ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 46, N° 1-2, 1993 Механика

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ В НЕСТАЦИОНАРНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Багдасарян Г.Е., Пилипосян Г.Т.

Բաղդասարյան Գ.Ե., Փիլիփոսյան Գ.Տ. Ոչ ստացիոնար մագնիսական դաշտում գերհաղորդիչ ուղղանկյուն սալի տատանումների մաթեմատիկական մոդելավորումը և հետազոտությունը

Ստացված են ոչ ստացիոնար երկայնականմագնիսական դաշտում ուղղանկյուն գերհաղորդիչ սալի վարքը նկարագրող հավասարումները և եզրային պայմանները: Հետազոտված է ներդաշնակ փոփոխական մագնիսական դաշտում պարամետրական բնույթի տատանումների գոյության հնարավորությունը: Հետազոտված է գերհաղորդիչ սալի լայնական տատանումների հաճախականության վրա հաստատուն մագնիսական դաշտի ազդեցությունը:

Bagdasarian G.E., Philliposian G.T. Mathematical modeling and investigation of super-conductive rectangular plate vibrations in magnetic field.

Получены уравнение и граничные условия, описывающие поведение сверхпроводящих прямоугольных пластин в нестационарном продольном магнитном поле. На основе решения сформулированной краевой задачи установлена возможность возбуждения резонансных колебаний параметрического типа при помощи периодического во времени магнитного поля и исследованы влияния постоянного магнитного поля на частоты поперечных колебаний сверхпроводящей пластинки.

В работе [1], исходя из основных положений работы [2], предложен асимптотический метод исследования магнитоупругих колебаний идеально проводящих прямоугольных пластин в стационарном магнитном поле. Применением указанного метода и гипотезы Кирхгоффа в данной работе получены уравнение и граничные условия, описывающие поведение сверхпроводящих прямоугольных пластин в нестационарном продольном магнитном поле. На основе решения сформулированной краевой задачи установлена возможность возбуждения резонансных колебаний параметрического типа при помощи периодического во времени магнитного поля и исследованы влияния постоянного магнитного поля на частоты поперечных колебаний сверхпроводящей пластинки. Проведен численный анализ зависимости ширины областей динамической неустойчивости от величины амплитуды нестационарного магнитного поля, а также зависимости частоты изгибных колебаний от величины напряженности внешнего постоянного магнитного поля.

1. Пусть упругая изотропная сверхпроводящая прямоугольная пластинка постоянной толщины $2h$ отнесена к декартовой системе координат $x_1x_2x_3$ так, чтобы срединная плоскость недеформированной пластинки совпадала с координатной плоскостью x_1x_2. Пластинка, края которой неподвижны в своей

плоскости, колеблется во внешнем нестационарном продольном магнитном поле с заданным вектором напряженности $\vec{H}_1(H_{01}(t), H_{02}(t), 0)$. Магнитные свойства среды, окружающей пластинку, отождествляются со свойствами вакуума.

Известно, [3], что при помещении сверхпроводящего тела в магнитном поле на тонком поверхностном слое появляются экранирующие токи, препятствующие прониканию магнитного поля внутрь тела. Вследствие этого, на поверхности пластинки тангенциальные компоненты магнитного поля (следовательно, и компоненты тензора напряжений Максвелла) претерпевают разрыв. Этим разрывом обусловлено появление поверхностных сил $\vec{q}$ магнитного происхождения, определяемые формулой [3]

$$\vec{q} = \vec{n}T \tag{1.1}$$

где $\vec{n}$-единичный вектор внешней нормали к деформируемой поверхности пластинки, T- тензор напряжений Максвелла

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(H_i H_k - \frac{\delta_{ik}}{2} H_m H_m\right) \tag{1.2}$$

В (1.2) $\vec{H}$- вектор напряженности магнитного поля в вакууме, который складывается из вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}_0$, возникающего вследствие помещения недеформируемой пластинки в заданное магнитное поле $\vec{H}_0$ и вектора напряженности индуцированного магнитного поля $\vec{h}$, обусловленного деформацией пластинки ($\vec{H} = \vec{H}^0 + \vec{h}$). В силу изложенного, вектор $\vec{H}^0$ в квазистатическом приближении определяется из решения следующей задачи магнитостатики:

найти решение уравнений Максвелла

$$rot\,\vec{H}^0 = 0, \qquad div\,\vec{H}^0 = 0 \tag{1.3}$$

во внешней области (вне тела пластинки), удовлетворяющее условию

$$\vec{H}^0\vec{n}_0 = 0 \quad \text{при} \quad (x_1, x_2, x_3) \in S_0 \tag{1.4}$$

на поверхности S_0 недеформируемой пластинки и условию

$$\vec{H}_0 = \vec{H}^0 \quad \text{при} \quad |\vec{r}| \Rightarrow \infty \tag{1.5}$$

на бесконечности.

Часть магнитного давления, действующего на боковой поверхности пластинки, вследствие неподвижности ее краев в своей пластинке, не влияет на напряженно-деформированное состояние пластинки. Поэтому для дальнейшего необходимо иметь значения $\vec{q}$ (следовательно, и значения $\vec{H}^0$) лишь на лицевых поверхностях пластинки. Определение $\vec{H}^0$ на основе решения краевой задачи (1.3)-(1.5) для пластин конечных размеров связано с серьезными математическими трудностями. Решение этой задачи в случае пластинки-полосы, когда края пластинки контактируются со сверхпроводящими абсолютно жесткими и неподвижными диафрагмами, получено в работе [4] и показано, что величина $\vec{H}^0$, вне некоторого, достаточно узкого пограничного слоя, практически совпадает с величиной $\vec{H}_0$, являющейся решением (1.3)-(1.5) в случае бесконечной пластинки. Опираясь на приведенные соображения, при определении магнитного давления $\vec{q}$ на лицевых поверхностях, пластинку будем считать бесконечной, то есть при определении величины $\vec{q}$ на поверхностях $x_3 = \pm h$ будем принимать $\vec{H}^0 = \vec{H}_0$. Отметим также, что объемные силы магнитного происхождения в пластинке не возникают, так как магнитное поле не проникает в толщу пластинки. Следовательно, влияние магнитного поля на колебание

сверхпроводящей пластинки осуществляется только при помощи поверхностных сил $\vec{q}$ магнитного происхождения.

Колебания рассматриваемой пластинки под действием магнитного давления $\vec{q}$ будем исследовать на основе теории малых упругих деформаций, принимая гипотезу недеформируемых нормалей. Тогда уравнение колебания пластинки можно представить в следующем виде [5]

$$D\Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - h\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{13}^{+} + \sigma_{13}^{-}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{23}^{+} + \sigma_{23}^{-})\right]$$

$$= \sigma_{33}^{+} - \sigma_{33}^{-} \qquad (1.6)$$

Здесь w -прогиб, $D = 2Eh^3/(1-\nu^2)$ - цилиндрическая жесткость, E- модуль упругости, ν- коэффициент Пуассона материала пластинки, σ_{13}, σ_{23}, σ_{33}- упругие напряжения. Знаками "+" и "-" здесь и в дальнейшем отмечены значения соответствующих величин на лицевых поверхностях $x_3 = \pm h$ пластинки.

Отметим, что вследствие неподвижности краев пластинки в своей плоскости, в уравнение (1.6) не входят члены типа $T_i \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}$, учитывающие влияния продольных сжимающих усилий T_1 и T_2 магнитного происхождения, действующих на краях пластинки и возникающих за счет разрыва тангенциальных компонент магнитного поля на боковой поверхности пластинки.

Входящие в уравнение (1.6) неизвестные величины $\sigma_{i3}^{\pm}$ $(i = 1,2,3)$ определяем, используя условия на поверхностях $x_3 = \pm h$. В силу того, что магнитное поле во внутренней области отсутствует, указанные условия, согласно (1.1), запишутся в виде [4,5]

$$\sigma_{ij} n_j = T_{ij} n_j \qquad (1.7)$$

Из (1.7), с учетом (1.2) (в котором $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}$, $|\vec{h}| << |\vec{H}_0|$) и малости деформаций, после линеаризации имеем

$$\sigma_{13}^{\pm} = \frac{H_{01}}{4\pi} h_3^{\pm}, \quad \sigma_{23}^{\pm} = \frac{H_{02}}{4\pi} h_3^{\pm},$$

$$\sigma_{33}^{\pm} = -\frac{H_{01}^2 + H_{02}^2}{8\pi} - \frac{H_{01} h_1^{\pm} + H_{02} h_2^{\pm}}{4\pi} \qquad (1.8)$$

Рассматривая систему уравнения (1.6), (1.8), замечаем, что она не замкнута. В нее, кроме изгиба, w пластинки, входят неизвестные граничные значения $h_i^{\pm}$ $(i = 1,2,3)$ компонент индуцированного в окружающей среде магнитного поля $\vec{h}$. Их определяем, решая уравнение

$$rot\,\vec{h} = 0, \quad div\,\vec{h} = 0 \qquad (1.9)$$

во внешней области с граничным условием

$$(\vec{H}_0 + \vec{h})\vec{n} + 0, \quad (x_1, x_2, x_3) \in S \qquad (1.10)$$

на поверхности S пластинки и условием затухания магнитных возмущений на бесконечности ($\vec{h} => 0$ при $|\vec{r}| => \infty$). Заметим, что (1.10) является условием непроникновения магнитного поля внутрь пластинки.

Опираясь на те же соображения, что и при определении магнитного поля $\vec{H}^0$ недеформированной пластинки, здесь также, при решении задачи (1.9)-(1.10), пластинку будем считать бесконечной. тогда введением потенциальной функции φ посредством

$$\vec{h} = \nabla\varphi \tag{1.11}$$

задача определения индуцированного магнитного поля $\vec{h}$, согласно (1.9)-(1.11), после линеаризации сводится к решению следующих задач Неймана в полупространствах $|x_3| > h$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\pm h} = H_{01}\frac{\partial w}{\partial x_1} + H_{02}\frac{\partial w}{\partial x_2} \tag{1.12}$$

Решения задач (1.12), исчезающие на бесконечности, имеют вид

$$\varphi = \pm\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(H_{01}\frac{\partial w}{\partial \xi_1} + H_{02}\frac{\partial w}{\partial \xi_2}\right) \times \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\left[(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (x_3 \pm h)^2\right]^{1/2}} \tag{1.13}$$

где верхний знак берется при $x_3 < -h$, а нижний - при $x_3 > h$.

Принимая прогиб бесконечной пластинки в виде $w(x_1,x_2,t) = w_0(t)\exp[i(k_1x_1 + k_2x_2)]$ где k_1 и k_2 волновые числа, из (1.11)-(1.13) для $h_i^{\pm}$ находим выражения

$$h_i^{\pm} = \frac{1}{k}\frac{\partial h_3^{\pm}}{\partial x_i}, \quad k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad (i = 1,2)$$

$$h_3^{+} = h_3^{-} = H_{01}(t)\frac{\partial w}{\partial x_1} + H_{02}(t)\frac{\partial w}{\partial x_2} \tag{1.14}$$

Подставляя (1.14) в (1.8), определяем неизвестные величины $\sigma_{\beta}^{\pm}$, а с их помощью из (1.6) получаем следующее уравнение магнитоупругих коебаний сверхпроводящей пластинки в продольном нестационарном магнитном поле:

$$D\Delta^2 w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1+kh}{2\pi k}\left[H_{01}^2(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2H_{01}(t)H_{02}(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + H_{02}^2(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right] = 0 \tag{1.15}$$

в которое входят неизвестные волновые числа k_1 и k_2. К уравнению (1.15) в каждой конкретной задаче необходимо присоединить условия закрепления краев пластинки.

На основе уравнения (1.15) рассмотрим вопросы влияния постоянного магнитного поля на частоты колебания пластинки и возможность возбуждения резонансных колебаний параметрического типа при помощи периодического вов времени магнитного поля.

2.Рассмотрим магнитоупругие колебания прямоугольной в плане сверхпроводящей пластинки со сторонами a_1 и a_2 в продольном магнитном поле $\vec{H}_0(H_0,0,0)$, где $H_0 = const$.

Уравнение колебаний пластинки (1.15) для рассматриваемого случая имеет вид

$$D\Delta^2 w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \gamma\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \quad \gamma = \frac{1+kh}{2\pi k}H_0^2 \tag{2.1}$$

которое совпадает с уравнением магнитоупругих колебаний идеально проводящих пластин в случае продольного магнитного поля [1].

Подстановкой $w(x_1,x_2,t) = W(x_1,x_2)\exp(i\omega t)$, где ω-частота магнито-

упругих колебаний, уравнение (2.1) приводится к виду

$$D\Delta^2 W - \gamma \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} - 2\rho h \omega^2 W = 0 \qquad (2.2)$$

в котором, как и в (2.1), входят неизвестные волновые числа k_1 и k_2. Эти величины и частоты магнитоупругих колебаний ω можно найти путем применения асимптотического метода, развитого в работах [1,2,6].

Уравнение (2.2) указанным асимптотическим методом решено в работах [1,6] и получена следующая формула для определения частоты магнитоупругих колебаний:

$$\omega^2 = \frac{D}{2\rho h}\left[(k_1^2 + k_2^2)^2 + \frac{k_1^2 H_0^2}{2\pi D}\left(h + \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}\right)\right] \qquad (2.3)$$

Кроме формулы (2.3) в указанных работах получены также трансцендентные уравнения относительно k_1 и k_2. Эти уравнения, в отличие от формулы (2.3), различны для различных граничных условий и форм колебаний. Не вдаваясь в подробность, приведем [6] окончательные трансцендентные уравнения, определяющие величины k_1 и k_2, при следующих условиях закрепления краев пластинки.

1) Пластинка жестко защемлена по контуру. Тогда, в зависимости от симметрии (по отношению координатных осей ox_1 и ox_2) форм магнитоупругих колебаний для определения k_1 и k_2 получены следующие уравнения:

$$ctg\frac{a_1 k_1}{2} = -(1 + \alpha + 2\beta_1^2)^{-1/2}, \quad ctg\frac{a_2 k_2}{2} = -(1 + 2\beta_2^2)^{-1/2} \qquad (2.4)$$

для симметричных в обеих форм колебаний, и

$$tg\frac{a_1 k_1}{2} = (1 + \alpha + 2\beta_1^2)^{-1/2}, \quad tg\frac{a_2 k_2}{2} = (1 + 2\beta_2^2)^{-1/2} \qquad (2.5)$$

для антисимметричных в обоих направлениях форм колебаний.

В (2.4), (2.5) приняты обозначения

$$\alpha = \frac{H_0^2\left(1 + \sqrt{k_1^2 + k_2^2}\right)}{2\pi D k_1^2 \sqrt{k_1^2 + k_2^2}}, \quad \beta_1 = \frac{k_2}{k_1}, \quad \beta_2 = \frac{k_1}{k_2} \qquad (2.6)$$

Для остальных смешанных форм колебаний уравнения относительно k_1 и k_2 получаются из приведенных, комбинируя соответствующим образом одно из уравнений (2.4) с другим (2.5).

2) Пластинка шарнирно закреплена по контуру. В этом случае для k_1 и k_2 получены выражения

$$k_1 = \frac{m\pi}{a_1}, \quad k_2 = \frac{n\pi}{a_2} \quad (m,n = 1,2,3,\ldots) \qquad (2.7)$$

3) Пластинка упруго защемлена по контуру. Для этого случая волновые числа k_1 и k_2 являются решениями следующих уравнений:

$$ctg\frac{a_1 k_1}{2} = -\left[\sqrt{1 + \alpha + 2\beta_1^2} + \frac{2Dk_1}{\delta}\left(1 + \frac{\alpha}{2} + \beta_1^2\right)\right]^{-1},$$

$$ctg\frac{a_2 k_2}{2} = -\left[\sqrt{1 + 2\beta_2^2} + \frac{2Dk_1}{\delta}\left(1 + \beta_2^2\right)\right]^{-1} \qquad (2.8)$$

для симметричных форм колебаний, и

$$tg\frac{a_1k_1}{2}=\left[\sqrt{1+\alpha+2\beta_1^2}+\frac{2Dk_1}{\delta}\left(1+\frac{\alpha}{2}+\beta_1^2\right)\right]^{-1},$$

$$tg\frac{a_2k_2}{2}=\left[\sqrt{1+2\beta_2^2}+\frac{2Dk_1}{\delta}\left(1+\beta_2^2\right)\right]^{-1} \qquad (2.9)$$

для антисимметричных форм колебаний.

В уравнениях (2.8) и (2.9) δ - коэффициент жесткости упругого защемления. При $\delta=>\infty$ эти уравнения совпадают с уравнениями (2.4) и (2.5) для защемленной пластинки, а при $\delta=>0$ из них получаются решения (2.7) для шарнирно опертой пластинки.

Соответствующим образом комбинируя приведенные уравнения (2.4)-(2.9), можно получить уравнения относительно волновых чисел k_1 и k_2 для других видов опорного закрепления. Например, если края $x_1=0$ и $x_1=a_1$ жестко защемлены, а края $x_2=0$ и $x_2=a_2$ шарнирно оперты, то в случае симметричных колебаний из (2.4) и (2.5) имеем

$$ctg\frac{a_1k_1}{2}=-\left(1+\alpha+2\beta_1^2\right)^{-1/2},\quad k_2=\frac{(2n-1)\pi}{2}\quad (n=1,2,\ldots)$$

Из (2.4)-(2.9) видно, что величины волновых чисел k_1 и k_2 зависят от напряженности внешнего магнитного поля. Как показана в работе [1], указанная зависимость является существенной в случае тонких пластинок и имеет более ощутимое влияние на частоты низших форм колебаний.

Таким образом, для каждого типа колебаний имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными волновыми числами k_1 и k_2. Находя эти величины, по формуле (2.3) определяем соответствующую частоту магнитрупругих колебаний.

На основе формулы (2.3) и уравнений (2.4)-(2.7) произведены численные расчеты первых трех ($m=1,2,3$) относительных расчет ω_m/ω_{om} магнитоупругих колебаний удлиненной пластинки ($a_2=>0$), совершающей колебания по цилиндрической поверхности ($k_2=0$) с образующими параллельными оси ox_2. Здесь ω_{om} - частоты собственных колебаний в отсутствие магнитного поля, найденные асимптотическим методом [2]. Для расчета принято $E=7{,}3\times10^{11}$ дин/ $см^2$, $\nu=0{,}34$ (дюралюминиевая пластинка), $H_0=10^4$ ч. Результаты численных решений приведены в таблице, где данные над чертой относятся к случаю шарнирно опертой по сторонам $x_1=0$ и $x_1=a$ пластинки, а под чертой к защемленной пластинке.

Рассматривая таблицу, замечаем, что наличие магнитного поля может привести к существенному увеличению частот низших форм колебаний и это влияние намного усиливается с уменьшением относительной толщины пластинки. Легко заметить также, что чем выше форма колебаний и чем жестче закреплены края пластинки, тем меньше влияние магнитного поля.

Переходим к рассмотрению поведения сверхпроводящей прямоугольной пластинки в нестационарном магнитном поле, вектор напряженности которого направлен по оси ox_1, то есть при $H_{02}(t)=0$. В этом случае уравнение колебания пластинки, согласно (1.15), имеет вид

$$D\Delta^2w+2\rho h\frac{\partial^2w}{\partial t^2}+\frac{1+kh}{2\pi k}H_{01}^2(t)\frac{\partial^2w}{\partial x_1^2}=0 \qquad (3.1)$$

Волновые числа k_1 и k_2, входящие в уравнение (3.1), в зависимости от типа граничных условий на контуре пластинки, будем определять из уравнений (2.4)-(2.9), полученных в предыдущем пункте при рассмотрении магнитоупругих колебаний в постоянном продольном магнитном поле.

Т А Б Л И Ц А

	$2h/\ a_1 = 10^{-1}$			$2h/\ a_1 = 0{,}5\times10^{-2}$		
	$r = 0{,}5$	$r = 1{,}0$	$r = 3{,}0$	$r = 0{,}5$	$r = 1{,}0$	$r = 3{,}0$
m = 1	1,69 1,16	2,91 1,57	8,26 4,23	3,99 2,01	7,79 3,65	23,2 10,46
m = 2	1,11 1,04	1,39 1,17	3,07 1,95	1,67 1,33	2,91 2,03	8,26 5,73
m = 3	1,03 1,02	1,13 1,16	1,87 1,36	1,25 1,12	1,79 1,46	4,57 3,20

На основе (3.1) рассмотрим колебания шарнирно опертой по всему контуру прямоугольной пластинки. Тогда, согласно (2.7), для волновых чисел k_1 и k_2 имеем: $k_1 = m\pi/\ a_1$, $k_2 = n\pi/\ a_2$ $(m,n = 1,2,3,\ldots)$. Представляя решение рассматриваемой задачи в виде

$$w = f_{mn}(t)\sin(\lambda_m x_1)\sin(\nu_n x_2),\quad \lambda_m = \frac{m\pi}{a_1},\quad \nu_n = \frac{n\pi}{a_2}$$

удовлетворим известным условиям шарнирного опирания, а из уравнения (3.1), для определения неизвестных функций $f_{mn}(t)$, получим следующие линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами:

$$\frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + \omega_{mn}[\,1 + a_{mn}(t)]\,f_{mn} = 0 \qquad (3.2)$$

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D}{2\rho h}(\lambda_m^2 + \nu_n^2)^2$$

$$a_{mn}(t) = \frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2 + \nu_n^2)^2}\left[h + \frac{1}{\sqrt{\lambda_m^2 + \nu_n^2}}\right]\frac{H_{01}^2(t)}{2\pi D} = \gamma_{mn} H_{01}^2(t)$$

где ω_{mn} - частоты собственных колебаний пластинки в отсутствии магнитного поля.

Для выявления влияния нестационарности магнитного поля на колебания пластинки рассмотрим случай периодического во времени магнитного поля: $H_{01}(t) = H_0 + H_1\cos(\theta t)$. Тогда уравнения (3.2) примут вид:

$$\frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + \Omega_{mn}^2\left(1 + 2\mu\,{}^{(1)}_{mn}\cos(\theta t) + 2\mu\,{}^{(2)}_{mn}\cos(2\theta t)\right) f_{mn} = 0 \qquad (3.3)$$

где

$$\Omega_{mn}^2 = \omega_{mn}^2\left[1 + (H_0^2 + \tfrac{1}{2}H_1^2)\gamma_{mn}\right]$$

$$\mu\,{}^{(1)}_{mn} = \frac{H_0 H_1 \gamma_{mn}}{1 + (H_0^2 + \frac{1}{2}H_1^2)\gamma_{mn}},$$

$$\mu\,{}^{(2)}_{mn} = \frac{H_1^2 \gamma_{mn}}{4\left[1 + (H_0^2 + \frac{1}{2}H_1^2)\gamma_{mn}\right]} \qquad (3.4)$$

В (3.4) Ω_{mn} - частоты поперечных магнитоупругих колебаний пластинки, $\mu\,{}^{(1)}_{mn}$ и $\mu\,{}^{(2)}_{mn}$ - коэффициент возбуждения, причем $\mu\,{}^{(1)}_{mn} < 1$ и $\mu\,{}^{(2)}_{mn} < 1$.

Каждое уравнение (3.3) имеет периодические коэффициенты и, как известно [7] при некоторых соотношениях между его коэффициентами оно имеет не-

ограниченно возрастающие во времени решения, означающие динамическую неустойчивость рассматриваемой магнитоупругой системы. Таким образом, присутствие периодического во времени магнитного поля может привести к возбуждению резонансных колебаний параметрического типа в сверхпроводящей пластинке с достаточно широкими областями неустойчивости (фиг.1).

Границы областей динамической неустойчивости θ_*, расположенных вблизи частот $2\Omega_{mn}$ и Ω_{mn}, согласно [7], определяются следующими формулами:

для области, расположенной около частоты

$$\theta_*^{\pm} = 2\omega_{mn}\left[1 + \left(H_0^2 + \frac{1}{2}H_1^2\right)\gamma_{mn} \pm H_0 H_1 \gamma_{mn}\right]^{1/2} \qquad (3.5)$$

для области, расположенной около частоты

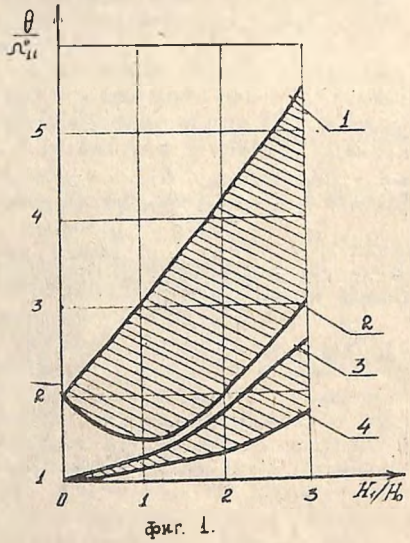
$$\theta_*^{\pm} = \omega_{mn}\left[1 + \left(H_0^2 + \frac{1}{2}H_1^2\right)\gamma_{mn} \pm \frac{1}{4}H_1^2\gamma_{mn}\right]^{1/2} \qquad (3.6)$$

На фиг.1 (где Ω_{11}^0 - первая частота магнитоупругих колебаний квадратной пластинки в постоянном продольном магнитном поле $\vec{H}_0$) показаны области динамической неустойчивости для квадратной ($a_1 = a_2 = a$) дюралюминиевой пластинки при $m = n = 1$, $H_0 = 2\times10^3$ э, $a/2h = 5\times10^2$. Кривые 1 и 2 построены по уравнению (3.5), а кривые 3 и 4 - по уравнению (3.6). Из формул (3.5), (3.6) и построенной на их основе фигуры следует, что:

а) при любом $H_1 \neq 0$ возможно появление параметрического резонанса (при $H_1 = 0$, как и следовало ожидать, параметрический резонанс невозможен);

б) ширины $(\theta_*^{+} - \theta_*^{-})$ обеих областей неустойчивости являются возрастающими функциями амплитуды H_1 нестационарной части внешнего магнитного поля;

в) при фиксированном H_1 ширина области (3.5) является монотонно возрастающей, а ширина области (3.6) - монотонно убывающей функцией постоянной составляющей H_0 заданного магнитного поля, причем когда $H_0 = 0$, то возбуждение параметрического резонанса вблизи частот $2\Omega_{mn}$ невозможно.



фиг. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е. Применение асимптотического метода В.В. Болотина для исследования магнитоупругих колебаний идеально проводящих прямоугольных пластин. - Проблемы машиностроения, 1986, вып. 25, с. 63-68.
2. Болотин В.В. Динамический краевой эффект при упругих колебаниях пластинки. - Инженерный сборник, 1961, т. 31, с. 3-14.

3.Ландау Л.Д. и Лифшиц ЕМ. Электродинамика сплошных сред. - М.: Наука, 1982. 620 с.
4. Багдасарян Г. Е. Бесконтактный способ возбуждения резонансных колебаний в сверхпроводящей пластинке. - Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1989, т.42, N=6^с. 3-9.
5. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е, Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек ипластин. -М.: Наука, 1977, 272с.
6. Багдасарян Г.Е. Колебания прямоугольной проводящей пластинки в продольном магнитном поле. - Из. АН Арм. ССР, Механика, 1987, т.40, No.3, с.11-18.
7. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. -М.: Гостехиздат, 1956с600
Ереванский университет Поступила в редакцию 9.07.1992

Ереванский Государственный Университет
Поступила в редакцию 09.07.1992