УДК 523.035

О ЗАДАЧАХ ПЕРЕНОСА В БЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДЕ

В настоящей заметке предлагается один вариант установления связи между задачами переноса излучения в бесконечной и полубесконечной средах. Мы проиллюстрируем наш подход на примере задач переноса, которые в случае бесконечной среды сводятся к решению скалярных интегральных уравнений вида

$$S(\tau) = S_0(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} K(|\tau - \tau'|)\, S(\tau')\, d\tau', \tag{1}$$

где

$$K(\tau) > 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} K(|\tau|)\, d\tau = \lambda \leqslant 1. \tag{2}$$

К таким уравнениям сводятся задачи когерентного или полностью некогерентного изотропного рассеяния в однородном пространстве. В обоих случаях $K(\tau)$ допускает представления вида (см. [1, 2])

$$K(\tau) = \int_a^b e^{-\tau s}\, d\sigma(s), \qquad 0 \leqslant a < b \leqslant \infty. \tag{3}$$

Перепишем (1) в операторной форме:

$$(I - K)\cdot S = S_0,$$

где I — единичный оператор, а K — интегральный оператор на оси с ядром $K(|\tau - \tau'|)$, то есть

$$(Kf)_{(\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} K(|\tau - \tau'|)\, f(\tau')\, d\tau'.$$

Рассмотрим следующую задачу: найти функцию $U(\tau) \in L_1(0, \infty)$ такую, чтобы оператор $I - K$ был представлен в виде произведения

$$I - K = (I - L_-)(I - L_+), \tag{4}$$

где $L_\pm$ интегральные операторы вида

$$L_+ f = \int\limits_{-\infty}^{\tau} U(\tau - t) f(t)\, dt,$$

$$L_- f = \int\limits_{\tau}^{\infty} U(t - \tau) f(t)\, dt.$$

Раскрывая равенство (4) с учетом правила композиции ядер при умножении интегральных операторов, приходим к следующему нелинейному функциональному уравнению относительно $U(\tau)$:

$$U(\tau) = K(\tau) + \int\limits_{0}^{\infty} U(t)\, U(\tau + t)\, dt, \quad \tau > 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) совпадает с уравнением факторизации (4) работы [3]. Итак, путем решения уравнения (5) решается задача переноса не только в полубесконечной, но и в бесконечной среде.

Уравнение (5) подробно изучено в [3], где также указано на его связь с уравнением Амбарцумяна: если $K(\tau)$ допускает представления вида (3), то

$$U(\tau) = \int\limits_{a}^{b} e^{-\tau s} \varphi(s)\, d\sigma(s), \tag{6}$$

где φ удовлетворяет уравнению Амбарцумяна

$$\varphi(s) = 1 + \int\limits_{a}^{b} \frac{\varphi(s)\, \varphi(s')}{s + s'}\, d\sigma(s'). \tag{7}$$

Перейдем к уравнению (1). Его решение имеет вид

$$S(\tau) = S_0(\tau) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau - t)\, S_0(t)\, dt, \tag{8}$$

где $\Gamma(\tau) = \Gamma(-\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\Gamma(\tau) = K(|\tau|) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(|\tau - t|)\, \Gamma(t)\, dt. \tag{9}$$

При $K(\tau)=(\lambda/2)\,E_1(\tau)$ уравнение (9) было получено в [4] при решении задачи о точечном источнике в бесконечной среде.

Факторизация (4) сводит (8) к уравнениям

$$F(\tau)=K(|\tau|)+\int\limits_{\tau}^{\infty}U(t-\tau)\,F(t)\,dt, \tag{10}$$

$$\Gamma(\tau)=F(\tau)+\int\limits_{-\infty}^{\tau}U(\tau-t)\,\Gamma(t)\,dt. \tag{11}$$

В теории переноса в полубесконечной среде одной из основных функций является $\Phi(\tau)$, определяемая из уравнения

$$\Phi(\tau)=U(\tau)+\int\limits_{0}^{\tau}U(\tau-t)\,\Phi(t)\,dt, \quad \tau>0. \tag{12}$$

Перепишем (10) в виде

$$F(\tau)=K(|\tau|)+\int\limits_{0}^{\infty}U(t)\,F(\tau+t)\,dt. \tag{13}$$

Сравнивая (13) с (5) и (11), получаем

$$F(\tau)=\begin{cases}U(\tau) & \text{при} \quad \tau>0,\\ \Phi(-\tau) & \text{при} \quad \tau<0.\end{cases} \tag{14}$$

Решение уравнения (11) имеет вид

$$\Gamma(\tau)=F(\tau)+\int\limits_{-\infty}^{\tau}\Phi(\tau-t)\,F(t)\,dt. \tag{15}$$

С учетом четности функции $\Gamma(\tau)$ и формулы (14) получаем искомую формулу

$$\Gamma(\tau)=\Phi(\tau)+\int\limits_{0}^{\infty}\Phi(t)\,\Phi(\tau+t)\,dt, \quad \tau>0. \tag{16}$$

В частном случае задачи когерентного рассеяния формула (16) была получена в [2], исходя из физических соображений.

Уравнение (1) относится к простейшим уравнениям в свертках и допускает замкнутое аналитическое решение с помощью преобразования Фурье. Однако численные расчеты по этим формулам, как правило, сопряжены с большими аналитическими трудностями ввиду быстрой осцилляции подынтегральных функций. Иногда удается избежать этих трудностей путем перехода к новым интегралам с подынтегральными функциями более «спокойного» поведения.

Результаты настоящей заметки позволяют использовать решение полубесконечной задачи для решения аналогичной задачи в бесконечной среде. Установление связи между двумя задачами позволит также контролировать точность приближенного решения полубесконечной задачи путем вычисления с его помощью некоторых характеристик поля излучения в бесконечной среде, которые легко могут быть найдены непосредственно.

Описанный выше подход предполагается применить к задачам некогерентного рассеяния с общим законом перераспределения.

В заключение автор выражает благодарность Н. Б. Енгибаряну за постановку задачи и ценные указания.

On the transfer problems in an infinite medium. By using factorization of integral operators the relation between radiation transfer problems in an infinite and semi-infinite media is derived.

20 марта 1978
Армянский педагогический институт им. Х. Абовяна

М. С. ГЕВОРГЯН

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат. М., 1956.
2. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
3. *Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян*, Мат. сборник, 97, 35, 1975.
4. *В. А. Амбарцумян*, Научные труды, т. I, Ереван, 1960.

УДК 523.855

ИССЛЕДОВАНИЕ «ЭФФЕКТА КРАЯ ПОЛЯ» НА ОСНОВЕ ДАННЫХ МОРФОЛОГИЧЕСКОГО КАТАЛОГА ГАЛАКТИК

Использование данных Морфологического каталога галактик (МКГ) [1], составленного на основе карт Паломарского атласа неба (ПА), позволило исследовать, так называемый, «эффект края поля», который, несмотря на достоинства 48″ телескопа Шмидта, должен присутствовать и в случае ПА.