

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 14

АВГУСТ, 1978

ВЫПУСК 3

УДК 524.3/4—32+524.7

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ МОДЕЛЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАСС В ГАЛАКТИКАХ

С. А. КУТУЗОВ, В. О. СЕРГЕЕВ

Поступила 3 июля 1977

Пересмотрена 12 января 1978

Рассматривается модель распределения масс с изоповерхностями в виде подобных и соосных сфероидов. Интегральное уравнение, связывающее пространственную плотность с круговой скоростью, преобразовано к виду, который обеспечивает довольно быструю сходимость последовательных приближений.

При любом методе решения задачи происходит дифференцирование функции, полученной из наблюдений. Предложенный метод применим к недифференцируемым функциям и учитывает априорные предположения о гладкости точного решения.

Метод реализован на ЭВМ, опробован на теоретических примерах и применен к расчету распределения масс в галактике М 31.

Для определения распределения масс по данным о вращении галактики часто используются сфероидальные модели. При решении соответствующих этим моделям уравнений необходимо дифференцировать функцию, значения которой получены из наблюдений и известны с некоторой ошибкой. Характер ошибок требует предварительного сглаживания данных. В результате получаемое решение существенно зависит от выбранной процедуры сглаживания. Вопрос о корректности постановки задачи моделирования звездных систем по измерениям скорости вращения поднят Л. М. и И. Л. Генкиными [1, 2]. Настоящая работа, о которой докладывалось в 1976 г. [3], посвящена методу решения задачи, зависящему от априорных предположений о гладкости функции плотности массы в галактике. Разработан и реализован на ЭВМ алгоритм решения задачи, проведены численные эксперименты и получено распределение массы в галактике М 31.

1. *Интегральное уравнение для плотности.* В сфероидальной модели в качестве изоповерхностей плотности масс ρ принимаются подобные эллип-

соиды вращения с экваториальной полуосью a и отношением полуосей $\varepsilon \in [0, 1]$. Зависимость между круговой скоростью V в экваториальной плоскости на расстоянии R от оси вращения и плотностью определяется формулой (G — гравитационная постоянная):

$$V^2(R) = 4\pi G\varepsilon \int_0^R \frac{\rho(a) a^2}{\sqrt{R^2 - (1 - \varepsilon^2) a^2}} da. \quad (1)$$

Данные о вращении галактик позволяют оценить $V^2(R)$, и тогда для определения ρ следует решить интегральное уравнение Вольтерра первого рода.

Это уравнение использовалось и исследовалось во многих работах и, в частности, в работах [4—9]. При $0 < \varepsilon < 1$ решения в конечном виде для произвольных функций V не существует. Мы рассмотрим численное решение задачи. Предварительно преобразуем уравнение.

Вводя новые переменные и обозначения

$$\left. \begin{aligned} x &= R^2, \quad t = a^2, \quad \alpha = 1 - \varepsilon^2, \\ \varphi(t) &= 2\pi G\varepsilon \sqrt{t} \rho(\sqrt{t}), \quad f(x) = V^2(\sqrt{x}), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

получаем

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x - \alpha t}} dt = f(x), \quad x \in [0, R_0^2], \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (3)$$

Наибольший интерес представляют сплюснутые модели с α , близкими к единице. Будем пока считать функцию $\varphi(x)$ непрерывной, а функцию $f(x)$ дифференцируемой. Дифференцируя обе части уравнения (3) по x , получим интегральное уравнение второго рода:

$$\varphi(x) - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \alpha} \sqrt{x} \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x - \alpha t)^{3/2}} dt = \sqrt{1 - \alpha} \sqrt{x} \frac{df}{dx}. \quad (4)$$

При $\alpha \rightarrow 1$ интегральный оператор данного уравнения стремится в пространстве непрерывных функций к единичному оператору, так что при α , близких к 1, последовательные приближения (ряд Неймана) сходятся медленно.

Для построения быстро сходящегося итерационного процесса одним из авторов [10] был предложен следующий способ. К уравнению (3) применяется оператор Абеля (этот же прием использовался в [9]). В результате получаем интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\pi} \sqrt{1-\alpha} \int_0^x \frac{\varphi(t) \sqrt{t}}{(x-\alpha t) \sqrt{x-t}} dt = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt = \varphi_1(x). \quad (5)$$

При $\alpha \rightarrow 1$ интегральный оператор этого уравнения также стремится к единичному. Складывая три уравнения: уравнение (3), умноженное на $\sqrt{1-\alpha}/2\sqrt{x}$, уравнение (4) и уравнение (5), умноженное на некоторый параметр λ , получаем

$$\varphi(x) - \sqrt{1-\alpha} \int_0^x \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{x}} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{x-\alpha t}} - \frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x-t}} \right) \frac{\sqrt{t}}{x-\alpha t} \varphi(t) dt = g(x), \quad (6)$$

где

$$g(x) = \frac{d}{dx} \left[\sqrt{1-\alpha} \sqrt{x} f(x) + \frac{\lambda}{\pi} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt \right].$$

Заметим, что свободный член есть линейная комбинация известных решений $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ уравнения (3) при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ соответственно:

$$g(x) = \sqrt{1-\alpha} \varphi_0(x) + \lambda \varphi_1(x).$$

В случае $\lambda = 1 - \sqrt{1-\alpha}$ функция $g(x)$ совпадает с интерполяционным решением, предложенным Г. М. Идлисом [7]. Интересно, что при этом значении λ интеграл от ядра уравнения (6) равен нулю.

В дальнейшем будем полагать $\lambda = \alpha$. Можно показать, что норма интегрального оператора в уравнении (6) не превосходит величины 0.42 независимо от значения α . Таким образом, исходное уравнение (3) преобразовано в уравнение (6), для которого последовательные приближения с начальной функцией $g(x)$ сходятся достаточно быстро.

Перепишем уравнение (6) (при $\lambda = \alpha$) в операторном виде:

$$\varphi - K_\alpha \varphi = g. \quad (7)$$

Ядро интегрального оператора K_α равно

$$K_\alpha(x, t) = \begin{cases} \frac{\alpha \sqrt{1-\alpha}}{x-\alpha t} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{x}} \left(\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{x-\alpha t}} - \frac{1}{\pi \sqrt{x-t}} \right), & t \in [0, x] \\ 0, & t > x. \end{cases}$$

Решение уравнения (7) получаем в виде ряда Неймана:

$$\varphi = g + K_\alpha g + K_\alpha^2 g + \dots \quad (8)$$

Функция g выражается через известную функцию f :

$$g = F_0 f, \quad (9)$$

где F_0 — оператор, включающий дифференцирование. Таким образом, согласно (8), дифференцирование проводится до итерационного процесса.

Можно перестроить итерационный процесс так, чтобы дифференцирование стало заключительной операцией. Для этого введем интегральный оператор U_α с ядром

$$U_\alpha(x, t) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{t}} K_\alpha(x, t) \quad (10)$$

и оператор G_α , не содержащий дифференцирования:

$$G_\alpha f = z; \quad z(x) = \sqrt{1-\alpha} f(x) + \frac{\alpha}{\pi \sqrt{x}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt.$$

Тогда (8) можно переписать в виде

$$\varphi = \frac{d}{dx} \left[\sqrt{x} (z + U_\alpha z + U_\alpha^2 z + \dots) \right]. \quad (11)$$

Степень гладкости функций $\sqrt{x} U_\alpha^k z$ повышается с ростом k , и при численном дифференцировании этот факт следует учитывать.

2. Метод регуляризации. В любом способе решения уравнения (3) при $\alpha \neq 1$ присутствует операция дифференцирования функции $f(x)$. Между тем, вместо дифференцируемой функции $f(x)$ мы получаем из наблюдений обремененную погрешностью $\delta(x)$ недифференцируемую функцию f_δ :

$$f_\delta(x) = f(x) + \delta(x); \quad |\delta(x)| \leq \delta. \quad (12)$$

Задача решения уравнения (3) не является корректно поставленной. При решении таких задач необходимо предполагать априори, что решение существует и принадлежит некоторому множеству \mathcal{M} (множеству корректности [11, 12]). Это предположение позволяет выбирать методы решения уравнения.

В работе Л. М. Генкиной и Р. К. Мухаметкалиевой [13] для решения уравнения (1) применяется метод регуляризации А. Н. Тихонова [14]. По этому методу приближенное решение определяется как функция, минимизирующая функционал, который характеризует невязку и гладкость приближенного решения.

Под регуляризацией подразумеваются также методы, в которых приближенное решение определяется как решение задачи с оператором, близ-

ким к заданному [12, 14, 15]. К этим методам предъявляется единственное требование, чтобы при стремлении к нулю уровня погрешности исходных данных получаемое решение стремилось к точному решению задачи.

Рассмотрим один из таких методов [16] для решения уравнения (7) с правой частью (9).

Зададим последовательность операторов E_h , сходящуюся в пространстве непрерывных функций при $h \rightarrow 0$ к единичному оператору. В качестве приближенного решения уравнения (7) возьмем функцию φ_h , являющуюся решением уравнения

$$\varphi_h - E_h K_2 \varphi_h = E_h F_2 f. \quad (13)$$

Операторы E_h следует выбирать таким образом, чтобы произведение операторов $E_h F_2$ было определено и для недифференцируемых функций f . Обозначим через $\varphi_{h\delta}$ решение уравнения (13) при $f = f_\delta(x)$.

Оценим отклонение приближенного решения $\varphi_{h\delta}$ от точного в метрике пространства непрерывных функций:

$$\|\varphi_{h\delta} - \varphi\| = \|\varphi_{h\delta} - \varphi_h + \varphi_h - \varphi\| \leq C \cdot \|E_h F_2 \delta + (E_h - E)\varphi\|, \quad (14)$$

где $C = \|(E - E_h K_2)^{-1}\|$, E — единичный оператор.

Если φ — гладкая функция, то при $h \rightarrow 0$ функция $(E_h - E)\varphi$ стремится к нулю. Функция же $E_h F_2 \delta$ при $h \rightarrow 0$ стремится к бесконечности. Тогда существует оптимальное значение h , зависящее от уровня погрешности δ , от гладкости точного решения и от вида операторов E_h .

Мы будем предполагать, что точное решение φ удовлетворяет условию Липшица с показателем $1/2$:

$$|\varphi(x+t) - \varphi(x)| \leq A \cdot |t|^{1/2}, \quad A > 0, \quad 0 \leq x \leq R_\delta^2. \quad (15)$$

Операторы E_h зададим следующим образом:

$$E_h f = \frac{1}{h^2} \int_{-h}^h (h - |t|) f(x+t) dt. \quad (16)$$

Произведение оператора E_h с оператором дифференцирования определено для интегрируемых функций:

$$E_h \left(\frac{df}{dt} \right) = \frac{1}{h^2} \int_{-h}^h \text{sign}(t) \cdot f(x+t) dt.$$

Оценим функцию $(E_h - E)\varphi$:

$$(E_h - E)\varphi = \frac{1}{h^2} \int_{-h}^h (h - |t|) [\varphi(x+t) - \varphi(x)] dt$$

и

$$|(E_h - E)\varphi| \leq \frac{2A}{h^2} \int_0^h (h-t) \sqrt{t} dt = \frac{8}{15} A \sqrt{h}.$$

Для $E_h F_{\alpha} \delta$ получаем оценку

$$|E_h F_{\alpha} \delta| \leq \beta(\alpha) \frac{\delta}{h^2} \int_0^h (\sqrt{x+t} + \sqrt{x-t}) dt \leq 2\beta(\alpha) \frac{\delta}{h} \sqrt{x},$$

$$\beta(\alpha) = \sqrt{1-\alpha} + \frac{2\alpha}{\pi}.$$

Выберем теперь величину h таким образом, чтобы правая часть в оценке

$$|E_h F_{\alpha} \delta + (E_h - E)\varphi| \leq \frac{8}{15} A \sqrt{h} + 2\beta(\alpha) \frac{\delta}{h} \sqrt{x}$$

достигала минимума по h . Минимум достигается при h , равном

$$h = \left[\frac{15}{2} \beta(\alpha) \right]^{2/3} A^{-2/3} \delta^{2/3} x^{1/3} \quad (17)$$

и равен

$$6 \left(\frac{2}{15} \right)^{2/3} \cdot \beta^{1/3}(\alpha) A^{2/3} \delta^{1/3} x^{1/6}.$$

При таком выборе величины h получаем оценку

$$|\varphi_{hh}(x) - \varphi(x)| < 1.57 \cdot C \beta^{1/3}(\alpha) A^{2/3} \delta^{1/3} x^{1/6}.$$

Величины A и δ можно оценивать лишь на отрезке $[0, x+h(x)]$. Если значения $x-h(x)$ или $x+h(x)$ выходят из области задания функции $f(x)$, то пределы интегрирования в (16) следует соответствующим образом изменить.

Таким образом, если уровень погрешности δ правой части исходного уравнения (3) стремится к нулю, то построенное приближенное решение стремится к точному решению задачи.

Операторы E_h являются сглаживающими операторами. Выбор параметра сглаживания h по формуле (17) учитывает гладкость точного решения и уровень погрешности.

Обычно сглаживание применяют только к правой части уравнения (3), перед тем как перейти к уравнению (4) или (6). Предложенный метод предусматривает также и изменение оператора уравнения. В нашем случае вычисление оператора $E_h K_a$ не намного сложнее, чем вычисление оператора K_a . Ядро интегрального оператора, а также и интеграл от него можно выразить через элементарные функции. Изменяя порядок интегрирования, получаем для функции $E_h K_a \varphi_{h_0}$ следующее выражение:

$$E_h K_a \varphi_{h_0} = \frac{1}{h^2} \int_{-h}^h (h - |\tau|) \int_0^{x+\tau} K_a(x + \tau, t) \varphi_{h_0}(t) dt d\tau = \int_0^{x+h} L(x, t) \varphi_{h_0}(t) dt.$$

Ядро $L(x, t)$ можно вычислить по формуле:

$$h^2 L(x, t) = \begin{cases} -P(x+h, t) + 2P(x, t) - P(x-h, t) & \text{при } t \in [0, x-h], \\ -P(x+h, t) + 2P(x, t) - P(t, t) - (x-h-t) & \text{при } t \in [x-h, x], \\ -P(x+h, t) + P(t, t) + (x+h-t) & \text{при } t \in [x, x+h], \end{cases}$$

где

$$P(x, t) = \frac{2\alpha}{\pi} (x - \alpha t) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-t}{(1-\alpha)t}} + \\ + \sqrt{1-\alpha} \left[\sqrt{x(x-\alpha t)} - \frac{2\alpha}{\pi} \sqrt{t(x-t)} + \alpha t \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x-\alpha t}) \right].$$

Правую часть уравнения (13) представим в виде

$$E_h F_a f_0 = H f_0 = \int_0^{x+h} H(x, t) f_0(t) dt,$$

где функция $H(x, t)$ равна:

$$h^2 H(x, t) = \begin{cases} \frac{2\alpha}{\pi} (\sqrt{x+h-t} - 2\sqrt{x-t} + \sqrt{x-h-t}) & \text{при } t \in [0, x-h], \\ \frac{2\alpha}{\pi} (\sqrt{x+h-t} - 2\sqrt{x-t}) - \sqrt{(1-\alpha)t} & \text{при } t \in [x-h, x], \\ \frac{2\alpha}{\pi} \sqrt{x+h-t} + \sqrt{(1-\alpha)t} & \text{при } t \in [x, x+h]. \end{cases}$$

Перепишем уравнение (13) в следующем виде:

$$\bar{\varphi}_{hi} - L\varphi_{hi} = v, \quad v = Hf_3 \quad (18)$$

и построим для его решения ряд Неймана:

$$\varphi_{hi} = v + Lv + L^2v + \dots \quad (19)$$

Сравнивая этот ряд с рядом (11), заключаем, что предложенный способ можно рассматривать как метод численного дифференцирования каждого члена ряда (11) с автоматическим учетом его гладкости.

3. *Решение регуляризованного уравнения.* Для решения уравнения (18) применим итерационный процесс (19). Интегральный оператор L заменим конечномерным, считая функцию φ_{hi} кусочно постоянной в окрестности заданных узлов. Особенностью рассматриваемой задачи является неравномерность сетки узлов и наличие параметра усреднения h .

Пусть $f_i(x)$ задана на упорядоченной по возрастанию последовательности точек $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N \leq R_0^2$. Обозначим

$$x_{N+1} = x_N + \frac{1}{2}(x_N - x_{N-1}).$$

Определим число $k(i)$ как номер левой из пары точек, между которыми оказывается точка $x_i + h$:

$$x_i + h \in [x_{k(i)}, x_{k(i)+1}), \quad k(i) \leq N.$$

Пределы n и l изменения индекса i ($n \leq i \leq l$) определяются тем, что в уравнении (18) функции φ_{hi} и f_i должны быть определены на всех отрезках $[x_i - h, x_i + h]$:

$$x_n - h \geq 0, \quad x_l + h \leq x_{N+1}.$$

Разбивая отрезок интегрирования точками

$$r_j = \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j), \quad 1 < j \leq k(i); \quad r_1 = 0, \quad r_{k(i)+1} = x_i + h,$$

заменим (18) на систему уравнений

$$\varphi_{hi}(x_i) - \sum_{j=n}^j \int_{r_j}^{r_{j+1}} L(x_i, t) \bar{\varphi}_{hi}(t) dt = \sum_{j=1}^{k(i)} \int_{r_j}^{r_{j+1}} H(x_i, t) f_3(t) dt, \quad i = n, \dots, l.$$

В левой части этой системы для равенства числа неизвестных $\varphi_{h_i}(x_i)$ числу уравнений суммирование по j ведется от n до $J = \min[k(i), I]$; в правой же части суммирование идет по всем индексам j .

Предполагая, что $f_i(x)$ постоянна на отрезках $[r_j, r_{j+1}]$ и обозначая

$$f_i(x) = c_j, \quad \varphi_{h_i}(x) = u_j, \quad x \in [r_j, r_{j+1}],$$

получим систему линейных алгебраических уравнений

$$u_i - \sum_{j=n}^J a_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{k(i)} b_{ij} c_j, \quad i = n, \dots, J, \quad (20)$$

где

$$a_{ij} = \int_{r_j}^{r_{j+1}} L(x_i, t) dt, \quad b_{ij} = \int_{r_j}^{r_{j+1}} H(x_i, t) dt.$$

Эти величины могут быть легко вычислены, так как (при $\alpha \neq 0$)

$$\begin{aligned} \int P(x, t) dt &= \frac{\alpha}{2} \sqrt{1-\alpha^2} t^2 \ln(|\sqrt{x} - \sqrt{x-\alpha t}|) - \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{1-\alpha^2} \sqrt{(x-t)t^3} - \\ &- \frac{1}{\pi} (x-\alpha t)^2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-t}{(1-\alpha)t}} + \frac{1}{\pi} \sqrt{1-\alpha x^2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-t}{t}} - \\ &- \frac{1}{2\alpha} \sqrt{1-\alpha^2} \left(\sqrt{x(x-\alpha t)^3} + \sqrt{x^3(x-\alpha t)} + \frac{1}{4} \alpha^2 t^2 \right); \\ \int P(t, t) dt &= \frac{1}{8} \sqrt{1-\alpha^2} \{ 4\sqrt{1-\alpha} - \alpha + 4\alpha \ln[(1 + \sqrt{1-\alpha})\sqrt{t}] \}. \end{aligned}$$

Интегралы от функции $H(x_i, t)$ также выражаются через элементарные функции.

Пределы n, J изменения индексов и следовательно число уравнений системы (20) зависят от выбора параметра регуляризации.

Чтобы получать полную систему уравнений, можно менять величину h таким образом, чтобы $x_i - h_i \geq 0$ и $x_i + h_i \leq x_{N+1}$. Такое изменение достаточно провести только для точек x_i , близких к краям области задания f_i . Полную систему уравнений можно получить также продолжая функцию за пределы области ее задания, например положив ее равной нулю. В остальных точках x_i величину h_i можно

выбирать, учитывая особенности задания функции f_i . Например, в точках x_i величину h_i выбираем такой, чтобы на отрезках $[x_i - h_i, x_i + h_i]$ содержалось одинаковое число узлов x_j . В этом случае параметр сглаживания есть число таких узлов.

Число узлов для регуляризации в окрестности точки x_i можно определять исходя из разброса значений f_i . Обозначим через σ^2 дисперсию наблюдаемой круговой скорости:

$$\sigma^2 = M(V - MV)^2 = MV^2 - (MV)^2,$$

а через σ_j^2 дисперсию ее квадрата:

$$\sigma_j^2 = M(V^2 - MV^2) = MV^4 - (MV^2)^2.$$

Здесь M — оператор математического ожидания.

Первый член можно выразить через центральный момент четвертого порядка. Считая, что распределение имеет нулевой эксцесс, получаем:

$$M(V - MV)^4 = MV^4 - 4(MV^3)MV + 6(MV^2)(MV)^2 - 3(MV)^4 = 3\sigma^4.$$

Чтобы найти второй член, воспользуемся моментом третьего порядка, считая распределение симметричным:

$$M(V - MV)^3 = MV^3 - 3(MV^2)MV + 2(MV)^3 = 0.$$

Окончательно получаем

$$\sigma_j^2 = 4(MV)^2\sigma^2 + 2\sigma^4.$$

Определим вес значения f_i как величину, обратную σ_j^2 . Далее веса нормируются так, чтобы средний вес одного значения равнялся единице. При этом в качестве MV берется некоторое сглаженное значение наблюдаемой круговой скорости.

Теперь выбор числа узлов для регуляризации в окрестности точки x_i можно провести следующим образом. Слева и справа от точки x_i будем добавлять по одной точке одновременно, пока суммарный вес группы точек не превысит заданного значения w .

Для отработки алгоритма был предпринят численный эксперимент. Функция $\varphi(x)$ была задана некоторой непрерывной пилообразной кривой. Функция $f(x)$ вычислялась непосредственно по формуле (3) для равноотстоящих точек, а затем ее значения «портислись» синусоидальной добавкой. Значения полученной функции $f_i(x)$ изображены на рис. 1 точками. Далее по $f_i(x)$ находилось решение системы (20) с различными значениями h . На рис. 2 решение для $h = \Delta x$ изображено точками а для $h = 3\Delta x$ сплошной линией. Осцилляции, сильно искажающие решение при малом h ,

исчезают с ростом h , а ход точного решения восстанавливается, хотя и в сглаженном виде.

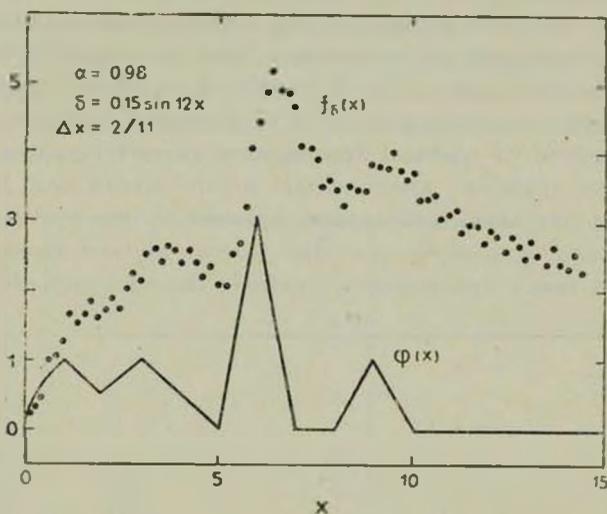


Рис. 1.

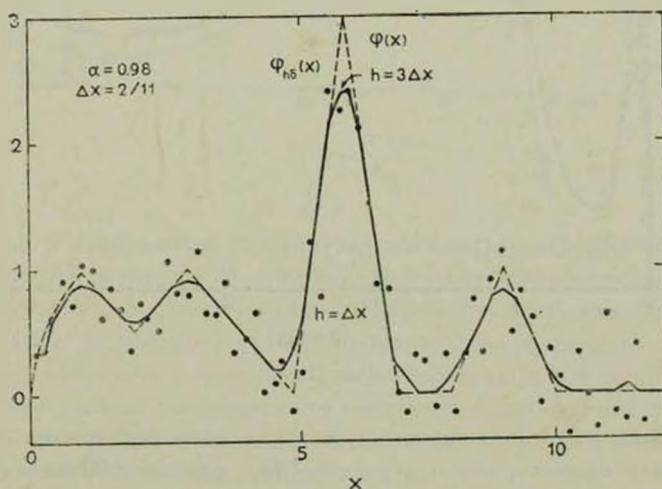


Рис. 2.

4. Модель распределения масс в галактике М 31. Разработанный выше метод был применен к наблюдательным данным о вращении плоской подсистемы эмиссионных сгущений в галактике М 31, опубликованным Ру-

бин и Фордом [17]. Всего было использовано 88 значений скорости вращения, представленных на рис. 3 точками. Для первых 29 точек с $R < 1.6$ кпс значения снимались с графиков 6 и 7 работы [17], а их стандартные отклонения σ_i были оценены нами в 30 км/сек, исходя из разброса точек и учитывая, что эти данные получены в основном по одной спектральной линии. Из 67 значений с $3.2 \text{ кпс} < R < 24 \text{ кпс}$, помещенных авторами в таблицу, мы образовали 59, заменив 8 пар значений с совпадающими расстояниями их средневзвешенными с соответствующими σ_i . Полученная скорость вращения имеет весьма нерегулярный ход. Не вдаваясь в подробное исследование кинематики, принимаем, что круговая скорость совпадает со скоростью вращения. Это должно хорошо выполняться для плоской подсистемы с пренебрежимо малыми остаточными скоростями.

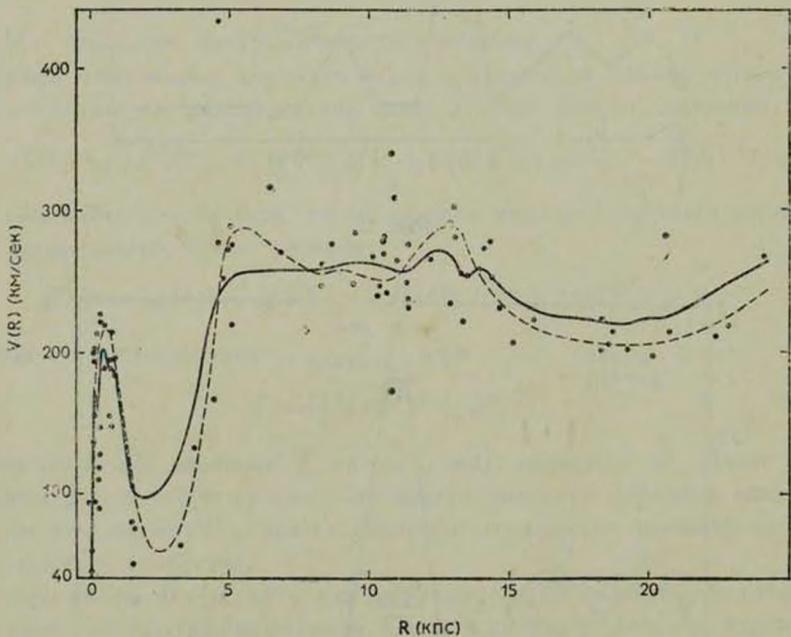


Рис. 3.

При переводе угловых расстояний в линейные расстояние до галактики М 31 было принято, как и в работе [17], равным 690 кпс. Отношение осей сфероида взято 1 : 5, то есть $a = 0.96$. Это согласуется со средней фотометрической оценкой В. С. Сизикова [18].

Для выбора параметра регуляризации вычислялись веса значений V^2 и решение системы (20) проводилось с различными значениями ω . Кроме того, эта система решалась с выбором параметра регуляризации по числу точек на отрезке $[x_i - h, x_i + h]$, причем число таких точек пробегало те же

значения, что и величины w предыдущего варианта. Оказалось, что соответствующие решения отличаются незначительно, во втором варианте решение получается более гладкое. Для веса $w = 9$ среднеквадратическое отклонение круговой скорости, вычисленное подстановкой решения в исходное уравнение (3), от наблюдаемой в полтора раза больше среднеквадратического от стандартного отклонения σ . Эта сглаженная скорость изображена на рис. 3 непрерывной кривой. Соответствующее решение — кривая $\rho(a)$ — изображено на рис. 4 также непрерывной линией.

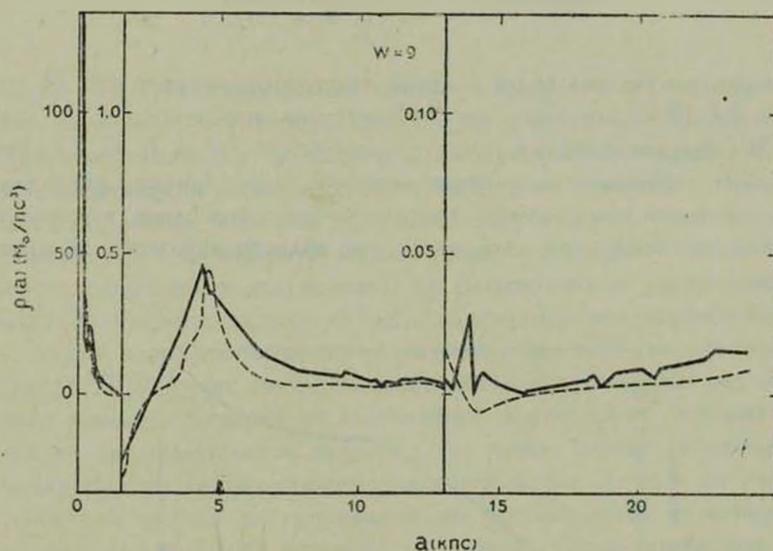


Рис. 4.

На рис. 4 изображены еще результаты следующего эксперимента: значения заданной функции V сглаживались совершенно произвольным образом (прерывистая кривая на рис. 3), строилось приближенное решение — четыре члена в формуле (11), производная заменялась разностным отношением. Полученное решение $\rho(a)$ нанесено на рис. 4 прерывистой кривой. В целом кривые распределения масс имеют одинаковый ход, но количественные расхождения велики, особенно около $R = 14$ кпс, где получены отрицательные значения плотности.

Полученное решение системы (20) показывает существование очень плотного ядра с радиусом 0.5 кпс. Ход плотности от 1.5 кпс до 2.7 кпс нельзя считать реальным несмотря на регуляризацию. У Рубин и Форда [17] в этой области также получились отрицательные плотности. Возможно, что здесь проявляется отличие наблюдаемых скоростей от круговых

вследствие большой дисперсии остаточных скоростей и расширения подсистемы эмиссионных сгущений. Тем не менее, здесь возможен локальный минимум плотности. Начиная с 3 клс скачки в плотности хорошо сглаживаются. Интересно возрастание плотности от 16 до 24 клс.

На рис. 5 дана масса $M(a)$, заключенная внутри сфероиды с экваториальной полуосью a (для веса $w = 9$). Будучи интегральной характеристикой:

$$M(a) = 4\pi \int_0^a \sqrt{1-x} R^2 \rho(R) dR,$$

эта функция получается более гладкой. Внутри сфероиды с $a \leq 24$ клс заключено $2.4 \cdot 10^{11}$ солнечных масс. Отсутствие асимптотического приближения $M(a)$ к постоянному пределу, отмеченное также В. С. Сизиковым [18], может указывать на наличие мощного гало. Однако сфероидальная модель, в которой игнорируется притяжение внешних слоев, в принципе не может без экстраполяции дать массу вне области наблюдаемой круговой скорости.

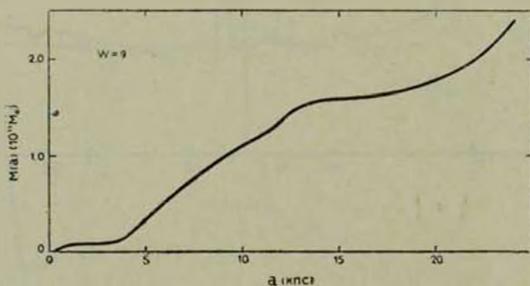


Рис. 5.

Вычисления проводились на ЭВМ М-222 по программе, составленной на языке АЛГОЛ-60 для транслятора ТА-1М. Расчеты подтверждают быструю сходимость процесса итераций — для решения системы линейных алгебраических уравнений (20) с тремя верными цифрами достаточно 5 итераций.

Недавно Рейц и Фабiani [19] численно решали уравнение типа (4) для функции $M(a)$:

$$M(\sqrt{x}) - \frac{a}{2} \sqrt{1-x} \sqrt{x} \int_0^x \frac{M(\sqrt{t})}{(x-t)^{3/2}} dt = \frac{1}{G} \sqrt{1-x} \sqrt{x} V^2(\sqrt{x}). \quad (21)$$

Авторы сглаживают исходные данные, приведенные в работе [17], с помощью кубических сплайнов, обеспечивающих непрерывность второй производной. Процесс последовательных приближений для уравнения (21), как и для уравнения (4), вообще говоря, сходится медленно. При α , близких к единице, матрица соответствующей системы алгебраических уравнений плохо обусловлена, что и было отмечено авторами.

В работе Л. М. Генкиной [1] уравнение (1) дополнялось гидродинамическим уравнением

$$V^2(R) = W^2(R) - s^2 \frac{d \ln \rho(R)}{d \ln R}, \quad (22)$$

в котором $W(R)$ — наблюдаемая скорость вращения, s — известная дисперсия скоростей. Это уравнение дает поправку к круговой скорости. Однако плохая обусловленность системы для определения ρ приводит при α , близких к единице, к расходимости итерационного процесса.

В нашей работе уравнение (22) используется, но без последнего члена. Понимается, более достоверную модель галактики следует строить с учетом дисперсии скоростей в подсистемах, их расширения и распределения поверхностной яркости, используя весь имеющийся наблюдательный материал. В этом направлении много сделано Я. Эйнасто с сотрудниками (см., например, [20]). У них другой подход к построению модели. Задаются выражения искомым функциям со свободными параметрами, которые определяются по наблюдательным данным. Это тоже способ сглаживания, но здесь задается не только степень гладкости функций, но и их структура. Достоинством метода регуляризации мы считаем отказ от эмпирических выражений для функции описания галактики. Здесь требуются только априорные предположения относительно гладкости решения, что значительно расширяет возможности моделирования. Исходные данные используются непосредственно в виде спектра значений. Решение также получается численно на дискретном множестве точек. Степень сглаживания автоматически регулируется величиной параметра h .

Метод регуляризации может найти применение при построении более сложных, например, гидродинамических моделей, а также моделей, состоящих из подсистем с различной сплюснутостью и различным ходом плотности. В настоящей работе эта задача не ставилась. Основная цель нашей работы состоит в демонстрации необходимости и эффективности применения метода регуляризации к задачам моделирования галактик.

THE REGULARIZATION METHOD BY CONSTRUCTING THE MASS DISTRIBUTION MODELS OF GALAXIES

S. A. KUTUZOV, V. O. SERGEYEV

A mass distribution model with similar co-axial spheroids as equi-density surfaces is considered. The space density is connected with the circular velocity by an integral equation. The latter is modified into the equation allowing fairly rapid convergence of iteration.

Any algorithm of solving the problem includes an operator of differentiation of the function known from the observations. The method for smoothing the observational data is offered. It is connected with an *a priori* supposition on a smoothness of the solution.

The method is applied to the rotational velocities of the M 31 galaxy.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Генкина, Труды Астрофиз. ин-та Каз.ССР, 17, 56, 1971.
2. И. Л. Генкин, Л. М. Генкина, Труды Астрофиз. ин-та АН Каз.ССР, 19, 3, 1972.
3. В. О. Сергеев, С. А. Кутузов, в сб. «Всесоюзная конференция по плазменной астрофизике, Иркутск», М., 1976, стр. 24, 88.
4. Г. Г. Кузмин, Публ. Тартуской обс., 32, 211, 1952.
5. E. M. Burbidge, G. R. Burbidge, K. H. Prendergast, Ap. J., 130, 739, 1959.
6. J. C. Brandt, Ap. J., 131, 293, 1960.
7. Г. М. Идлис, Труды Астрофиз. ин-та АН Каз.ССР, 1, 1961.
8. Т. А. Агекян, Т. Д. Яковлева, Уч. зап. ЛГУ, № 328, 139, 1965.
9. Г. Г. Кузмин, С. А. Кутузов, Публ. Тартуской обс., 35, 316, 1966.
10. В. О. Сергеев, в сб. «Матем. проблемы геофизики», вып. 4, СО АН СССР, 1973, стр. 312.
11. А. Б. Бакушинский, ЖВМ и МФ, 8, 426, 1968.
12. М. М. Лаврентьев, О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосибирск, 1962.
13. Л. М. Генкина, Р. К. Мухаметкалиева, Труды Астрофиз. ин-та АН Каз.ССР, 28, 19, 1976.
14. А. Н. Тихонов, ДАН СССР, 153, 1, 1963.
15. А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, Методы решения некорректных задач, М., 1974.
16. В. О. Сергеев, Вестн. ЛГУ, № 1, 71, 1977.
17. V. C. Rubin, W. K. Ford, Jr. Ap. J., 159, 379, 1970.
18. В. С. Сизиков, Астрофизика, 5, 317, 1969.
19. A. Reiz, F. Fabiani, Astron. Astrophys., 47, 1, 1976.
20. J. Einasto, U. Rummel, IAU Symposium No. 38 "The Spiral Structure of Our Galaxy", Reidel, Dordrecht, 1970, p. 51.