ &= \frac{1}{u} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} - \frac{1}{\pi} \int_a^b \operatorname{arctg} \frac{V(u) - U(y)}{\pi A(y)/2} \frac{dy}{y^2 + u^2} \end{aligned} \quad (21)$$

Ряд уравнений и соотношений, которым удовлетворяет H -функция, выведен в работе [12]. Здесь мы получим еще одно. Если применить формулу Коши для $\operatorname{Re} p > 0$ к функции $(p^2 + u^2) H(1/p, \lambda)/p^2 - 1$ с контуром интегрирования — мнимой осью с обходом точки 0 справа, затем воспользоваться формулой (15) и преобразовать контур интегрирования к линии ветвления функции $U(p)$ — отрезку $[-b, -a]$, взяв вычет при $p = 0$, то в результате получится

$$\int_a^b \frac{R(y, \lambda)}{H(1/y, \lambda)} \frac{dy}{y + p} = \frac{p^2 + u^2}{p^2} H\left(\frac{1}{p}, \lambda\right) - 1 - \frac{1}{\lambda V(0) - 1} \frac{u}{p} \quad (22)$$

где

$$R(y, \lambda) = \frac{i}{2} \frac{A(y)}{[1 - \lambda U(y)]^2 - \lambda^2 \pi^2 A^2(y)/4}. \quad (23)$$

4. *Резольвента и собственные функции.* Аналитическое продолжение на все комплексные λ можно распространить и на все остальные функции и соотношения раздела 2. Нас по-прежнему будут интересовать лишь λ из спектра. Для резольвентной функции при λ , принадлежащих спектру, явное выражение получается точно тем же способом, что и при лежащих между 0 и 1. Учитывая (5), (15) и (19), находим

$$\Phi(\tau, \lambda) = C_0 \cos u(\tau + \tau_0) + \int_0^{\lambda} \frac{R(y, \lambda)}{H(1/y, \lambda)} e^{-y\tau} \frac{y^2}{y^2 + u^2} dy. \quad (24)$$

Теперь обратимся к однородному уравнению

$$S(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) S(\tau', \lambda) d\tau'. \quad (25)$$

Оно может иметь решения при различных λ . Например, при $0 < \lambda < 1$ решение уравнения (25) составляет задачу Милна. Для многих ядерных функций решение задачи Милна существует. Однако $S(\tau, \lambda)$ будут с. ф. уравнения (3) лишь при $\lambda \in [1/V(0), \infty)$, так как только в этом случае $S(\tau, \lambda)$ ограничены. Уравнение (25) имеет решения и при λ , близких к спектральным.

Повторим рассуждения, которые применяются при решении задачи Милна [10, 14]. Дифференцируя (25) по τ , получим соотношение

$$S'(\tau, \lambda \pm i0) = S(0, \lambda \pm i0) \Phi(\tau, \lambda \pm i0) + k S(\tau, \lambda \pm i0), \quad (26)$$

где k — постоянная. Из (26) выразим $S(\tau, \lambda \pm i0)$ через резольвентную функцию

$$S(\tau, \lambda \pm i0) = S(0, \lambda \pm i0) e^{k\tau} \left[1 + \int_0^{\tau} e^{-k\tau'} \Phi(\tau', \lambda \pm i0) d\tau' \right]. \quad (27)$$

Отсюда видно, что функция $S(\tau, \lambda \pm i0)/S(0, \lambda \pm i0)$ совпадает с $D(\tau, p, \lambda \pm i0)/H(1/p, \lambda \pm i0)$, где функция D дается формулой (11), при $p = -k$. Иначе говоря, $S(\tau, \lambda \pm i0)/S(0, \lambda \pm i0)$ является решением уравнения (3) при $S_0(\tau) = e^{k\tau}/H(-1/k, \lambda \pm i0)$. Чтобы эта величина равнялась нулю, а S было бы решением (25), необходимо, чтобы $-k$ было полюсом $H(1/p, \lambda \pm i0)$, то есть $k = \pm iu$ соответственно.

Перейдем в (26) к преобразованиям Лапласа. Тогда получим

$$\frac{\bar{S}(p, \lambda \pm i0)}{\bar{S}(0, \lambda \pm i0)} = \frac{H(1/p, \lambda \pm i0)}{p \pm iu}. \quad (28)$$

Из (28) и (13) следует, что функция $S(\tau, \lambda)$ не меняется при переходе через линию ветвления $H(1/p, \lambda)$, иначе говоря, при λ из спектра $S(\tau, \lambda \pm i0) = S(\tau, \lambda)$. Таким образом, (28) можно переписать:

$$S(p, \lambda)/S(0, \lambda) = H(1/p, \lambda)/p. \quad (29)$$

Формулу (26) тоже можно записать в другом виде:

$$\Phi(\tau, \lambda \pm i0) = \Phi(\tau, \lambda) \pm iuS(\tau, \lambda)/S(0, \lambda), \quad (30)$$

причем

$$\Phi(\tau, \lambda) = S'(\tau, \lambda)/S(0, \lambda). \quad (31)$$

Обращая преобразование Лапласа (29), или при помощи соотношения (31) легко находим явное выражение для с. ф.

$$S(\tau, \lambda)/S(0, \lambda) = C_0 \sin u(\tau + \tau_0)/u - \int_0^{\lambda} \frac{R(y, \lambda)}{H(1/y, \lambda)} e^{-y\tau} \frac{y}{y^2 + u^2} dy. \quad (32)$$

Величина $S(0, \lambda)$ определяется из условия нормировки. Для с. ф. непрерывного спектра ее можно выбрать в виде нормировки на δ -функцию:

$$\int_0^{\infty} S(\tau, 1/V(u)) S(\tau, 1/V(u')) d\tau = \pi \delta(u - u')/2. \quad (33)$$

Подставив сюда формулу (32) и учитывая только несуммируемое с квадратом внеинтегральное слагаемое, что является законным, найдем

$$S(0, \lambda) = u C_0. \quad (34)$$

При выбранной нормировке просто записываются билинейные формулы типа Гильберта—Шмидта. Например, для резольвенты уравнения (3) справедливо разложение

$$\Gamma(\tau, \tau_1, \lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda V(u) du}{1 - \lambda^2 V(u)} S(\tau, 1/V(u)) S(\tau_1, 1/V(u)). \quad (35)$$

Здесь λ — любое комплексное число. Формула (35) согласуется с (30).

Заметим, что величина τ_0 , входящая в наши формулы, является обобщением экстраполированной длины, вводившейся для монохроматического рассеяния (см., например, [15, 16]), и имеет тот же смысл: внеинтегральное слагаемое (см. (32)) решения однородного уравнения (25) обращается в нуль при $\tau = -\tau_0$. Наша экстраполированная длина введена при λ из спектра для любого ядра вида (2), в частности, для резонансного рассеяния. Для монохроматического рассеяния выражение для τ_0 вводилось и при $\lambda > 1$, то есть на спектре [15], но оно получалось из формулы для $\lambda < 1$, которой в общем случае написать нельзя. В самом деле, возможность ввести экстраполированную длину связана с наличием у H -функции полюса или, что то же самое, изолированных нулей у характеристической

функции $1 - U(p)$. При $\lambda < 1$ эта функция может не обращаться в нуль, как, например, в случае рассеяния с полным перераспределением по частоте в линии [5, 11]. Если же λ из промежутка $[1/V(u), \infty)$, то корни u характеристической функции всегда есть и равны $\pm iu$. Поэтому нам пришлось выводить наши формулы непосредственно для значений λ из спектра.

В заключение этого пункта получим некоторые дополнительные соотношения для H -функции. Найдя преобразования Лапласа от функций $\Phi(\cdot, \lambda)$ и $S(\cdot, \lambda)/S(0, \lambda)$ и приравняв их согласно формулам (8) и (29), получим

$$\int_0^\infty \frac{R(y, \lambda)}{H(1/y, \lambda)} \frac{y^2}{y^2 + u^2} \frac{dy}{y + p} = C_0 \frac{u \sin u\tau_e - p \cos u\tau_e}{p^2 + u^2} + H\left(\frac{1}{p}, \lambda\right) - 1, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{R(y, \lambda)}{H(1/y, \lambda)} \frac{y}{y^2 + u^2} \frac{dy}{y + p} = \\ & = \frac{C_0}{u} \frac{u \cos u\tau_e + p \sin u\tau_e}{p^2 + u^2} - \frac{1}{p} H\left(\frac{1}{p}, \lambda\right). \end{aligned} \quad (37)$$

Эти соотношения, конечно, можно было бы вывести и тем способом, каким было получено равенство (22). Соотношения (22), (36) и (37) можно использовать, например, для контроля вычислений H -функции.

Получим теперь некоторые асимптотики наших функций.

5. *Асимптотические формулы.* В этом пункте будем считать, что $V(0) = 1$ (это не является ограничением общности) и что при $u \rightarrow +0$

$$1 - V(u) \sim V_0(u) u^{2\tau}, \quad (38)$$

где $0 < \tau < 1$, а $V_0(u)$ — постоянная или медленно меняющаяся функция [5]. Последнее означает, что при любом $t > 0$

$$\lim_{u \rightarrow +0} \frac{V_n(u^t)}{V_n(u)} = 1. \quad (39)$$

Формула (38) равносильна тому, что ядро $K^*(z)$ представляется в виде (2) с $a = 0$ и $b = \infty$, причем при $y \rightarrow +0$

$$A(y) \sim 2V_0(y) \sin \pi\tau y^{2\tau/\pi}, \quad (40)$$

$$1 - U(y) \sim V_0(y) \cos \pi\tau y^{2\tau/\pi}. \quad (41)$$

Асимптотики $K^*(z)$ и других связанных с ядром функций имеются в [5].

В [12] была получена асимптотика функции $H(1/y, \lambda)$ при $y \rightarrow +0$. Если $y \ll 1$, основной вклад в интеграл в (14) дают малые u . Пользуясь (38), находим при $y \ll 1$

$$H\left(\frac{1}{y}, \lambda\right) \sim \frac{y}{V y^2 + u^2} \frac{1}{V \lambda - 1} h_1\left(y \left(\frac{V_0}{\lambda - 1}\right)^{1/2}\right), \quad (42)$$

где

$$h_1(t) = \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln |1 - (tu)^{2\tau}| \frac{du}{1 + u^2} \right\}. \quad (43)$$

Если $\lambda \rightarrow 1 + 0$, то есть $u \rightarrow +0$, то аргумент y функции h_1 в (42) переходит в y/u . Заметим, что функция $h_1(t)$ обладает свойством $h_1(1/t) = t^{\lambda} h_1(t)$. В [12] асимптотика H -функции была выражена через функцию $h_1(q, 0) = h_1((-q)^{1/2})$ при $q < 0$.

Асимптотики $\Phi(\tau, \lambda)$ и $S(\tau, \lambda)$ при $\tau \rightarrow \infty$ получаются соответственно из (24) и (32), если туда подставить асимптотики $A(y)$, $U(y)$ и $H(1/y, \lambda)$, то есть формулы (40), (41) и (42). Если λ не очень близко к 1, то главную роль играют внеинтегральные члены в (24) и (32). При $u \rightarrow +0$, как легко увидеть из (20) и (21),

$$C_0 \sim u^{1-\lambda} / V \tau V_0(u), \quad \tau_0(u) \sim \pi(1-\tau)/4u. \quad (44)$$

Аналогично из (23) получаем при $u \rightarrow +0$

$$R(ut, 1 + V_0 u^{2\tau}) \sim f(t) V \sqrt{1 + t^2 / V_0 u^{2\tau}}, \quad (45)$$

где

$$f(t) = \frac{\sin \pi \tau}{\pi} \frac{t^{2\tau}}{V \sqrt{1 + t^2} (1 + t^{4\tau} - 2 \cos \pi \tau t^{2\tau})}. \quad (46)$$

Пользуясь этими формулами, можно найти асимптотики $\Phi(\tau, \lambda)$ и $S(\tau, \lambda)$ при $\tau \rightarrow \infty$ и $\lambda \rightarrow 1 + 0$. Заметим, что при $\lambda = 1$ внеинтегральные члены обращаются в нуль и $\Phi(\tau, \lambda)$ и $S(\tau, \lambda)$ переходят в $\Phi(\tau, 1)$ и $S(\tau, 1)$ [5].

Из соотношений для H -функции (22), (36) и (37) с помощью формул этого пункта могут быть получены соотношения для асимптотической функции $h_1(t)$. Переходя к пределу $u \rightarrow +0$ при $p/u = t = \text{const}$, получим (через l обозначено $\pi(1-\tau)/4$)

$$\int_0^\infty \frac{f(t')}{h_1(t)} \frac{1+t'^2}{t'} \frac{dt'}{t'+t} = \frac{V \sqrt{1+t^2}}{t} h_1(t) - \frac{1}{t}. \quad (47)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t')}{h_1(t')t' + t} dt' = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} h_1(t) - \frac{1}{\sqrt{1}} \frac{t \cos l - \sin l}{1+t^2}, \quad (48)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t')}{h_1(t')t' + t} dt' = \frac{1}{\sqrt{1}} \frac{\cos l + t \sin l}{1+t^2} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} h_2(t). \quad (49)$$

Функция $H(1/p, t)$, величины C_n , τ_0 и другие, а также их асимптотики будут использованы нами во второй части работы при исследовании спектра уравнения (1) при $\tau_0 < \infty$.

Ленинградский государственный
университет

THE CALCULATION OF THE SPECTRUM OF THE INTEGRAL EQUATION OF RADIATIVE TRANSFER. I. SEMIINFINITE MEDIUM

D. I. NAGIRNER

The spectrum of the integral equation with symmetrical displacement kernel is investigated. The kernel is supposed to be a superposition of exponentials. For the case of semiinfinite range of integration the behaviour of H -function in the vicinity of continuous spectrum is studied. The explicit expressions for the resolvent function, H -function and eigenfunctions are obtained. The asymptotic behaviour of these functions is studied.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Амбарцумян, Научные труды, т. 1, Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1960.
2. С. Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
3. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ПИТГЛ, М., 1956.
4. Б. Дэвисон, Теория переноса нейтронов, Атомиздат, М., 1960.
5. В. В. Иванов, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
6. Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский, Уравнения типа свертки, Наука, М., 1978.
7. М. Г. Крейн, УМН, 13, № 5, 3, 1958.
8. H. Widom, Trans. Amer. Math. Soc., 98, 430, 1961.
9. В. В. Соболев, Изв. АН Арм. ССР, сер. ф.-м. наук, 11, 39, 1958.

10. В. В. Соболев, Астрон. ж., 36, 564, 1959.
11. Д. И. Нагирнер, Астрон. ж., 41, 669, 1964.
12. Д. И. Нагирнер, Астрофизика, 5, 31, 1969.
13. Ю. Ю. Абрамов, А. П. Напартович, Астрофизика, 4, 195, 1968.
14. Д. И. Нагирнер, Уч. зап. ЛГУ, № 337 (Труды Астрон. обс. ЛГУ, 25), 3, 1968.
15. K. M. Case, F. de Hoffman, G. Placzek, Introduction to the Theory of Neutron Diffusion, US Government Printing Office, 1953.
16. К. Кенз, П. Цвайфель, Линейная теория переноса, Мир, М., 1972.