АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 14 | АВГУСТ, 1978 | ВЫПУСК 3

УДК 523.035

О ПРИБЛИЖЕННОМ РАСЧЕТЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

В. П. ГОРЕЛОВ, В. И. ИЛЬИН

Поступила 6 июля 1977
Пересмотрена 21 февраля 1978

Предложен способ получения приближенных аналитических выражений для резольвентных или фундаментальных функций, введенных Соболевым. Эти выражения позволяют записать в простой аналитической форме ряд вспомогательных функций теории переноса излучения как в полупространстве, так и в слое конечной оптической толщины.

Введение. В [1] изложен подход к рассмотрению задач переноса монохроматического излучения в однородном полупространстве при произвольной степени анизотропии рассеяния. Для расчетов характеристик как выходящего из полупространства излучения, так и внутреннего светового режима при произвольных источниках достаточно знания нескольких функций $\Phi^m(\tau)$, названных в [1] фундаментальными.

Эти функции удовлетворяют линейным интегральным уравнениям

$$\Phi^m(\tau) = K^m(\tau) + \int_0^\infty K^m(|\tau - \tau'|)\, \Phi^m(\tau')\, d\tau', \qquad (1)$$

где ядра имеют вид

$$K^m(\tau) = \int_0^1 \Psi^m(\eta)\, e^{-\tau/\eta}\, \eta^{-1}\, d\eta,$$

а m принимает значения 0, 1, 2,..., N. Значение N соответствует наибольшему порядку полинома Лежандра $P_n(\eta)$, учтенного в разложении индикатрисы рассеяния $x(\eta)$ в ряд по $P_n(\eta)$,

$$x(\eta) = \sum_{n=0}^{N} x_n P_n(\eta), \tag{2}$$

и здесь $\arccos \eta$ — угол рассеяния в единичном акте столкновения. Связь $\Psi^m(\eta)$ со значениями x_n при заданном N приводится в [1].

Известны [2] явные выражения для решений уравнения (1). При их использовании необходимо численное интегрирование, так как эти выражения содержат интегралы от функций, которые включают в себя решения $H^m(\eta)$ уравнений Амбарцумяна—Чандрасекара

$$H^m(\eta) = 1 + \eta H^m(\eta) \int_0^1 \Psi^m(\eta') H^m(\eta') \frac{d\eta'}{\eta + \eta'}. \tag{3}$$

Кроме этого, использование точных формул для $\Phi^m(\tau)$ из [2] требует знания корней $\pm k_m \in (-1, 1)$ уравнения

$$1 + k_m^{-1} \int_{-1}^{1} \Psi^m(\eta) \frac{d\eta}{\eta - k_m^{-1}} = 0. \tag{4}$$

В предлагаемой работе изложен один из возможных способов получения приближенных аналитических выражений для решения уравнений вида (1). Знание таких выражений позволяет записать относительно простые формулы для некоторых важных вспомогательных функций. Для получения, например, таких формул для функций $H^m(\eta)$, с помощью которых может быть определен закон отражения полупространством, достаточно воспользоваться выражением [1]

$$H^m(\eta) = 1 + \int_0^\infty \Phi^m(\tau) e^{-\tau/\eta} d\tau. \tag{5}$$

Целесообразность получения относительно простых, но достаточно точных выражений для $\Phi^m(\tau)$ и $H^m(\eta)$ становится особенно понятной при рассмотрении сред, закон рассеяния для которых характеризуется заметной анизотропией, т. е. значение N в (2) достаточно велико. В этом случае велико и число уравнений (1) или (3), для решения которых до настоящего времени применяли лишь численные методы, требующие использования ЭВМ. Идея предлагаемого нами подхода заключается в том, что решение уравнения (1) ищется приближенно в виде суперпозиции дальней асимптотики $\Phi^m(\tau)$ и функций, определяющих ближнюю асимптотику $\Phi^m(\tau)$, а для определения коэффициентов разложения используется более простой путь, чем, например, вариационный метод. Дальняя ($\tau \gg 1$) асимптотика $\Phi^m(\tau)$, как это следует из точных выражений в [2], пропорциональна $e^{-k_m\tau}$, где k_m — наименьший положительный корень (4). При $\tau \sim 0$, как это можно увидеть с помощью метода последовательных приближений, $\Phi^m(\tau) \sim K^m(\tau)$. Функции $\Psi^m(\eta)$ представляют собой [1] четные полиномы от η, так что в общем случае можно записать

$$K^m(\tau) = \sum_{k=0}^{N} a_k^{(m)} E_{2k+1}(\tau), \tag{6}$$

где

$$E_n(\tau) = \int_1^\infty y^{-n} e^{-\tau y} dy,$$

а значения $a_k^{(m)}$ целиком определяются значениями x_n в (2), а также величиной альбедо однократного рассеяния $\lambda \leqslant 1$. В соответствии со всем, только что сказанным, приближенное выражение для $\Phi^m(\tau)$ предлагается записать в виде

$$\Phi^m(\tau) = A_m e^{-k_m\tau} + \sum_{k=0}^{N} A_m^{(2k+1)} E_{2k+1}(\tau). \tag{7}$$

В результате подстановки (7) в (1) приходим к уравнению

$$A_m f_m(\tau) + \sum_{k=0}^{N} A_m^{(2k+1)} \left[E_{2k+1}(\tau) - \int_0^\infty K^m(|\tau - \tau'|) E_{2k+1}(\tau') d\tau' \right] = K^m(\tau), \tag{8}$$

где

$$f_m(\tau) = k_m^{-1} \int_0^1 \Psi^m(\eta) \frac{e^{-\tau/\eta}}{k_m^{-1} - \eta} d\eta,$$

и эта функция может быть записана в явном виде с помощью интегральных экспонент. Если величина $a_0^{(m)}$ в (6) отлична от нуля, то при $\tau \to +0$ левая и правая части (8) не существуют. В этом случае для определения A_m и $A_m^{(2k+1)}$ в (7) потребуем совпадения интегралов по $\tau \in [0, \infty)$ от левой и правой частей (8), умноженных на τ^n, где $n = 0, 1, 2, \ldots, (N+1)$. При $a_0^{(m)} = 0$ число n должно пробегать значения $0, 1, 2, \ldots, N$, а недостающее уравнение получим, потребовав совпадения левой и правой частей (8) при $\tau = 0$. Матричные элементы и правые части получающейся таким образом системы $(N+2)$ линейных неоднородных уравнений относительно A_m и $A_m^{(2k+1)}$ выражаются через

$$\int_0^\infty \tau^n K^m(\tau)\,d\tau, \qquad \int_0^\infty \tau^n f_m(\tau)\,d\tau, \qquad J_{pm} = \int_0^\infty E_p(\tau)\,E_m(\tau)\,d\tau.$$

Формулы для двух первых интегралов могут быть легко получены в каждом конкретном случае и в дальнейшем нами не приводятся. Для расчета J_{nm} мы использовали выражение [3]

$$J_{nm} = \frac{1}{m+n-1} \sum_{p=n,\,m} (-1)^{p+1} \left| \ln 2 + \sum_{l=1}^{p-1} \frac{(-1)^l}{l} \right|.$$

Подстановка (7) в (5) позволяет записать следующую приближенную формулу и для $H^m(\eta)$:

$$H^m(\eta) = 1 + A_m \frac{\eta}{1+k_m\eta} + \\ + \sum_{k=1}^{N+1} A_m^{(2k-1)} \eta^k \left[\ln(1+1/\eta) + \sum_{l=1}^{k-1} \eta^l \frac{(-1)^l}{l} \right] (-1)^k. \tag{9}$$

В свою очередь, с помощью последнего выражения можно получить явную формулу для расчета моментов

$$h_n^m = \int_0^1 \eta^n H^m(\eta)\,d\eta,$$

необходимых при определении с помощью $H^m(\eta)$ функций Амбарцумяна (см. [1]) $\varphi_n^m(\eta)$. Она имеет вид

$$h_n^m = 1 + A_m L_{n+1}^m + \\ + \sum_{k=1}^{N+1} A_m^{(2k-1)} (-1)^{k-1} \left[M_{n+k+1} + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{(-1)^{l-1}}{l(l-k-n-1)} \right], \tag{10}$$

где

$$L_n^m = \frac{(-1)^n \ln(1+k_m)}{k_m^{n+1}} + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(-1)^l}{k_m^{l+1}(n-l)},$$

$$M_n = \int_1^\infty y^{-(n+1)} \ln(1+y)\, dy, \quad n > 0.$$

Формула для вычисления последнего интеграла получена в [3]:

$$M_n = \frac{\ln 2 + (n - 1/2) J_{nn}}{n}.$$

Для иллюстрации возможностей предложенного способа описания $H^m(\eta)$, $\Phi^m(\tau)$, а также других, связанных с $\Phi^m(\tau)$ и $H^m(\eta)$ функций, мы рассмотрели несколько аппроксимаций индикатрисы рассеяния. При этом, как и в [4], где исследовалась дальняя асимптотика $\Phi^m(\tau)$, мы полагали, что при $m \geqslant 1$ уравнение (4) не имеет корней, то есть принимали в (7) $A_m = 0$, а при $m = 0$ это же уравнение имеет лишь пару корней. Исключение представляет лишь случай учета поляризации, о чем будет оговорено отдельно.

1. *Четырехчленная индикатриса*, $N = 3$. Значения x_n в (2) были позаимствованы нами из [5], где они определялись методом наименьших квадратов при аппроксимации нескольких реальных (полидисперсных) индикатрис. Как и в [5], мы рассмотрели консервативный случай $\lambda = 1$, когда корень уравнения (4) равен нулю [1]. Функция $\Psi^0(\eta)$ имеет вид [5]

$$\Psi^0(\eta) = \frac{1}{2} - \frac{x_2}{4} P_2(\eta) - \frac{x_3(5 - x_2)}{12} \eta P_3(\eta),$$

так что (6) в явном виде запишется следующим образом:

$$K^0(\tau) = \frac{1 + 0.25\, x_2}{2} E_1(\tau) + \frac{x_3(5 - x_2) - 3x_2}{8} E_3(\tau) - \frac{5x_3(5 - x_2)}{24} E_5(\tau).$$

Независимость $K^0(\tau)$ от x_1 является следствием того, что $\lambda = 1$. Мы ограничились расчетами только лишь $H^0(\eta)$, так как в [5] точные результаты приведены именно для этой функции. Расчеты показали, что наибольшее значение относительных отклонений значений $H^0(\eta)$, полученных нами по формуле (9), от результатов численного решения уравнения (3) при $m = 0$ на ЭВМ, опубликованных в [5], наблюдается при $\eta \sim 0.1$ и составляет по модулю $\lesssim 0.3\%$ для всех вариантов закона рассеяния из [5]. При увеличении же η, начиная с $\eta \sim 0.2$, относительная погрешность уменьшается, составляя $\lesssim 0.1\%$. При $\eta = 0$ выражение (9) дает точный результат $H^m(0) = 1$ независимо от m и свойств среды.

2. *Рэлеевское рассеяние.* В [6] показано, что для рэлеевского рассеяния при учете поляризации закон потемнения к краю в проблеме Милна, а также закон отражения полупространством целиком определяются решениями уравнений (3), где $m = 1, 2, 3, 4, 5$, а

$$\Psi^1(\eta) = \frac{3}{2}(1-\eta^2), \quad \Psi^2(\eta) = \frac{3}{4}(1-\eta^2), \quad \Psi^3(\eta) = \frac{3}{4}(1+2\eta^2)(1-\eta^2),$$

$$\Psi^4(\eta) = \frac{3}{8}(1+\eta^2)^2, \quad \Psi^5(\eta) = \frac{3}{2}\eta^2.$$

В [7] функциям $H^m(\eta)$ поставлены в соответствие функции $\Phi^m(\tau)$, удовлетворяющие уравнениям (1) и связанные с $H^m(\eta)$ соотношениями (5). Ядерные функции в (1) имеют для данного случая следующий вид:

$$K^1(\tau) = \frac{3}{2}E_1(\tau) - \frac{3}{2}E_3(\tau), \quad K^2(\tau) = \frac{3}{4}E_1(\tau) - \frac{3}{4}E_3(\tau),$$

$$K^3(\tau) = \frac{3}{4}E_1(\tau) + \frac{3}{4}E_3(\tau) - \frac{3}{2}E_5(\tau),$$

$$K^4(\tau) = \frac{3}{8}E_1(\tau) + \frac{3}{4}E_3(\tau) + \frac{3}{8}E_5(\tau), \quad K^5(\tau) = \frac{3}{2}E_3(\tau).$$

В [8] показано, что характеристическое уравнение (4) не имеет корней лишь при $m = 2$. При $m = 1$ оно имеет корень $k = 0$, а при $m = 3, 4, 5$ имеет только пару корней $\pm k_m$, и k_m приведены в [8]. Поскольку в $K^3(\tau)$ совпадают коэффициенты при $E_1(\tau)$ и $E_3(\tau)$, а в $K^4(\tau)$ — при $E_1(\tau)$ и $E_5(\tau)$, то мы полагали в [7], что $A_3^{(1)} = A_3^{(3)}$ и $A_4^{(1)} = A_4^{(5)}$. Значения A_m и $A_m^{(2k+1)}$, определенные так, как об этом говорилось во введении, представлены в табл. 1, где прочерк означает отсутствие соответствующих членов в (7) и (9).

Таблица 1

КОЭФФИЦИЕНТЫ A_m И $A_m^{(2k+1)}$ ПРИ УЧЕТЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ

m	A_m	$A_m^{(1)}$	$A_m^{(3)}$	$A_m^{(5)}$	k_m, [8]
1	2.23503	0.53766	−0.70504	—	0
2	—	0.33358	0.24246	—	—
3	0.46512	0.31622	0.31622	−0.51928	0.91482
4	0.48851	0.17585	−0.13467	0.17585	0.74097
5	0.24396	—	0.38133	—	0.85276

В [6] приведены значения $H^m(\eta)$, полученные при решении уравнений (3) методом итераций и с использованием квадратурной формулы Гаусса. Как показали расчеты, абсолютное значение относительного отклонения значений, полученных нами при помощи (9) и коэффициентов из табл. 1, от результатов из [6], которые можно считать точными, составляет $\leq 0.1\,\%$ для всех $\eta \in [0, 1]$. Напомним, что функции $H^1(\eta)$ и $H^2(\eta)$ определяют закон потемнения к краю и закон диффузного отражения для независящих от азимута двух первых параметров Стокса. Соответствующие формулы приведены в [6] и [7]. В них появляются постоянные c и q, равные

$$c = \frac{8(h_1^2 - h_1^1) + 3(2h_1^1 h_0^1 - h_1^2 h_0^2)}{3(|h_1^2|^2 + 2|h_1^1|^2)},$$

$$q = 2\,\frac{4(h_1^2 + 2h_1^1) - 3(h_0^2 h_1^1 + h_0^1 h_1^2)}{3(|h_1^2|^2 + 2|h_1^1|^2)},$$

где h_n^m — моменты функций $H^m(\eta)$. Пользуясь формулой (10) и коэффициентами из табл. 1, мы получили $c = 0.87277\,(2\cdot 10^{-2}\,\%)$, $q = 0.68978$ $(2\cdot 10^{-2}\,\%)$, где в скобках приведены относительные отклонения от точных значений из [6], $c_т = 0.87294$ и $q_т = 0.68989$.

Известно [6], что в скалярном приближении, когда не принимают во внимание поляризацию в единичном акте столкновения, рэлеевскому рассеянию соответствует индикатриса $x(\eta) = (3/4)(1 + \eta^2)$. В этой же работе показано, что закон потемнения к краю в проблеме Милна и закон диффузного отражения определяются решениями уравнений (3) при $m = 0, 1, 2$, где

$$\Psi^0(\eta) = \frac{3}{16}(3 - \eta^2), \quad \Psi^1(\eta) = \frac{3}{8}(1 - \eta^2)\,\eta, \quad \Psi^2(\eta) = \frac{3}{32}(1 - \eta^2)^2.$$

Уравнение (4) имеет корень $k = 0$ лишь при $m = 0$. Функциям $H^m(\eta)$ в данном случае можно поставить в соответствие функции $\Phi^m(\tau)$ так, что выполняются (5), а $\Phi^m(\tau)$ удовлетворяют уравнениям (1). Поступая так же, как и при учете поляризации, мы получили значения A_m и $A_m^{(2k+1)}$, которые приводим в табл. 2.

Расчеты $H^m(\eta)$ с помощью (9) и коэффициентов из табл. 2 показали, что наибольшее значение относительного отклонения $H^0(\eta)$ от точных значений из [6] имеет место при $\eta \sim 0.1$ и составляет по модулю $\sim 0.2\,\%$, заметно уменьшаясь как при $\eta \to 0$, так и при $\eta \to 1$. Для $H^1(\eta)$ и $H^2(\eta)$ эта же величина составляет всего лишь несколько сотых долей процента.

До сих пор мы рассматривали лишь консервативное рассеяние, когда $\lambda = 1$. Интересно выяснить, как зависит точность предлагаемого способа от значения λ. С этой целью мы рассмотрели прежде всего случай линейной анизотропии рассеяния для нескольких значений λ.

Таблица 2

КОЭФФИЦИЕНТЫ A_m И A_m^{2k+1} БЕЗ УЧЕТА ПОЛЯРИЗАЦИИ

m	A_m	$A_m^{(1)}$	$A_m^{(3)}$	$A_m^{(5)}$
0	1.82551	0.42127	−0.49969	—
1	—	—	0.34155	−0.29889
2	—	0.09692	−0.18670	0.09692

3. *Линейная анизотропия рассеяния, $N = 1$.* Выражения для функций $\Psi^0(\eta)$ и $\Psi^1(\eta)$ приведены в [1]. Значения корней k_0 уравнения (4) при $m = 0$ затабулированы для ряда λ и x_1 в [9]. Мы рассчитывали не $H^m(\eta)$, а функции Амбарцумяна $\varphi_n^m(\eta)$, связь которых с $H^m(\eta)$ имеет в данном случае вид [1]

$$\varphi_0^0(\eta) = \left[1 - \frac{\lambda}{2}(1-\lambda)\,x_1 \frac{h_1^0}{1 - \frac{\lambda}{2} h_0^0}\,\eta\right] H^0(\eta),$$

$$\varphi_1^0(\eta) = \eta\,\frac{1-\lambda}{1 - \frac{\lambda}{2} h_0^0}\,H^0(\eta),$$

$$\varphi_1^1(\eta) = \sqrt{1-\eta^2}\,H^1(\eta).$$

Наибольшее значение относительного отклонения значений $\varphi_0^0(\eta)$, полученных нами, от результатов численного решения системы двух связанных нелинейных интегральных уравнений относительно $\varphi_0^0(\eta)$ и $\varphi_1^0(\eta)$, опубликованных в [10], достигается при $\eta \sim 0.1$ и составляет $\lesssim 0.2\%$, причем верхней границы эта величина достигает при увеличении λ. Относительное отклонение полученных нами значений $\varphi_1^0(\eta)$ и $\varphi_1^1(\eta)$ от точных значений $\varphi_1^0(\eta)$ и $\varphi_1^1(\eta)$ из [10] (значения $\varphi_1^1(\eta)$ получены в [10] при решении нелинейного интегрального уравнения, приведенного там же) составляло всего лишь несколько сотых долей процента, слабо завися от значений λ, x_1 и λx_1 соответственно. В расчетах было принято $\lambda = 0.6,\ 0.9$, $x_1 = -1,\ 1$ и $\lambda x_1 = -1.0,\ -0.5,\ -0.1,\ 0.1,\ 0.5,\ 1.0$.

Влияние значений λ на точность предлагаемого способа наиболее заметно проявляется в случае изотропного рассеяния, к рассмотрению которого мы и переходим.

4. *Изотропное рассеяние*, $N = 0$. В этом случае $\Psi^0(\eta) = \lambda/2$. Выражения для A_0 и $A_0^{(1)}$ из (7) при $N = 0$ легко выписываются в явном виде:

$$A_0 = \frac{0.5454\lambda}{Q},$$

где

$$Q = 2\left[\left|\ln(1-k)\right| - 0.5k^2 - k\right](1 - 0.75\lambda) - k\left[\left|\ln(1-k)\right| - k\right] \times$$
$$\times (1 - 1.2954\lambda);$$

$$A_0^{(1)} = \frac{\lambda + \lambda\left[k - \left|\ln(1-k)\right|\right]k^{-2}}{2(1 - 0.75\lambda)}.$$

При записи последних формул мы использовали значения $J_{12} = 0.5000$ и $J_{13} = 0.2954$ из [3]. Величина k в зависимости от λ затабулирована, например, в [1]. Расчет $H^0(\eta)$ по формуле (9) при $m = N = 0$ и сравнение этих значений с точными из [1] показали, что при $\lambda \lesssim 0.9$ наши результаты практически совпадают с точными в пределах трех цифр после запятой. Однако при $\lambda \to 1$ точность наших расчетов начинает падать, и наибольшее значение относительного отклонения от точных результатов, имеющее место при $\eta \sim 0.1$, может достигать по модулю $\sim 0.5\%$. В этой связи при $0.9 \leqslant \lambda \leqslant 1$ предлагается вместо (7) при $N = 0$ использовать следующее выражение:

$$\Phi^0(\tau) = A_0 e^{-k\tau} + A_0^{(1)} E_1(\tau) + A_0^{(2)} E_2(\tau). \tag{11}$$

Подстановка (11) в (5) позволяет записать

$$H^0(\eta) = 1 + \frac{\eta}{1 + k\eta} A_0 + \eta \ln(1 + 1/\eta) A_0^{(1)} + \eta\left[1 - \eta \ln(1 + 1/\eta)\right] A_0^{(2)}. \tag{12}$$

Способ определения A_0, $A_0^{(1)}$ и $A_0^{(2)}$ остается прежним. Результаты, полученные нами с помощью (12) для $\lambda = 0.9$, 1.0, совпали с точными из [1] в пределах трех цифр после запятой. Исключение составляет область $\eta \sim 0.1$ для $\lambda = 1$. Так, полученное нами для $\lambda = 1$ значение $H^0(0.1) = 1.246$, а точное $H^0(0.1) = 1.247$ [1].

Выражения (9) и (12) могут быть использованы и для расчета плоского $A(\eta_0)$ и сферического A_s альбедо полупространства. Для рассматриваемого случая $N = 0$, например, эти величины равны [1]:

$$A(\eta_0) = 1 - \sqrt{1-\lambda}\, H^0(\eta_0), \quad A_s = 1 - 2\sqrt{1-\lambda}\, h_1^0. \tag{13}$$

Если используется (9), то для расчета h_1^0 следует взять формулу (10), положив в ней $N=0$, а $n=1$. Приближению же (12) соответствует следующее выражение для h_n^0:

$$h_n^0=\frac{1}{n+1}+A_0L_{n+1}^0+A_0^{(1)}M_{n+2}+A_0^{(2)}\left(\frac{1}{n+2}-M_{n+3}\right), \tag{14}$$

где L_n^m и M_n приведены во введении. Достаточно простые приближенные формулы для A_s и $A(\tau_0)$ получены в [11]. Точность формулы для $A(\tau_0)$ из [11] оказывается хорошей лишь при $\tau_0 \gtrsim 0.4$, а при $\tau_0<0.4$ она заметно уступает точности вычислений по первой из формул (13), в которой используется, например, (12). Так, для $\lambda=0.9$ относительное отклонение приближенных значений $A(\tau_0)$ из [11] от точных значений, которые приведены там же, при $\tau_0<0.4$ составляет по модулю $\sim 2\%$, в то время как полученные нами значения совпадают с точными из [11] для всех $\tau_0 \in [0, 1]$. Точность формулы для A_s из [11] падает по мере уменьшения λ. Для иллюстрации приводим табл. 3, во втором столбце которой приведены значения A_s, полученные нами с помощью второй из формул (13) и выражений (10), где $N=0$ и $n=1$, при $\lambda=0.5$ и (14) при $\lambda=0.9$. В третьем столбце этой же таблицы приведены приближенные значения $A_s^п$ из [11], а в четвертом — точные значения $A_s^т$, данные по той же работе.

Таблица 3

СФЕРИЧЕСКОЕ АЛЬБЕДО A_s

λ	A_s	$A_s^п$ [11]	$A_s^т$ [11]
0.9	0.479	0.472	0.479
0.5	0.146	0.139	0.147

Простая формула для $H^0(\eta)$ при $N=0$ получена в [12]. Однако по точности она существенно уступает формулам (9) при $N=0$ и (12), особенно при $\lambda\sim 1$. Известны также асимптотические по λ формулы теории переноса излучения (см., например, [13]), которые позволяют вычислять вспомогательные функции для таких λ, для которых имеет место неравенство $1-\lambda \ll 1$, с помощью этих же вспомогательных функций, но для $\lambda=1$. Мы не проводили сравнения предлагаемых нами формул с подобными выражениями, так как не преследовали целей асимптотического по λ анализа.

Выражения (7) или (11) могут использоваться не только для получения приближенных формул для функций $H^m(\eta)$ или $\varphi_m^m(\eta)$, определяющих угловые характеристики. Они могут быть полезными и при описании пространственной зависимости функций источников, соответствующих различным распределениям первичных источников излучения. Известно, например, что функция источников для постоянных первичных источников целиком определяется [1] знанием функции $\Psi(\tau)$, которая, в свою очередь, для случая $N = 0$ связана с $\Phi^0(\tau)$ соотношением

$$\Psi(\tau) = 1 + \int_0^\tau \Phi^0(\tau)\, d\tau. \qquad (15)$$

Если подставить в это соотношение выражение (11), получим

$$\Psi(\tau) = 1 + A_0 \frac{1 - e^{-k\tau}}{k} + A_0^{(1)}[1 - E_2(\tau)] + A_0^{(2)} \left[\frac{1}{2} - E_3(\tau)\right]. \qquad (16)$$

При использовании (7) при $N = 0$ необходимо положить в этой формуле $A_0^{(2)} = 0$. Расчеты, проведенные нами для $\lambda = 1.0, 0.9, 0.5$ при помощи (16), показали, что соответствующие значения хорошо согласуются с точными, полученными в [14] на ЭВМ: во всей области изменения τ из [14] относительное отклонение наших значений от точных составляет по модулю $< 0.1\%$ и точность увеличивается с ростом τ, хотя и при $\tau = 0$ значения $\Psi(\tau)$, получаемые по формуле (16), совпадают с точными.

Для функции источников, соответствующей падению на свободную поверхность полупространства параллельного светового потока под углом $\arccos \eta_0$ к внешней нормали, используя ее связь с $\Phi^0(\tau)$ для случая $N = 0$ (см., например, [14]) и подставляя вместо $\Phi^0(\tau)$ приближение (11), получим

$$B(\tau, \eta_0) = \frac{\lambda}{4} H^0(\eta_0) \left[e^{-\tau/\eta_0} + \eta_0 \frac{e^{-\tau/\eta_0} - e^{-k\tau}}{k\eta_0 - 1} A_0 + e^{-\tau/\eta_0} F_1(\tau, \eta_0) A_0^{(1)} + \right.$$
$$\left. + e^{-\tau/\eta_0} F_2(\tau, \eta_0) A_0^{(2)} \right]. \qquad (17)$$

Здесь

$$F_n(\tau, \eta_0) = \int_0^\tau E_n(\tau) e^{\tau/\eta_0} d\tau.$$

Таблицы $e^{-\tau/\eta_0} F_1(\tau, \eta_0)$ для ряда значений τ и η_0 приводятся в [15, 16]. Расчеты можно проводить по формуле

$$e^{-\tau/\eta} F_1(\tau, \eta) = \eta \left[E_1(\tau) - \ln\left(\frac{1}{\eta} - 1\right) e^{-\tau/\eta} + Ei\left(\left(\frac{1}{\eta} - 1\right)\tau\right) e^{-\tau/\eta} \right],$$

и подробные таблицы $Ei(\tau)$ имеются в [17]. Для расчетов $e^{-\tau/\eta}F_2(\tau, \eta)$ необходимо использовать формулу

$$e^{-\tau/\eta}F_2(\tau, \eta) = \eta\left[\eta E_1(\tau) + E_2(\tau) - \eta\ln\left(\frac{1}{\eta} - 1\right)e^{-\tau/\eta} - \right.$$

$$\left. - e^{-\tau/\eta} + \eta Ei\left(\left(\frac{1}{\eta} - 1\right)\tau\right)e^{-\tau/\eta}\right].$$

Мы провели расчеты по формуле (17), где в качестве $H^0(\eta)$ использовали приближение (12), для $\lambda = 1$, $\eta_0 = 0.1$, 0.5, 1.0 и для всех значений τ из [14], где на ЭВМ были получены точные значения $B(\tau, \eta_0)$. Относительное отклонение наших значений от точных из [14] во всей области исследованных значений τ и η_0 составляло по модулю $\lesssim 0.1\%$, слабо завися от τ и η_0.

Выражения (7) при $N = 0$ и (11) могут быть использованы и для приближенного расчета вспомогательных функций теории переноса излучения при изотропном рассеянии в конечном слое оптической толщины τ_0, если использовать при этом результаты работ [18, 19]. Так, в [18] получена следующая приближенная формула для резольвентной функции $\Phi(\tau, \tau_0)$ в конечном слое при изотропном рассеянии для случая $\lambda = 1$:

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \Phi^0(\tau) - \tag{18}$$

$$- \frac{\bar{F}(\tau_0, 1)}{2\Psi(\tau_0) - \tau_0\bar{F}(\tau_0, 1)}[\Psi(\tau) - \Psi(\tau_0 - \tau) + \Psi(\tau_0) - \tau\tilde{F}(\tau_0, 1)],$$

где $\Phi^0(\tau)$ — решение уравнения (1) при $m = N = 0$, $\lambda = 1$, $\Psi(\tau)$ связано с $\Phi^0(\tau)$ соотношением (15), а $\bar{F}(\tau, \eta)$ определяется формулой

$$\bar{F}(\tau, \eta) = e^{\tau/\eta}\int_{\tau}^{\infty}\Phi^0(\tau)e^{-\tau/\eta}d\tau.$$

В случае $\lambda = 1$ и при $N = 0$ определенные нами значения коэффициентов в (11), где $k = 0$, равны: $A_0 = 1.7321$, $A_0^{(1)} = 0.4339$, $A_0^{(2)} = -0.4056$. Подстановка (11) с этими коэффициентами в последнее соотношение позволяет записать:

$$\bar{F}(\tau, \eta) = \eta\{1.7321 + 0.4339[E_1(\tau) - E_1((1 + 1/\eta)\tau)e^{\tau/\eta}] - \tag{19}$$

$$- 0.4056[E_2(\tau) - \eta E_1(\tau) + \eta E_1((1 + 1/\eta)\tau)e^{\tau/\eta}]\}.$$

Используя связь функций Амбарцумяна $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ с $\Phi(\tau, \tau_0)$ (см., например, [1]), с помощью (18) можно получить

$$\left|\begin{aligned}&\varphi(\eta, \tau_0) = \varphi(\eta) - \frac{\bar{F}(\tau_0, \eta)}{2\Psi(\tau_0) - \tau_0 \bar{F}(\tau_0, 1)} [\varphi(\eta) + F(\tau_0, \eta) - \tilde{F}(\tau_0, \eta)], \\ &\psi(\eta, \tau_0) = F(\tau_0, \eta) - \tilde{F}(\tau_0, \eta) + \varphi(\eta) - \varphi(\eta, \tau_0),\end{aligned}\right. \qquad (20)$$

где $\varphi(\eta) = H^0(\eta)$. Первая из этих формул получена в [18]. Функция $F(\tau_0, \eta)$ связана [18] с функцией источников $B(\tau, \eta)$, соответствующей падению на свободную поверхность полупространства параллельного светового потока под углом $\arccos \eta$ к внешней нормали, соотношением

$$F(\tau, \eta) = 4\frac{B(\tau, \eta)}{\varphi(\eta)}. \qquad (21)$$

Мы провели расчеты $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ для $\lambda = 1$, используя в (20) и (21) для описания $\varphi(\eta) = H^0(\eta)$ выражение (12), для описания $\Psi(\tau)$ выражение (16), выражение (19) и, наконец, в (21) использовали (17). Мы ограничились значениями $\tau_0 = 0.2$, 0.4, 1.0, 2.0 и 3.0. Полученные нами значения $\varphi(\eta, \tau_0)$ вплоть до $\tau_0 = 0.2$ имеют относительное отклонение от точных значений из [1] $< 0.5\%$, причем наибольшее значение эта величина принимает при $\eta \sim 0.1$ для $\tau_0 = 0.2$, уменьшаясь при $\eta \to 0$, $\eta \to 1$ и особенно заметно при увеличении τ_0. Относительное отклонение полученных нами значений $\psi(\eta, \tau_0)$ от точных значений из [1] принимает наибольшее значение $\sim 3\%$ также при $\eta \sim 0.1$ и для $\tau_0 = 0.2$, заметно уменьшаясь как при увеличении τ_0, так и при $\eta \to 0$ и при $\eta \to 1$. Указанная погрешность полученных нами значений $\varphi(\eta, \tau_0)$ для $\tau_0 = 0.2$, 0.4, 1.0 примерно совпадает с погрешностью значений, полученных в [18] с помощью первой из формул (20), но при использовании точных результатов для $\varphi(\eta)$, $\Psi(\tau_0)$, $\tilde{F}(\tau_0, \eta)$ и $\bar{F}(\tau_0, \eta)$. При $\tau_0 = 2.0$, 3.0 относительная погрешность полученных нами значений $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ заметно меньше погрешности асимптотических по τ_0 формул Соболева, которая приведена в [20].

До сих пор мы не оценивали точности формул (7) и (11), используя их лишь для получения приближенных выражений для различных вспомогательных функций. Хотя, как это следует из изложенного, например, в [1], в формулах теории переноса излучения участвуют лишь интегралы от $\Phi^m(\tau)$ с различными весовыми функциями, целесообразно сравнить результаты, получаемые с помощью (7) или (11), с имеющимися в литературе результатами точных расчетов $\Phi^m(\tau)$.

5. *К оценке точности приближений (7), (11) для* $\Phi^m(\tau)$. Рассмотрим прежде всего случай $N = 0$. Точные значения $\Phi^0(\tau)$ для

$1 \geqslant \lambda \geqslant 0.9$, $\lambda = 0.5$ и $\tau \in [0.01, 10]$ получены на ЭВМ в [14]. Расчеты показали, что относительное отклонение значений $\Phi^0(\tau)$, полученных нами для $1 \geqslant \lambda \geqslant 0.9$ с помощью (11), от точных значений из [14] составляет $\lesssim 0.1\%$ при $\tau \gtrsim 0.05$ и лишь при $\tau \sim 0.01$ достигает $\sim 1\%$. При $\lambda = 0.5$ мы использовали приближение (7), в котором полагали $N = m = 0$. Для всех значений τ из [14] относительное отклонение наших значений $\Phi^0(\tau)$ от точных результатов из той же работы составляло один или несколько десятых долей процента.

В [21] численно получены точные значения $\Phi^m(\tau)$ для случая, когда в (2) величина $N = 2$. Мы сочли необходимым привести табл. 4, где в числителе стоят значения $\Phi^m(\tau)$, полученные нами с помощью (7) и процедуры определения A_m и $A_m^{(2k+1)}$, описанной во введении, а в знаменателе значения $\Phi^m(\tau)$ из [21]. Было принято, что $\lambda = x_1 = x_2 = 1$, и мы считали, что при $m = 1, 2$ уравнение (4) не имеет корней.

Таблица 4

ЗНАЧЕНИЯ $\Phi^m(\tau)$ ДЛЯ ТРЕХЧЛЕННОЙ ИНДИКАТРИСЫ ПРИ $\lambda = x_1 = x_2 = 1$

τ	$\Phi^0(\tau)$	$\Phi^1(\tau)$	$\Phi^2(\tau)$
1	1.970/1.978	0.099/0.093	0.018/0.018
2	1.937/1.944	0.026/0.026	0.0030/0.0029
3	1.933/1.938	0.0078/0.0078	0.00068/0.00057
4	1.933/1.936	0.0024/0.0024	0.00018/0.00012

Как видим, наши значения $\Phi^0(\tau)$ и $\Phi^1(\tau)$ удовлетворительно согласуются со значениями из [21] для всех τ из табл. 4. Для $\Phi^2(\tau)$ в области значений τ, где эта функция существенно меньше как $\Phi^0(\tau)$, так и $\Phi^1(\tau)$, это согласие хуже. Тем не менее, расчеты $H^2(\eta)$, проведенные нами с помощью (9) для $N = m = 2$ и при $\lambda = x_1 = x_2 = 1$ показали, что относительные отклонения от точных значений $H^2(\eta)$ из [22] составляют $< 0.1\%$.

6. *Заключение.* Фундаментальные (резольвентные) функции теории переноса излучения предложено искать в виде (7). Линейные алгебраические уравнения для неизвестных коэффициентов из (7), число которых не больше $(N+2)$, где N — наибольшая учтенная степень полинома Лежандра $P_n(\eta)$ в разложении индикатрисы рассеяния (2), получаются при подстановке (7) в (1), интегрировании с весовыми множителями 1, τ, τ

и т. д. и, когда в (6) величина $a_0^m = 0$, приравниванием левой и правой частей получающегося при подстановке (7) в (1) выражения в точке $\tau = 0$. При изотропном рассеянии в области значений $0.9 \leqslant \lambda \leqslant 1$ вместо (7) необходимо использовать (11). С помощью (7) или (11) по известным формулам теории переноса излучения можно получать приближенные выражения для различных вспомогательных функций. Как показали примеры, точность таких приближенных формул хорошая и их можно использовать в практических приложениях. Удовлетворительной оказывается и точность исходных приближений (7) или (11).

Предложенный способ определения коэффициентов в (7) или (11) не является единственным. В частности, для этого мог бы быть использован вариационный метод. Однако при этом увеличивается объем вычислений, а точность остается практически той же. В [23] разложение вида (11) привлекалось для описания пространственной зависимости плотности частиц в проблеме Милна и для определения неизвестных коэффициентов использовался вариационный метод. С другой стороны, решение проблемы Милна может быть найдено с помощью резольвентной функции $\Phi^0(\tau)$ [24]. Ограничившись изотропным рассеянием и используя для получения таких решений формулы из [24], а в них приближение (11), можно показать, что точность результатов примерно соответствует точности расчетов из [23] при меньшем объеме вычислений.

В разделе 4 мы уже говорили о сравнении получаемых нами формул с некоторыми известными из литературы приближениями. Вернемся к этому вопросу в связи с некоторыми из результатов серии работ [25].

Во второй из этих работ для расчета функции источников $B(\tau, \eta_0)$, определение которой приведено в разделе 4, используется P_5 — приближение метода сферических гармоник. Расчеты, проведенные нами с помощью приближения (17), полученного в разделе 4, для случая $\lambda = 1$, в котором использовалось приближение (12) для того же значения λ, оказались более точными, чем расчеты из [25], при ощутимо меньшем объеме вычислений. В последней из работ [25] получены приближенные формулы для расчета функции $H^0(\eta)$ и $\varphi(\eta, \tau_0)$, $\psi(\eta, \tau_0)$ при изотропном рассеянии. Выражение для $H^0(\eta)$, например, из [25] имеет вид

$$H^0(\eta) = 1 + 2\eta \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 + \beta_k \eta}, \tag{22}$$

где $\pm \beta_k$ — корни уравнения

$$1 - \lambda \sum_{k=1}^{N} \frac{w_k}{1 - \beta_k^2 \eta_k^2} = 0,$$

$$A_k = \frac{(-1)^{N+1}}{2\prod\limits_{k=1}^{N} \eta_{i_k}} \left[\prod_{n=1}^{N} (1 - \beta_k \eta_{i_n}) \right] \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{N} (\beta_k - \beta_l),$$

а w_k, η_{i_k} — веса и узлы квадратурной формулы Гаусса в N-точечном приближении на огрезке [0, 1]. Значения β_k и A_k при $N = 7$ затабулированы для ряда λ в [25]. Результаты, получаемые с помощью (9) при $N = m = 0$ или (12), совпадают с результатами, соответствующими (22), в пределах трех цифр после запятой. Мы не проводили сравнения точности формул (20), в которых используются (12), (16), (17) и (19), с точностью приближенных формул для этих же функций из [25]. Отметим только, что, несмотря на их хорошую точность, о чем сказано в [25], этим формулам присущ недостаток, подчеркнутый в той же работе и заключающийся в необходимости знания при их использовании значений $\varphi(\eta_i, \tau_0)$ и $\psi(\eta_i, \tau_0)$ в узлах формулы Гаусса в N-точечном приближении на отрезке [0, 1]. В [25] эти значения предложено определять при решении системы нелинейных дифференциальных уравнений относительно $\varphi(\eta_{i_k}, \tau_0)$ и $\psi(\eta_{i_k}, \tau_0)$. С другой стороны, для использования формул, получаемых нами с помощью (7) или (11), необходимо лишь знание корней уравнений (4), и все остальные промежуточные расчеты связаны с решением линейных алгебраических уравнений.

ABOUT AN APPROXIMATE CALCULATION OF AID-FUNCTIONS IN RADIATION TRANSPORT THEORY

V. P. GORELOV, V. I. ILIYN

The method to find the analytically approximated resolvent or Sobolev's fundamental functions is suggested. The obtained expressions enable us to write down in a simple form a number of auxiliary functions of the radiation transport theory in halfspace and in a layer of finite optic thickness.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
2. *Д. И. Нагирнер*, Астрон. ж., 41, 669, 1964.
3. *V. Kourganoff*, Basic methods in transfer problems, Clarendon press, Oxford, 1952.

4. *А. С. Аниконов.* Астрон. ж., 50, 137, 1973.
5. *А. К. Колесов, О. И. Смоктий*, Астрон. ж., 48, 1013, 1971.
6. *С. Чандрасекар,* Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
7. *Х. Домке.* Астрон. ж., 48, 341, 1971.
8. *T. W. Mullikin*, Ap. J., 145, 886, 1966.
9. *Von Y. Haungs*, Atomkernenergie, 11, 19, 1966.
10. *И. Н. Минин, А. Г. Пилопосян, Н. А. Шидловская*, Труды АО ЛГУ, 20, 12, 1964.
11. *L. Wang*, Ap. J., 174, 671, 1972.
12. *Y. C. Pomraning*, Ap. J., 159, 119, 1970.
13. *А. К. Колесов, В. В. Соболев*, Астрофизика, 5, 175, 1969.
14. *А. Б. Шнейвайс*, Вестн. ЛГУ (матем.-мех.-астрон.), № 7, вып. 2, 144, 1973.
15. *S. Chandrasekhar*, Ap. J., 108, 92, 1948.
16. *H. C. van de Hulst*, Ap. J., 107, 220, 1948.
17. Табл. интегр. показательной функции, АН СССР, М., 1954.
18. *М. А. Мнацаканян*, Астрофизика, 11, 659, 1975.
19. *М. А. Мнацаканян*, Астрофизика, 12, 451, 1976.
20. *В. М. Лоскутов*, Астрофизика, 9, 361, 1973.
21. *А. С. Аниконов, А. Б. Шнейвайс*, Труды АО ЛГУ, 33, 3, 1977.
22. *В. М. Лоскутов*, Труды АО ЛГУ, 29, 33, 1973.
23. *Н. В. Птицына*, в сб. «Некоторые математические задачи нейтронной физики», МГУ, 1960, стр. 28.
24. *В. В. Соболев*, Курс теоретической астрофизики, Наука, М., 1967.
25. *Т. Вийк*, Публ. Тартуской обс., 44, 47, 1976.