АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 14 АВГУСТ, 1978 ВЫПУСК 3

УДК 523.035

# ДИФФУЗНОЕ ОТРАЖЕНИЕ СВЕТА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ИНДИКАТРИСЕ РАССЕЯНИЯ

А. Г. НИКОГОСЯН, Г. А. АРУТЮНЯН

Поступила 25 апреля 1977
Пересмотрена 17 июля 1978

Использованием асимптотического поведения функций Амбарцумяна $\varphi_n^m(\eta)$ при больших значениях индексов предлагается облегченный метод решения задачи о диффузном отражении света от полубесконечной среды при произвольной индикатрисе рассеяния. Отдельно рассмотрен случай индикатрисы Хеньи—Гринстейна. В частности, исследован вопрос о зависимости компонентов разложения коэффициента отражения по косинусам углов, кратных азимуту, от номера гармоники $m$. Приводятся результаты численных расчетов.

*Введение*. В работах авторов [1, 2], посвященных задачам теории переноса излучения в общем случае некогерентного рассеяния, были разработаны новые облегченные методы решения, основанные на рассмотрении обобщенных функциональных уравнений Амбарцумяна. Существующее, в известном смысле, сходство между теорией некогерентного рассеяния при общем законе перераспределения по частотам и теорией анизотропного рассеяния с произвольной индикатрисой позволяет легко перенести используемые в одной из них методы решения и некоторые другие результаты в другую. Отправным пунктом исследований, проведенных в вышеуказанных работах, служил предложенный ранее (см., например, [3]) общий подход, основанный на представлении закона перераспределения по частотам в виде билинейного разложения по системе его собственных функций. Нетрудно убедиться, что здесь такому разложению соответствует обычное в теории анизотропного рассеяния разложение индикатрисы $x(\gamma)$ в ряд по полиномам Лежандра или, что то же самое, в ряд по косинусам углов, кратных азимуту, если привлечь теорему сложения сферических функций. Таким образом, зональные и тессеральные сферические функции $P_n^m(\eta)\cos m\varphi$ являются собственными функциями для произвольной индикатрисы рассеяния. Очевидно также, что присоединенные функции Лежандра являются собственными функциями соответствующих гармоник индикатрисы в ее разложении по косинусам углов, кратных азимуту.

В настоящей работе рассмотрена задача о диффузном отражении света от полубесконечной среды при произвольной индикатрисе рассеяния, для решения которой предложен метод, основанный на результатах, полученных авторами в теории некогерентного рассеяния. В частности, дано аналитическое исследование вопроса о зависимости компонентов коэффициента отражения от номера гармоник. В заключение приведены результаты численных расчетов, относящихся к конкретному случаю индикатрисы Хеньи—Гринстейна.

1. *Задача о диффузном отражении от полубесконечной среды.* Пусть однородная полубесконечная среда освещена параллельными лучами, создающими освещенность перпендикулярной к ним площадки, равную $\pi S$. Обозначим через $\zeta$ и $\eta$ косинусы углов падения и отражения, отсчитываемых от направления нормали к поверхности среды.

Как известно, интенсивность излучения, диффузно отраженного от среды, выражается через коэффициент отражения $\rho(\eta, \zeta, \varphi)$ следующим образом:

$$I(\eta, \zeta, \varphi) = S\rho(\eta, \zeta, \varphi)\zeta, \tag{1}$$

где азимут $\varphi$ отсчитывается от плоскости, содержащей направление падающего луча и нормаль к поверхности среды.

Разложим индикатрису рассеяния в ряд по полиномам Лежандра

$$x(\gamma) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P_i(\cos\gamma), \tag{2}$$

где $\gamma$ — угол, заключенный между направлениями падающего и рассеянного квантов:

$$\cos\gamma = \eta\zeta + \sqrt{(1-\eta^2)(1-\zeta^2)}\cos\varphi. \tag{3}$$

Воспользовавшись теоремой сложения сферических функций

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\eta)P_n(\zeta) + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\eta)P_n^m(\zeta)\cos m\varphi, \tag{4}$$

для $x(\gamma)$ будем иметь

$$x(\gamma) = p^0(\eta, \zeta) + 2\sum_{m=1}^{\infty} p^m(\eta, \zeta)\cos m\varphi, \tag{5}$$

где

$$p^m(\eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\gamma)\cos m\varphi d\varphi = \sum_{n=m}^{\infty} c_n^m P_n^m(\eta) P_n^m(\zeta), \tag{6}$$

и

$$c_n^m = x_n \frac{(n-m)!}{(n+m)!}. \tag{7}$$

Аналогичное (5) разложение имеет место и для коэффициента отражения

$$\rho(\eta, \zeta, \varphi) = \rho^0(\eta, \zeta) + 2\sum_{m=1}^{\infty} \rho^m(\eta, \zeta)\cos m\varphi. \tag{8}$$

Применение принципа инвариантности Амбарцумяна приводит к следующим нелинейным интегральным уравнениям для определения азимутальных гармоник коэффициента отражения:

$$(\eta+\zeta)\rho^m(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} p^m(-\eta, \zeta) + \frac{\lambda}{2}\zeta\int_0^1 \rho^m(\zeta, \eta') p^m(\eta', \eta) d\eta' +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1 \rho^m(\eta, \eta') p^m(\eta', \zeta) d\eta' +$$

$$+\lambda\eta\zeta\int_0^1 \rho^m(\zeta, \eta') d\eta' \int_0^1 p^m(-\eta', \eta'')\rho^m(\eta'', \eta) d\eta''. \tag{9}$$

Приняв далее во внимание разложение (6), задачу об определении отраженного излучения можно свести к решению нелинейной системы функциональных уравнений для функций $\varphi_n^m(\eta)$ (см. [4])

$$\varphi_n^m(\eta) = P_n^m(\eta) + 2\eta(-1)^{n+m}\int_0^1 \rho^m(\eta', \eta) P_n^m(\eta') d\eta', \tag{10}$$

$$(n = 0, 1, \ldots;\ m = 0, 1, \ldots, n).$$

$$\rho^m(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4}\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^{k+m} c_k^m \frac{\varphi_k^m(\eta)\varphi_k^m(\zeta)}{\eta+\zeta}. \tag{11}$$

С точки зрения дальнейших рассуждений удобно ввести в рассмотрение функции $\tilde{\varphi}_n^m(\eta) = \sqrt{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\,\varphi_n^m(\eta)$ и $\tilde{P}_n^m(\eta) = \sqrt{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\,P_n^m(\eta)$.

Вместо (10) рассмотрим систему уравнений

$$\tilde{\varphi}_n^m(\eta) = \tilde{P}_n^m(\eta) + 2\eta(-1)^{n+m}\int_0^1 \rho^m(\eta', \eta)\,\tilde{P}_n^m(\eta')\,d\eta', \tag{12}$$

$$\rho^m(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4}\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^{k+m}x_k\frac{\tilde{\varphi}_k^m(\eta)\,\tilde{\varphi}_k^m(\zeta)}{\eta+\zeta}. \tag{13}$$

Обычный подход к решению приведенной бесконечной системы уравнений заключается в рассмотрении соответствующей укороченной системы, где ряд (13) заменен конечной суммой. Однако здесь мы выберем несколько другой путь [1, 2], основанный на выявлении асимптотического поведения функций $\tilde{\varphi}_n^m(\eta)$ в зависимости от индексов, что сильно упрощает решение задачи. Изучим для этой цели асимптотическое поведение обоих слагаемых в правой части (12) при больших значениях нижнего индекса $n$. Как известно [5], для $\theta$, заключенных в промежутке $(\varepsilon, \pi-\varepsilon)$, и при больших по сравнению с $m$ значениях $n$ для присоединенных функций Лежандра справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\frac{n!}{(n+m)!}P_n^m(\eta) = \left(\frac{2}{n\pi\sin\theta}\right)^{1/2}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4} + \frac{m}{2}\pi\right] + O(n^{-3/2}). \tag{14}$$

Приведенная оценка верна при фиксированном $m$, причем $O(n^{-3/2})$ зависит от $m$ и $\theta$. Чем больше $n$ по сравнению с $m$, тем шире интервал для $\theta$, где справедлива указанная асимптотика. Воспользовавшись формулой Стирлинга или непосредственной проверкой, нетрудно убедиться, что при больших значениях $n$, $n!/(n+m)! \leq \sqrt{(n-m)!/(n+m)!}$, поэтому приведенная асимптотика остается верной и для функций $\tilde{P}_n^m(\eta)$.

Приведем здесь также другой результат, представляющий собой содержание леммы, занимающей центральное место в теории разложения функций в ряды по полиномам Лежандра, доказательство которой можно найти, например, в [6]. Если $f(x)$ произвольная вещественная функция, кусочно-непрерывная в открытом интервале (—1, 1) и $\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx$ имеет конечное значение, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/2}\int_{-1}^{1} f(x)\,P_n(x)\,dx = 0. \tag{15}$$

Повторяя дословно рассуждения, проводимые при доказательстве указанной леммы, можно доказать более общее утверждение. Именно, для произвольной функции $f(x)$, удовлетворяющей тем же условиям, имеет место

$$\lim_{n\to\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/2}\int_{-1}^{1} f(x)\,\bar{P}_n^m(x)\,dx = 0. \tag{16}$$

Исходя из физического смысла величин $\eta\rho^m(\eta, \zeta)$, можно заключить, что последние удовлетворяют условиям, достаточным для выполнения (16). Таким образом, при больших значениях нижнего индекса $n$ функции $\tilde{\varphi}_n^m(\eta)$ и $\bar{P}_n^m(\eta)$ будут отличаться друг от друга сколь угодно мало. Хотя отмеченная тенденция нарушается в окрестности $\eta = 1$, при $m \neq 0$ это не играет существенной роли ввиду того, что $\lim\limits_{\eta\to 1}\bar{\varphi}_n^m(\eta) = \lim\limits_{\eta\to 1}\bar{P}_n^m(\eta) = 0$ при любом $n$ (что легко получить применением метода последовательных приближений к решению (10), с учетом того, что $\rho^m(\eta, 1) = 0$).

Важно отметить, что при малых $\eta$ функции $\bar{\varphi}_n^m(\eta)$ и $\tilde{P}_n^m(\eta)$ будут близки друг к другу уже при сравнительно небольших значениях индекса $n$, что обусловлено наличием множителя $\eta$ перед интегральным членом в (10).

Рассмотрим теперь вопрос о зависимости от верхнего индекса $m$. Очевидно, что изменение $m$ (не нарушающее неравенство $m < n$) приводит лишь к ограниченному изменению оценки (14) и не влияет на асимптотическое поведение функций $\bar{P}_n^m(\eta)$. В то же время второе слагаемое в системе уравнений (12) с возрастанием $m$ убывает ввиду убывания функций $\eta\rho^m(\eta, \zeta)$ как коэффициентов Фурье в разложении $I(\zeta, \eta, \varphi)$ в тригонометрический ряд по косинусам углов, кратных азимуту. Так, если $I(\zeta, \eta, \varphi)$ имеет непрерывные производные любого порядка, то его коэффициенты Фурье убывают быстрее любой степени от $1/m$. Таким образом, при больших $m$ и $\eta$, не близких к единице, функции $\bar{\varphi}_n^m(\eta)$ и $\bar{P}_n^m(\eta)$ будут мало отличаться друг от друга уже при относительно небольших значениях нижнего индекса $n$. В следующем разделе мы вернемся к этому вопросу на конкретном примере индикатрисы Хеньи—Гринстейна и покажем, что именно быстрым падением величин $\eta\rho^m(\eta, \zeta)$ можно объяснить замеченный еще Ван де Хюлстом факт [7, 9], заключающийся в том, что с увеличением номера гармоник соответствующие компоненты коэффициента отражения с возрастающей степенью точности определяются рассеянием первого порядка.

Приведенные соображения указывают на то, что для определения коэффициента отражения $\rho(\eta, \zeta, \varphi)$ достаточно вычислить определенное количество его первых гармоник, учитывая в остальных лишь рассеяния первого порядка. Указанная возможность использовалась в расчетах, выполненных в работах [9, 10], и позволяет с учетом (5) легко просуммировать ряд (8).

Теперь

$$\rho(\eta, \zeta, \varphi) = \frac{\lambda}{4}\frac{x(-\eta, \zeta, \varphi)}{\eta+\zeta} + [\rho^0(\eta, \zeta) - \rho_1^0(\eta, \zeta)] + + 2\sum_{m=1}^{M}[\rho^m(\eta, \zeta) - \rho_1^m(\eta, \zeta)]\cos m\varphi, \tag{17}$$

где

$$\rho_1^m(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4}\frac{p^m(-\eta, \zeta)}{\eta+\zeta} \tag{18}$$

$m$-ая гармоника коэффициента отражения, соответствующая однократному рассеянию; $M$ — номер гармоники, начиная с которой учитываются лишь рассеяния первого порядка.

С другой стороны, вышеприведенные соображения позволяют заключить, что для вычисления первых гармоник коэффициента отражения нет необходимости в знании всей совокупности функций $\{\tilde{\varphi}_n^m(\eta)\}$ при соответствующем $m$. Начиная с некоторого $n = N$, указанные функции могут быть заменены соответствующими присоединенными функциями $\tilde{P}_n^m(\eta)$.

Тогда

$$\rho^m(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4}\sum_{k=m}^{N}(-1)^{k+m}c_k^m\frac{\varphi_k^m(\eta)\varphi_k^m(\zeta) - P_k^m(\eta)P_k^m(\zeta)}{\eta+\zeta} + \rho_1^m(\eta, \zeta), \tag{19}$$

где функции $\varphi_n^m(\eta)$ $(n = m, \ldots, N)$ теперь определяются из укороченной системы уравнений

$$\varphi_n^m(\eta) = P_n^m(\eta) + \frac{\lambda}{2}\eta\sum_{k=m}^{N}(-1)^{n+k}c_k^m\int_0^1\frac{\varphi_k^m(\eta)\varphi_k^m(\eta')}{\eta+\eta'}P_n^m(\eta')\,d\eta', \tag{20}$$

в которой порядок приближений дается количеством уравнений, которые необходимо сохранить при решении указанной системы (или числом слагаемых, которыми следует ограничиться в сумме (19) ).

Как и в работах [1, 2], можно предложить также и другой путь вычисления $\rho^m(\eta, \zeta)$, обладающий большей точностью. Именно, замену $\tilde{\varphi}_n^m(\eta)$ соответствующими функциями $\bar{F}_n^m(\eta)$ можно произвести уже в самой системе уравнений (10), сведя тем самым задачу к решению новой системы

$$\varphi_n^{m*}(\eta) = P_n^m(\eta) + \frac{\lambda}{2}\eta \sum_{k=m}^{N} (-1)^{n+k} c_k^m \int_0^1 \frac{\varphi_k^{m*}(\eta)\,\varphi_k^{m*}(\eta') - P_k^m(\eta)\,P_k^m(\eta')}{\eta+\eta'} \times$$
$$\times P_n^m(\eta')\,d\eta' + 2\eta(-1)^{n+m}\int_0^1 \rho_1^m(\eta', \eta)\,P_n^m(\eta')\,d\eta'. \qquad (21)$$

Вопросы, связанные со сравнением различных способов построения $\rho^m(\eta, \zeta)$, мы здесь не будем затрагивать; такое сравнение подробно проведено при решении аналогичных уравнений в теории некогерентного рассеяния.

Следует особо отметить, что ошибка, возникающая при указанной замене системы уравнений (10) решением системы (20), существенным образом зависит от значений $m$ и $\eta$. Эта ошибка, а вместе с нею и $N$, тем меньше, чем больше $m$ и меньше $\eta$. При заданной точности, начиная с некоторого $m$, можно ограничиться решением лишь одного уравнения для соответствующей функции $\varphi_m^m(\eta)$. Возможные ошибки, связанные с близостью $\eta$ к единице, при $m \neq 0$ не приводят к потере точности ввиду малости самих гармоник коэффициента отражения. Выбор значений величин $M$ и $N$, в конечном счете, зависит от конкретной задачи и требуемой точности.

Изложенный выше способ решения задачи об отражении от полубесконечной среды отличается относительной простотой и точностью при сравнительно небольшом объеме вычислений.

2. *Рассеяние с индикатрисой Хеньи—Гринстейна.* При изучении диффузии излучения в Галактике Хеньи и Гринстейном была введена индикатриса следующего вида [11]:

$$x(\gamma) = \frac{1-g^2}{(1+g^2-2g\cos\gamma)^{3/2}}, \qquad (22)$$

где $g$—параметр, определяющий степень вытянутости индикатрисы.

Задача о диффузном отражении света от полубесконечной среды при индикатрисе (22) рассматривалась со стороны ряда авторов в вышеупомянутых работах [7—10]. Так, А. К. Колесовым коэффициенты отражения определялись путем решения уравнений Амбарцумяна—Чандрасекара с использованием полученного В. В. Соболевым представления указанных коэффициентов через H-функции и полиномы. В работе [10] решались нелинейные интегральные уравнения (9).

Индикатриса Хеньи—Гринстейна легко разлагается в ряд по полиномам Лежандра [4]:

$$x(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, g^n P_n(\cos\gamma), \tag{23}$$

откуда следует, что весь ход рассуждений и математические выкладки, проведенные в предыдущем разделе, непосредственно переносятся на рассматриваемый частный случай, для чего достаточно в соответствующих соотношениях положить $x_n = (2n+1)\, g^n$. В частности, вместо (6) будем иметь

$$p^m(\eta, \zeta) = \sum_{n=m}^{\infty} (2n+1)\, g^n \widetilde{P}_n^m(\eta)\, \widetilde{P}_n^m(\zeta). \tag{24}$$

Здесь мы займемся вопросом о скорости, с которой функции $p^m(\eta, \zeta)$ стремятся к $p_1^m(\eta, \zeta)$ с возрастанием номера гармоник. Для этого заметим сначала, что $|\widetilde{P}_n^m(\eta)| \leqslant 1$, к чему нетрудно придти, например, из теоремы сложения сферических функций (4), если принять $\eta = \zeta$ и $\varphi = 0$. Тогда из (24), в частности, получаем оценку

$$p^0(\eta, \zeta) \leqslant p^0(1, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, g^n = \frac{1+g}{(1-g)^2}. \tag{25}$$

Аналогичную оценку для $p^0(-\eta, \zeta)$ несложно получить непосредственно из определения этой функции (6)

$$p^0(-\eta, \zeta) \leqslant p^0(0, 0) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2E(g)}{1-g^2} - K(g) \right], \tag{26}$$

где $E(g)$ и $K(g)$ суть полные эллиптические интегралы.

В работе А. К. Колесова [9] изучался вопрос о скорости убывания $p^m(\pm\eta, \zeta)$ в зависимости от номера гармоник и, в частности, было получено рекуррентное соотношение для величин

$$y_m(z) = \frac{p^{m+1}(\pm\eta, \zeta)}{p^m(\pm\eta, \zeta)}, \tag{27}$$

которые зависят лишь от одного аргумента $z$, где

$$z = \frac{1 + g^2 \mp 2g\eta\zeta}{2g\sqrt{(1-\eta^2)(1-\zeta^2)}}. \tag{28}$$

Из этих исследований вытекает, что $y_m(z)$ монотонно убывает с ростом $m$ и при $m \to \infty$ стремится к $y(z)$, где

$$y(z) = \lim_{m \to \infty} y_m(z) = z - \sqrt{z^2 - 1}. \tag{29}$$

С точки зрения дальнейших рассуждений, важно отметить, что величина $y(z)$, как это следует из (28) и (29), принимает свое максимальное значение на множестве всех $\eta$ и $\zeta$ при $\eta = \zeta = 0$, если берется нижний знак в (28). Если же в (28) берется верхний знак, то для фиксированного $\eta$, максимум функции $y(z)$ достигается при $\zeta = 2g\eta/(1+g^2)$.
Далее, если принять во внимание, что величина

$$y_0(z) = \frac{1}{y(z)} \frac{[1 + y^2(z)]E(y) - [1 - y^2(z)]K(y)}{2E(y) - [1 - y^2(z)]K(y)} \tag{30}$$

является монотонно возрастающей функцией от $y$, то для азимутальных гармоник индикатрисы рассеяния легко получить следующие оценки:

$$p^m(\eta, \zeta) \leqslant p^0(1, 1)\, y_0^m(z^+), \quad \text{где} \quad z^+ = \frac{\sqrt{(1+g^2)^2 - 4g^2\eta^2}}{2g\sqrt{1-\eta^2}} \tag{31}$$

$$p^m(-\eta, \zeta) \leqslant p^0(0, 0)\, y_0^m(z^-), \quad \text{где} \quad z^- = \frac{1+g^2}{2g}. \tag{32}$$

Формула (31) справедлива для всех $\zeta$ при фиксированном значении $\eta$, а формула (32) для произвольных $\eta$ и $\zeta$.

Подставляя формулы (31) и (32) в (9), будем иметь

$$\begin{gathered}(\eta + \zeta)\rho^m(\eta, \zeta) \leqslant \frac{\lambda}{4} p^0(0, 0)\, y_0^m(z^-)\,\{1 + 2A[x^m(\zeta)\beta^m(\eta) + \\ + x^m(\eta)\beta^m(\zeta)] + 4\beta^m(\eta)\beta^m(\zeta)\},\end{gathered} \tag{33}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{gathered}A = p^0(1, 1)/p^0(0, 0), \quad x(\eta) = y_0(z^+)/y_0(z^-), \\ \beta^m(\eta) = \eta \int_0^1 \rho^m(\eta, \eta')\,d\eta'.\end{gathered} \tag{34}$$

Величина $x(\eta)$, входящая в правую часть (34), как нетрудно убедится, меньше единицы. С другой стороны, поскольку функции $\beta^m(\eta)$ ограничены $\left(\text{как коэффициенты Фурье функции } \int\limits_0^1 I(\zeta, \eta, \varphi)\, d\zeta\right)$, то из (33) следует, что $\beta^m(\eta)$ убывают с ростом $m$ не медленнее, чем по показательному закону $y_0^m(z^-)$. Поэтому, чтобы получить оценку для $\beta^m(\eta)$, достаточно определить $\beta^0(\eta)$, которое просто выражается через функцию $\varphi_0^0(\eta)$:

$$\beta^0(\eta) = \frac{1}{2}[\varphi_0^0(\eta) - 1].$$

Таким образом, учитывая, что

$$\beta^m(\eta) \leqslant \beta^0(\eta)\, y_0^m(z^-),$$

окончательно находим

$$|\rho^m(\eta, \zeta) - \rho_1^m(\eta, \zeta)| \leqslant \frac{\lambda}{2}\frac{p^0(0, 0)}{\eta + \zeta} y_0^{2m}(z^-) \times$$
$$\times |A[x^m(\zeta)\beta^0(\eta) + x^m(\eta)\beta^0(\zeta)] + 2\beta^0(\eta)\beta^0(\zeta)\, y_0^m(z^-)|. \qquad (35)$$

При больших $\eta$ и $\zeta$ величина $x$ мала, и в выражении, находящемся в скобках в правой части (35), оказывается существенным последнее слагаемое, и наоборот, при малых $\eta$ и $\zeta$ $x \approx 1$ и основную роль играют первые два слагаемых. Из полученной оценки можно заключить, что функции $\rho^m(\eta, \zeta)$ стремятся к $\rho_1^m(\varphi, \zeta)$ не медленнее, чем по показательному закону $y_0^{2m}(z^-)$. Очевидно, что при малых $\eta$ и $\zeta$ и очень больших $m$ разность между указанными функциями убывает не медленнее, чем $g^{2m}$. При больших $g$, то есть при сильно вытянутых индикатрисах, процесс приближения функций $\rho^m(\eta, \zeta)$ к $\rho_1^m(\eta, \zeta)$ замедляется. Укажем также, что в случае необходимости оценку (35) можно улучшить, если проведенные выше рассуждения повторить, используя уравнения (9), начиная, однако, с $m=1$, а также если воспользоваться рекуррентными соотношениями для величин $y_m(z)$ (см. [9]).

Следует оговориться, что при довольно сильно вытянутых индикатрисах ($g > 0.5$) оценка (35) становится грубой, с точки зрения ее применения на практике (в особенности в случае малых углов). По мнению авторов, случай сильно вытянутых индикатрис представляет самостоятельный интерес и требует разработки специальных методов, не основанных, быть может, на разложении в ряд индикатрисы рассеяния.

Остановимся вкратце на результатах численных расчетов, относящихся к азимутальным гармоникам коэффициента отражения при индикатрисе Хеньи—Гринстейна. Функции $\rho^m(\eta, \zeta)$ вычислялись по формуле (19) путем решения системы функциональных уравнений (20), в которой интегралы заменялись гауссовскими суммами с 13 точками деления. Процесс итераций продолжался до тех пор, пока относительное отклонение между двумя последующими значениями функций $\tilde{\varphi}_n^m$ не оказывалось меньше $10^{-6}$. В качестве нулевого приближения при итерациях брались функции $\bar{P}_n^m(\eta)$. Следует отметить, что при переходе к решению систем уравнений более высокого порядка сходимость итераций можно значительно ускорить, если при выборе нулевого приближения при итерациях использовать функции $\tilde{\varphi}_n^m(\eta)$, найденные при решении систем уравнений низких порядков.

В табл. 1 приводятся значения вычисленных в 6-ом приближении функций $\tilde{\varphi}_n^m(\eta)$ для $m = 0$, 1, 2 и $\lambda = 0.9$; $g = 0.5$. Для сравнения протабулированы также соответствующие им функции $\bar{P}_n^m(\eta)$. Внизу каждого столбца приводятся значения величины

$$\delta = \int_0^1 |\tilde{\varphi}_n^m(\eta) - \bar{P}_n^m(\eta)|\, d\eta \bigg/ \int_0^1 |\bar{P}_n^m(\eta)|\, d\eta,$$

из которых явствует, что скорость, с которой функции $\tilde{\varphi}_n^m(\eta)$ приближаются к $\bar{P}_n^m(\eta)$ при больших $n$, зависит от четности $n+m$. С возрастанием номера гармоник, как уже говорилось, функции $\tilde{\varphi}_n^m(\eta)$ и $\bar{P}_n^m(\eta)$ близки уже при сравнительно небольших $n$, что позволяет ограничиться приближениями более низкого порядка. Так, например, максимальная ошибка, допускаемая при вычислении $\rho^1(\eta, \zeta)$ в 3-ем приближении, составляет 3.5%, а в 6-ом приближении — 0.2% и возникает лишь при $\eta$ и $\zeta$, близких к единице. При еще больших $m$ с точностью, достаточной для многих практических целей, можно довольствоваться первыми двумя приближениями. Однако при сильно вытянутых индикатрисах ввиду медленной сходимости ряда (24) следует прибегнуть к приближениям более высокого порядка. Зависимость $\tilde{\varphi}_n^m(\eta)$ от порядка приближения весьма слабая, поэтому переход к приближению более высокого порядка осуществляется лишь пополнением имеющейся системы функций. Другая существенная особенность описанного метода заключается в том, что для любых фиксированных $\eta$ и $\zeta$ значения азимутальных компонентов коэффициента отражения в зависимости от порядка приближения сходятся к истинному значению попеременно сверху и снизу. Это позволяет оценить ошибку каждого приближения.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

*Таблица 1*

ФУНКЦИИ $\tilde{\varphi}_n^m(\eta)$ И $\tilde{P}_n^m(\eta)$ ПРИ $g=0.5$; $\lambda=0.9$

| | $\eta$ | $\tilde{\varphi}_m^m(\eta)$ | $\tilde{P}_m^m(\eta)$ | $\tilde{\varphi}_{m+1}^m(\eta)$ | $\tilde{P}_{m+1}^m(\eta)$ | $\tilde{\varphi}_{m+2}^m(\eta)$ | $\tilde{P}_{m+2}^m(\eta)$ | $\tilde{\varphi}_{m+3}^m(\eta)$ | $\tilde{P}_{m+3}^m(\eta)$ | $\tilde{\varphi}_{m+4}^m(\eta)$ | $\tilde{P}_{m+4}^m(\eta)$ | $\tilde{\varphi}_{m+5}^m(\eta)$ | $\tilde{P}_{m+5}^m(\eta)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m=0$ | 0.0 | 1.0000 | 1.0000 | 0.0000 | 0.0000 | −0.5000 | −0.5000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.3750 | 0.3750 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 0.1 | 1.1879 | 1.0000 | 0.0429 | 0.1000 | −0.5334 | −0.4850 | −0.1124 | −0.1475 | 0.3602 | 0.3379 | 0.1547 | 0.1788 |
| | 0.2 | 1.2955 | 1.0000 | 0.0968 | 0.2000 | −0.5005 | −0.4400 | −0.2244 | −0.2800 | 0.2560 | 0.2320 | 0.2723 | 0.3075 |
| | 0.3 | 1.3713 | 1.0000 | 0.1588 | 0.3000 | −0.4268 | −0.3650 | −0.3144 | −0.3825 | 0.0945 | 0.0729 | 0.3050 | 0.3454 |
| | 0.4 | 1.4265 | 1.0000 | 0.2271 | 0.4000 | −0.3172 | −0.2600 | −0.3644 | −0.4400 | −0.0955 | −0.1130 | 0.2283 | 0.2706 |
| | 0.5 | 1.4674 | 1.0000 | 0.3007 | 0.5000 | −0.1749 | −0.1250 | −0.3577 | −0.4375 | −0.2762 | −0.2891 | 0.0471 | 0.0898 |
| | 0.6 | 1.4983 | 1.0000 | 0.3787 | 0.6000 | −0.0014 | 0.0400 | −0.2779 | −0.3600 | −0.3996 | −0.4080 | −0.1991 | −0.1526 |
| | 0.7 | 1.5221 | 1.0000 | 0.4602 | 0.7000 | 0.2022 | 0.2350 | −0.1095 | −0.1925 | −0.4076 | −0.4121 | −0.4072 | −0.3652 |
| | 0.8 | 1.5407 | 1.0000 | 0.5449 | 0.8000 | 0.4353 | 0.4600 | 0.1629 | 0.0800 | −0.2317 | −0.3230 | −0.4407 | −0.3995 |
| | 0.9 | 1.5548 | 1.0000 | 0.6324 | 0.9000 | 0.6981 | 0.7150 | 0.5542 | 0.4725 | 0.2066 | 0.2079 | −0.0805 | −0.0411 |
| | 1.0 | 1.5642 | 1.0000 | 0.7225 | 1.0000 | 0.9911 | 1.0000 | 1.0789 | 1.0000 | 0.9959 | 1.0000 | 0.9651 | 1.0000 |
| | $\sigma$ | 0.416 | | 0.360 | | 0.104 | | 0.209 | | 0.042 | | 0.151 | |
| $m=1$ | 0.0 | 0.7071 | 0.7071 | 0.0000 | 0.0000 | −0.4330 | −0.4330 | 0.0000 | 0.0000 | 0.3423 | 0.3423 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 0.1 | 0.7618 | 0.7036 | 0.1014 | 0.1219 | −0.4312 | −0.4093 | −0.1475 | −0.1630 | 0.3051 | 0.2936 | 0.1779 | 0.1895 |
| | 0.2 | 0.7692 | 0.6928 | 0.2099 | 0.2400 | −0.3649 | −0.3394 | −0.2767 | −0.2980 | 0.1709 | 0.1589 | 0.2910 | 0.3058 |
| | 0.3 | 0.7552 | 0.6745 | 0.3165 | 0.3505 | −0.2517 | −0.2272 | −0.3566 | −0.3791 | −0.0185 | −0.0294 | 0.2821 | 0.2976 |
| | 0.4 | 0.7257 | 0.6481 | 0.4146 | 0.4490 | −0.1010 | −0.0794 | −0.3636 | −0.3853 | −0.2113 | −0.2204 | 0.1408 | 0.1551 |
| | 0.5 | 0.6829 | 0.6124 | 0.4977 | 0.5303 | 0.0757 | 0.0938 | −0.2829 | −0.3026 | −0.3450 | −0.3520 | −0.0894 | −0.0767 |
| | 0.6 | 0.6271 | 0.5657 | 0.5584 | 0.5879 | 0.2627 | 0.2771 | −0.1117 | −0.1288 | −0.3557 | −0.3611 | −0.3071 | −0.2961 |
| | 0.7 | 0.5562 | 0.5049 | 0.5869 | 0.6122 | 0.4373 | 0.4484 | 0.1345 | 0.1202 | −0.1961 | −0.2000 | −0.3689 | −0.3598 |
| | 0.8 | 0.4643 | 0.4253 | 0.5676 | 0.5879 | 0.5635 | 0.5617 | 0.4082 | 0.3971 | 0.1345 | 0.1318 | −0.1398 | −0.1378 |
| | 0.9 | 0.3349 | 0.3082 | 0.4667 | 0.4805 | 0.5707 | 0.5757 | 0.5926 | 0.5855 | 0.5147 | 0.5130 | 0.3695 | 0.3736 |
| | $\sigma$ | 0.089 | | 0.061 | | 0.046 | | 0.053 | | 0.025 | | 0.044 | |

*Таблица 1 (продолжение)*

| $m=2$ | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.6124 | 0.6124 | 0.0000 | 0.0000 | −0.3953 | −0.3953 | 0.0000 | 0.0000 | 0.3202 | 0.3202 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.1 | 0.6310 | 0.6062 | 0.1263 | 0.1356 | −0.3740 | −0.3639 | −0.1666 | −0.1740 | 0.2666 | 0.2610 | 0.1919 | 0.1973 |
| 0.2 | 0.6175 | 0.5879 | 0.2507 | 0.2629 | −0.2842 | −0.2732 | −0.2069 | −0.3061 | 0.1080 | 0.1023 | 0.2910 | 0.2973 |
| 0.3 | 0.5858 | 0.5573 | 0.3615 | 0.3738 | −0.1431 | −0.1331 | −0.3522 | −0.3610 | −0.0978 | −0.1028 | 0.2356 | 0.2415 |
| 0.4 | 0.5391 | 0.5144 | 0.4491 | 0.4601 | 0.0315 | 0.0398 | −0.3098 | −0.3165 | −0.2745 | −0.2785 | 0.0338 | 0.0387 |
| 0.5 | 0.4791 | 0.4593 | 0.5045 | 0.5135 | 0.2158 | 0.2223 | −0.1634 | −0.1698 | −0.3423 | −0.3452 | −0.2289 | −0.2249 |
| 0.6 | 0.4070 | 0.3919 | 0.5189 | 0.5258 | 0.3796 | 0.3845 | 0.0607 | 0.0556 | −0.2445 | −0.2466 | −0.4081 | −0.4049 |
| 0.7 | 0.3230 | 0.3123 | 0.4839 | 0.4868 | 0.4863 | 0.4899 | 0.3076 | 0.3039 | 0.0183 | 0.0169 | −0.3587 | −0.3562 |
| 0.8 | 0.2273 | 0.2205 | 0.3912 | 0.3944 | 0.4931 | 0.4952 | 0.4821 | 0.4800 | 0.3466 | 0.3455 | −0.0397 | −0.0381 |
| 0.9 | 0.1197 | 0.1164 | 0.2325 | 0.2342 | 0.3500 | 0.3507 | 0.4437 | 0.4429 | 0.4918 | 0.4911 | 0.3217 | 0.3223 |
| $\gamma$ | 0.046 | | 0.024 | | 0.022 | | 0.022 | | 0.014 | | 0.016 | |

# THE DIFFUSE REFLECTION OF LIGHT FOR ARBITRARY PHASE FUNCTION

A. G. NIKOGHOSSIAN, H. A. HARUTHYUNIAN

A new simple method for solving the problem of diffuse reflection from a semi-infinite medium in case of anisotrope scattering with arbitrary angular phase function is suggested. This method is based on the asymptotic behaviour of Ambartsumian's functions $\varphi_n^m(\eta)$ for large values of indices. In particular the scattering with Henyey-Greenstein angular phase function is considered. The dependence of reflection coefficient harmonics on its number *m* is investigated. The results of numerical calculations are given.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *H. A. Haruthyunian, A. G. Nikoghossian*, J. Quant. Spectroscop. Radiat. Transfer, 19, 135, 1978.
2. *А. Г. Никогосян, Г. А. Арутюнян*, ДАН СССР, 229, 583, 1976.
3. *N. B. Yengibarian, A. G. Nikoghossian*, J. Quant. Spectroscop. Radiat. Transfer, 13, 787, 1973.
4. *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
5. *Е. В. Гобсон*, Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, М., 1952.
6. *Н. Н. Лебедев*, Специальные функции и их приложения, М., 1958.
7. *H. G. van de Hulst*, J. Compt. Phys., 3, 291, 1968.
8. *H. G. van de Hulst*, J. Quant. Spectroscop. Radiat. Transfer, 11, 785, 1971.
9. *А. К. Колесов*, Труды АО ЛГУ, 30, 3, 1974.
10. *А. С. Аниконов*, Астрофизика, 10, 227, 1974.
11. *L. G. Henyey, J. L. Greenstein*, Ann. Ap., 3, 117, 1949.