АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 14 НОЯБРЬ, 1978 ВЫПУСК 4

УДК 523.854

НЕЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ ПЛОТНОСТИ. II. ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ТОНКОМ СЛОЕ ИЗ ЗВЕЗД

С. Н. НУРИТДИНОВ

Поступила 15 января 1976

В работе исследуются стационарные периодические волны плотности конечной амплитуды в модели бесконечно тонкого слоя из звезд. В найденном решении проявляется известный нелинейный эффект — рождение высших гармоник. Полученная зависимость длины волны от ее амплитуды указывает на дестабилизирующее влияние нелинейности.

В первой части работы [1] мы рассматривали нелинейные волны звездной плотности без ограничения на величину амплитуды в модели эллипсоида вращения, причем длина волны λ считалась намного меньше толщины системы d. В этой статье рассмотрим случай $\lambda \gg d$. Исследуем волны плотности малой (но конечной) амплитуды. Для таких волн должен проявиться известный во многих областях физики нелинейный эффект — рождение высших гармоник колебаний. В качестве равновесной модели звездной системы берется бесконечно тонкий слой. Так же, как и в [1], рассматривая стационарные («застывшие») волны с фазовой скоростью, равной нулю, определяем функциональную зависимость длины волны от амплитуды. При этом эволюцию системы представляем себе как последовательность стационарных состояний, каждое из которых имеет свою определенную величину амплитуды.

1. *Постановка задачи и основные уравнения.* Рассмотрим равновесную модель звездной системы в виде невращающегося однородного тонкого слоя, бесконечного по направлениям x и y. Ее гравитационный потенциал

$$\varphi_0(z) = -2\pi G\sigma_0|z|, \tag{1}$$

где G — гравитационная постоянная, а σ_0 — поверхностная плотность, которая является постоянной величиной. Пусть соответствующая фазовая плотность

$$f_0 = \begin{cases} \eta, & -v_0 < v < v_0, \\ 0, & v < -v_0, \quad v_0 < v, \end{cases} \tag{2}$$

где η и v_0 — некоторые постоянные. Аналогичную функцию мы уже брали в предыдущей работе [1] для модели эллипсоида вращения.

Придадим системе некоторое малое, но конечное по амплитуде возмущение. Исследуем нелинейные свойства периодической волны в такой системе. Направим волновой вектор $\vec{k}$ по оси x. Поскольку значение фазовой плотности (2), согласно теореме Лиувилля, сохраняется и в возмущенном состоянии, то поверхностная плотность в текущий момент времени

$$\sigma(x, t) = \eta (v - v_1), \tag{3}$$

где $v(x, t)$ и $v_1(x, t)$ — фазовые границы возмущенной системы.

Тогда справедливо уравнение [1]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \tag{4}$$

где потенциал φ удовлетворяет следующим условиям:

$$\Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad \text{если } z \neq 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -2\pi G\sigma, \quad \text{если } z = 0. \tag{6}$$

Очевидно, точно такое же уравнение как (4) имеет место и для $v_1(x, t)$.

Далее, мы будем рассматривать только стационарное (застывшее) состояние системы ($\partial/\partial t = 0$). Поэтому из (4) в плоскости $z = 0$ имеем

$$v = \sqrt{2(\varphi + q)}, \tag{7}$$

где q — постоянная интегрирования, являющаяся функцией от амплитуды волны. Мы знаем, что $v = -v_1$ при предположении о неизменности импульса всей системы [1]. Следовательно, $\sigma = 2\eta v$ и условие (6) для $\varphi(x, z)$ примет вид

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = -4\pi G\eta \sqrt{2[\varphi(x, 0) + q]}. \tag{8}$$

Добавим сюда еще условие на бесконечности

$$\lim_{z \to \infty} (\varphi - \varphi_0) = 0. \tag{9}$$

Таким образом, изучение стационарной волны конечной амплитуды в модели тонкого слоя сводится к решению двумерного уравнения Лапласа с нелинейным граничным условием (8) и обычным условием на бесконечности (9).

Пусть ε — величина, характеризующая амплитуду волны, а λ — длина волны. Так как амплитуда ε мала, то целесообразно искать решение в виде

$$\varphi(x, z) = \varphi_0(z) + \varepsilon\varphi_1(x, z) + \varepsilon^2\varphi_2(x, z) + \varepsilon^3\varphi_3(x, z) + \ldots \tag{10}$$

Кроме того, следует разложить также величины q и λ по степеням ε. Поскольку эти две величины характеризуют волну в целом (т. е. не зависят от x), то они инвариантны по отношению к замене ε на $-\varepsilon$, при которой уплотнения меняются местами с разрежениями и волна просто сдвигается. Это значит, что в разложениях q и λ члены с нечетными степенями от ε выпадут. Наконец, если учесть, что при $\varphi = \varphi_0$ значение $v = v_0$, то имеем

$$q = \frac{v_0^2}{2} + \varepsilon^2 q_2 + \varepsilon^4 q_4 + \ldots, \tag{11}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon^2\lambda_2 + \varepsilon^4\lambda_4 + \ldots. \tag{12}$$

Везде проделаем подстановку

$$x = (1 + \varepsilon^2\beta_2 + \varepsilon^4\beta_4 + \ldots)\, x^*, \qquad \beta_{2n} = \frac{\lambda_{2n}}{\lambda_0} \tag{13}$$

($n = 1, 2, 3, \ldots$), которая часто применяется в нелинейной механике [2, 3] при изучении возмущения, периодического во времени. Для простоты, в дальнейшем знак звездочки у x^* будем опускать. Очевидно, роль нелинейности проявляется в коэффициентах β_{2n}, в определении значений которых и состоит наша задача. Величины β_{2n} можно назвать коэффициентами нелинейной зависимости длины волны от амплитуды или просто коэффициентами нелинейности.

Подставим в (5) и (8) выражения (10), (11) и (13) и разложим корень в (8) по степеням ε. Тогда, приравнивая коэффициенты при равных степенях ε, находим следующие уравнения с соответствующими условиями: первое приближение —

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{4\pi G\eta}{v_0}\,\varphi_1(x, 0), \tag{14}$$

второе приближение —

$$\Delta\varphi_2 = 0, \quad \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{4\pi G\eta}{v_0}\left(\varphi_2 + q_2 - \frac{\varphi_1^2}{2v_0^2}\right)_{z=0}, \tag{15}$$

третье приближение —

$$\Delta\varphi_3 = 2\beta_2\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right), \tag{16}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{4\pi G\eta}{v_0}\left|\varphi_3 - \frac{\varphi_1(\varphi_2+q_2)}{v_0^2} + \frac{\varphi_1^3}{2v_0^4}\right|_{z=0}, \tag{17}$$

четвертое приближение —

$$\Delta\varphi_4 = 2\beta_2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}, \tag{18}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_4}{\partial z}\right)_{z=0} =$$

$$= -\frac{4\pi G\eta}{v_0}\left|\varphi_4 + q_4 - \frac{\varphi_1\varphi_3}{v_0^2} - \frac{(\varphi_2+q_2)^2}{2v_0^2} + \frac{3\varphi_1^2(\varphi_2+q_2)}{2v_0^4} - \frac{5\varphi_1^4}{8v_0^6}\right|_{z=0} \tag{19}$$

и пятое приближение —

$$\Delta\varphi_5 = (2\beta_4 - 3\beta_2^2)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + 2\beta_2\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x^2}, \tag{20}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_5}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{4\pi G\eta}{v_0}\left|\varphi_5 - \frac{\varphi_3(\varphi_2+q_2)}{v_0^2} + \frac{3\varphi_1(\varphi_2+q_2)^2}{2v_0^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{3\varphi_1^2\varphi_3}{2v_0^4} - \frac{5\varphi_1^3(\varphi_2+q_2)}{2v_0^6} + \frac{7\varphi_1^5}{8v_0^8}\right|_{z=0}. \tag{21}$$

Решение нулевого приближения, согласно (1) и (6), равно $\varphi_0(z) = -4\pi G\eta v_0|z|$. Приступим к нахождению других приближений.

2. *Первое, второе и третье приближения.* Пусть далее, для определенности, $z \geqslant 0$. Легко показать, что двумерное уравнение Лапласа n-го приближения $\Delta\varphi_n = 0$ при граничных условиях (8) и (9) имеет решение вида

$$\varphi_n(x, z) = \sum_{m=1}^{n} c_m e^{-mkz}\cos mkx, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{22}$$

где c_m — неизвестные постоянные, которые находятся подстановкой (22) в соответствующее граничное условие для $z = 0$, причем при $n = 1$, как видно из (14), c_1 есть произвольная постоянная. Подстановка (22) в граничное условие в (14) и приравнивание коэффициентов при косинусах одинаковых аргументов дает $c_m = 0$ для $m \geqslant 2$ и

$$k = \frac{4\pi G\gamma}{v_0}. \tag{23}$$

Аналог критической длины Джинса

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k} = \frac{v_0}{2G\gamma} \tag{24}$$

разделяет области устойчивости и неустойчивости в линейном приближении. Таким образом,

$$\varphi_1(x, z) = c_1 e^{-kz} \cos kx. \tag{25}$$

Для нахождения второго приближения подставляем

$$\varphi_2(x, z) = a_1 e^{-kz} \cos kx + a_2 e^{-2kz} \cos 2kx \tag{26}$$

в граничное условие в (15). Тогда, приравнивая коэффициенты при одинаковых углах, с учетом (23), получаем

$$q_2 = -a_2 = \frac{c_1^2}{4v_0^2} \tag{27}$$

и a_1 — пока неизвестная постоянная (ее значение находим из следующего приближения).

Несколько иначе решается уравнение третьего приближения (16), которое с учетом (25) имеет вид

$$\Delta\varphi_3 = -2c_1 k^2 \beta_2 e^{-kz} \cos kx.$$

Его общее решение состоит из суммы решений однородного уравнения (22) и неоднородного уравнения, а именно

$$\varphi_3(x, z) = kc_1\beta_2 z e^{-kz} \cos kx + \sum_{m=1}^{3} b_m e^{-mkz} \cos mkx. \tag{28}$$

Подставляя (28) в (18), находим

$$a_1 = b_2 = 0, \qquad b_3 = \frac{c_1^3}{8v_0^4}, \qquad \beta_2 = -\frac{c_1^2}{4v_0^4} \tag{29}$$

и b_1 остается пока неизвестной.

Как видно, коэффициент нелинейной зависимости длины волны от амплитуды $\beta_2 < 0$, т. е. область устойчивости, согласно (12), сужается по сравнению с линейным приближением. Следовательно, при малой, но конечной амплитуде волны нелинейность оказывает дестабилизирующее действие. Для полного подтверждения этого результата следует найти и коэффициент β_4, чем мы будем заниматься в следующем разделе. Сначала найдем значения оставшихся постоянных c_1 и b_1. С этой целью уточним смысл амплитуды волны ε, рассматривая ее как разность значений поверхностной плотности $\sigma(x)$ в точках максимума ($x = 0$) и минимума ($x = \lambda/2$), а точнее

$$\varepsilon = \frac{1}{4\gamma v_0}\left[\sigma(0) - \sigma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right] = \frac{1}{2v_0}\left[v(0) - v\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right]. \tag{30}$$

Подставляя (7), (10), (11) и (25)—(29) в (30) и разлагая полученное выражение по степеням ε, приравниваем коэффициенты при равных степенях ε. Получим

$$c_1 = v_0^2, \qquad b_1 = -\frac{5}{8}v_0^2, \qquad q_2 = \frac{v_0^2}{4}, \qquad \beta_2 = -\frac{1}{4}. \tag{31}$$

Перепишем теперь найденные нами решения в окончательном виде

$$\begin{gathered}\varphi_1 = v_0^2 e^{-kz}\cos kx, \quad \varphi_2 = -\frac{v_0^2}{4}e^{-2kz}\cos 2kx,\\ \varphi_3 = -\frac{v_0^2}{8}(2kz + 5)e^{-kz}\cos kx + \frac{v_0^2}{8}e^{-3kz}\cos 3kx.\end{gathered} \tag{32}$$

3. *Четвертое и пятое приближения.* С целью продолжить решение еще дальше по амплитуде и определить более точно зависимость $\lambda(\varepsilon)$ при малых (но конечных) ε, найдем следующий коэффициент нелинейности β_4, который содержится в уравнении пятого приближения (20). Сначала решим уравнение (18). Оно с учетом (31) и (32) примет вид

$$\Delta\varphi_4 = -\frac{k^2v_0^2}{2}e^{-2kz}\cos 2kx. \tag{33}$$

По аналогии с третьим приближением общее решение уравнения (33) равняется

$$\varphi_4(x, z) = \frac{kv_0^2}{8}ze^{-2kz}\cos 2kx + \sum_{m=1}^{4}\tau_m e^{-mkz}\cos mkx. \tag{34}$$

Подставляя (31), (32) и (34) в (19), получим

$$\tau_2 = -q_4 = \frac{v_0^2}{8}, \qquad \tau_3 = 0, \qquad \tau_4 = -\frac{v_0^2}{12} \tag{35}$$

и τ_1 — пока неизвестная постоянная.

Следовательно,

$$\varphi_4(x, z) = \frac{v_0^2}{8}(kz+1)e^{-2kz}\cos 2kx + \tau_1 e^{-kz}\cos kx - \\ - \frac{v_0^2}{12}e^{-4kz}\cos 4kz. \tag{36}$$

Наконец, переходим к решению последнего уравнения (20), которое с учетом (31) и (32) имеет вид

$$\Delta\varphi_5 = -k^2 v_0^2\left(\frac{kz+1}{8} + 2\beta_4\right)e^{-kz}\cos kx + \frac{9k^2v_0^2}{16}e^{-3kz}\cos 3kx. \tag{37}$$

Поскольку в правой части (37) содержится член, пропорциональный ze^{-kz}, легче находить φ_5, подставляя $\varphi_5 = \varphi_5^{(1)} + \varphi_5^{(2)}$ в (37) и разделяя его на следующие два уравнения:

$$\Delta\varphi_5^{(1)} = \frac{1-2kz}{16}k^2v_0^2e^{-kz}\cos kx, \tag{38}$$

$$\Delta\varphi_5^{(2)} = -\left(2\beta_4 + \frac{3}{16}\right)k^2v_0^2e^{-kz}\cos kx + \frac{9k^2v_0^2}{16}e^{-3kz}\cos 3kx. \tag{39}$$

Общее решение уравнения (38)

$$\varphi_5^{(1)} = \frac{k^2v_0^2}{32}z^2e^{-kz}\cos kx + \sum_{m=1}^{5} p_m e^{-mkz}\cos mkx, \tag{40}$$

а решение (39)

$$\varphi_5^{(2)} = \left(\beta_4 + \frac{3}{32}\right)kv_0^2ze^{-kz}\cos kx - \frac{3kv_0^2}{32}ze^{-3kz}\cos 3kx. \tag{41}$$

Для нахождения неизвестных постоянных β_4 и p_m подставим выражения (31), (32), (40) и (41) в граничное условие (21). Затем, приравнивая коэффициенты при косинусах одинаковых аргументов, получаем

$$\beta_4 = -\frac{1}{32}, \quad \tau_1 = p_2 = p_4 = 0, \quad p_3 = -\frac{16}{24}p_5 = -\frac{v_0^2}{24}, \tag{42}$$

а члены с p_1 сокращаются. Поэтому, согласно (40)—(42), имеем

$$\varphi_5(x, z) = \left[p_1 + \frac{(k^2z^2+2kz)}{32}v_0^2\right]e^{-kz}\cos kx - \\ - \frac{v_0^2}{96}(9kz+4)e^{-3kz}\cos 3kx + \frac{25}{384}v_0^2e^{-5kz}\cos 5kx. \tag{43}$$

Постоянное p_1 находим точно так же, как находили значение c_1, подставляя найденные нами все решения в (30). Получим $p_1 = -19\,v_0^2/128$.

Как видно из (42), более высокий коэффициент нелинейности $\beta_4 = \lambda_4/\lambda_0$ также меньше нуля. Зная значения β_2, β_4 и λ_0, из (12) находим искомую зависимость длины волны от амплитуды с точностью до членов четвертого порядка:

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{v_0}{2G\eta}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\varepsilon^4}{32}\right). \tag{44}$$

Таким образом, в модели тонкого слоя нелинейность при малой амплитуде оказывает дестабилизирующее влияние. Вероятно, данная картина, как и в модели эллипсоида [1], сохраняется до тех пор, пока слой не разделится на отдельные сгущения, что требует специального рассмотрения.

Ленинградский государственный
университет

Примечание при корректуре. Отметим, что к настоящему времени вышеиспользованный метод модернизирован и применен к некоторым другим моделям галактик [4].

NON-LINEAR STATIONARY DENSITY WAVES. II. WAVES OF FINITE AMPLITUDE IN A THIN STAR LAYER

S. N. NURITDINOV

In the article stationary periodic density waves of finite amplitude in an infinitely thin star layer is considered. In our solution of the problem a well-known non-linear effect — the generation of high order harmonics — is found. The derived dependence of the wavelength upon its amplitude denotes a destabilizing influence of the non-linearity of the wave.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Н. Нуритдинов*, Астрофизика, 11, 135, 1975.
2. *О. Блакьер*, Анализ нелинейных систем, Мир, М., 1969.
3. *Н. Н. Моисеев*, Асимптотические методы нелинейной механики, Наука, М., 1969.
4. *С. Н. Нуритдинов*, в сб. «Кинематические и динамические характеристики отдельных звездных систем», Изд. «ФАН» Уз. ССР, Ташкент, 1978, стр. 142.