АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 14 МАЙ, 1978 ВЫПУСК 2

УДК 523.841.3

О РАСШИРЕНИИ АТМОСФЕРЫ ПУЛЬСИРУЮЩЕЙ ЗВЕЗДЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН

О. В. ФЕДОРОВА

Поступила 26 сентября 1977
Пересмотрена 16 января 1978

Решена самосогласованная задача о расширении атмосферы пульсирующей звезды под действием периодических ударных волн при различных предположениях относительно скорости высвечивания газа за фронтом. Атмосфера расширена тем сильнее, чем больше начальная скорость ударной волны и чем медленнее высвечивается газ. В случае отсутствия градиента давления за фронтом ударной волны характерная шкала распределения плотности превышает шкалу высот статической атмосферы на порядок для долгопериодических переменных и на два порядка — для переменных типа RR Лиры.

1. *Введение.* Важной и до сих пор мало разработанной частью теории атмосфер звезд является учет динамических эффектов, существенных для многих типов переменных. В частности, хорошо известно, что в атмосферах пульсирующих переменных различных типов присутствуют сильные периодические ударные волны. Эти волны должны в значительной степени определять структуру атмосферы звезды. Исследование строения атмосферы в этом случае имеет большое значение для ряда задач, например, для проблемы потери массы и образования околозвездных оболочек у переменных поздних спектральных классов. В данной работе делается попытка на основе приближенной модели получить распределение плотности в атмосфере звезды, устанавливающееся под действием периодических ударных волн.

Наиболее полным решением задачи явился бы расчет, прослеживающий изменение строения атмосферы звезды от некоторого произвольного начального состояния при заданном периоде движения ударных волн до выхода на установившийся режим после большого числа периодов. По этому пути пошел Уитни [1], который рассчитывал динамическую модель атмосферы звезды типа W Девы. Задача решалась им в сильно упрощенной формулировке, были прослежены только три периода и конечное со-

стояние не было достигнуто. Влияние периодических ударных волн в этой работе характеризовалось увеличением средней по периоду шкалы высот в атмосфере по сравнению со шкалой высот в отсутствие ударных волн. Недавно Хилл [2] рассчитал процесс образования ударных волн в атмосфере звезды типа RR Лиры под действием поршня, находящегося в глубине атмосферы и движущегося по синусоидальному закону. Было также прослежено несколько периодов. Один из выводов этой работы состоит в том, что динамическая атмосфера сильно расширена по сравнению со статической. Оценка ее протяженности дана для одного из моментов расчета. Но для холодных звезд такой путь решения задачи требует громоздких вычислений и учета большого числа процессов, происходящих за фронтом ударной волны. Поэтому для качественной оценки влияния ударных волн полезно рассмотреть простую аналитическую модель, как это сделал И. А. Климишин [3]. Основной результат [3] заключается в том, что атмосфера звезды будет расширена не только в среднем по периоду, как это отмечено в [1], но и исходное положение любого элемента газа непосредственно перед фронтом волны будет сильно отличаться от его положения в статической атмосфере. В настоящей работе, так же, как и в [3], изучается зависимость плотности газа перед фронтом идущей в атмосфере звезды ударной волны от координаты фронта. При этом задача должна быть самосогласованной — не только распределение плотности в атмосфере зависит от движения ударных волн, но и скорость волны, в свою очередь, определяется законом падения плотности. Решение в [3], основанное на теории диссипации ударных волн, строго говоря, не является самосогласованным, так как распределение плотности найдено в предположении постоянства скорости ударной волны. В настоящей работе сделана попытка другим методом решить самосогласованную задачу.

2. *Основные предположения модели.* Рассмотрим основные упрощающие предположения модели.

а) Будем считать, что физическое состояние, координата и скорость данного элемента газа точно восстанавливаются через заданный период прохождения ударных волн. В реальных условиях на внешней границе атмосферы возможен выброс вещества, достигшего скорости, большей чем параболическая, но задача о потере массы звездой под действием периодических ударных волн представляет собой самостоятельную проблему и здесь не затрагивается.

б) Будем считать, что нам известен закон падения давления в лагранжевом элементе газа. Далее будут использованы два способа задания этого закона. Первый способ: будем предполагать, что за фронтом волны выполнено условие:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \tag{1}$$

то есть давление в данном элементе газа в любой момент равно давлению на фронте. Такое условие часто используется при решении различного рода задач, например, в [4].

Второй способ: будем предполагать, что давление в лагранжевом элементе газа задано как функция времени, которая в момент прохождения газа через фронт волны имеет значение p_2, а через период П, когда через элемент проходит следующая волна, становится равной p_1 — давлению, которое газ имел перед фронтом предыдущей волны.

в) Если не предполагать выполнения условия (1), то задачу можно решить аналитически только для плоской атмосферы с постоянным ускорением силы тяжести. При условии (1) решение удается получить также и для сферически-симметричной атмосферы, в которой ускорение силы тяжести обратно пропорционально квадрату расстояния от центра звезды.

г) Элемент газа, прошедший через фронт, движется вверх с начальной скоростью u_2. (Все скорости в задаче рассматриваются в неподвижной системе координат, связанной с центром звезды). Через период газ должен возвратиться в исходную точку. Скорость его перед прохождением через фронт следующей волны обозначим u_1. Для решения задачи необходимо задать u_1, например, в зависимости от u_2. Мы рассмотрим три типа соотношения между u_1 и u_2. Первый из них:

$$u_1 = -u_2. \tag{2}$$

Если выполнено условие (1), то газ после прохождения через фронт волны движется только под действием гравитации. Тогда u_1 и u_2 должны быть связаны соотношением (2). Но (2) можно использовать и в случае, если движение газа за фронтом определяется также и градиентом давления. Наряду с (2) будет использовано соотношение:

$$u_2 = u_1 = \text{const}. \tag{3}$$

Такое соотношение приближенно выполнялось в расчетах Хилла [2]. Можно рассмотреть и предельный случай — остановку газа перед фронтом волны: $u_1 = 0$.

д) Состояние элемента газа перед фронтом волны определяется двумя переменными: p_1 и ρ_1. Решение самосогласованной задачи дает возможность определить только одну из них в функции координаты фронта, поэтому примем, что p_1 и ρ_1 связаны политропной зависимостью: $p_1 = \text{const}\,\rho_1^k$.

Будем выделять «изотермический» случай, когда температура перед фронтом одинакова вдоль атмосферы. Действительное поведение температуры может быть выяснено только расчетом распространения по атмосфере ударной волны при подробном учете высвечивания.

3. *Решение задачи при условии отсутствия градиента давления за фронтом ударной волны.*

а) *Атмосфера с постоянным ускорением силы тяжести.* Будем предполагать, что выполнено условие (1) и что температура перед фронтом волны одинакова по атмосфере. В силу (1) газ движется только под действием гравитации, и скорости u_1 и u_2 связаны соотношением (2). За время П элемент газа поднимается и падает обратно при постоянном g, откуда следует

$$u_2 = \frac{g\Pi}{2}. \tag{4}$$

Далее, система законов сохранения на фронте ударной волны записывается в виде:

$$\begin{gathered} \rho_1 (D - u_1) = \rho_2 (D - u_2), \\ p_1 + \rho_1 (D - u_1)^2 = p_2 + \rho_2 (D - u_2)^2, \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{(D - u_1)^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{(D - u_2)^2}{2}, \end{gathered} \tag{5}$$

где D — скорость фронта ударной волны. Здесь мы для простоты предположили, что состояние ионизации газа при переходе через фронт не изменяется и нет быстрого высвечивания газа непосредственно за фронтом. Случай быстрого высвечивания будет приближенно рассмотрен в дальнейшем. Из уравнений (5) при учете (2) можно получить соотношение

$$\frac{\gamma p_1}{\rho_1} = (D + u_2)(D - \gamma u_2). \tag{6}$$

Обозначим скорость звука, соответствующую температуре перед фронтом T_1, через c и подставим в (6) u_2 из (4). Получаем

$$\left(\frac{D}{c} + \frac{g\Pi}{2c}\right)\left(\frac{D}{c} - \gamma \frac{g\Pi}{2c}\right) = 1. \tag{7}$$

При заданной безразмерной комбинации постоянных $g\Pi/c$ из этого соотношения мы находим безразмерную скорость фронта D/c. Таким обра-

зом, принятые нами предположения соответствуют частной ситуации: волна движется с постоянной скоростью, имеющей вполне определенное значение, зависящее от периода Π и характеристик атмосферы g и c.

Найдем теперь распределение плотности перед фронтом волны $\rho_1(r)$. Из (5) следует:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{D+\gamma u_2}{D-\gamma u_2}. \tag{8}$$

Рассмотрим две последовательно идущие друг за другом ударные волны. Они разделены расстоянием $D\Pi$. Так как, согласно предположению, давление за фронтом волны постоянно, то давление за фронтом идущей впереди волны равно давлению перед фронтом последующей, то есть

$$p_1(r) = p_2(r + D\Pi). \tag{9}$$

Учитывая (8) и (4), получаем уравнение для определения зависимости $p_1(r)$.

$$p_1(r) = \frac{D+\gamma\frac{g\Pi}{2}}{D-\gamma\frac{g\Pi}{2}}\, p_1(r + D\Pi). \tag{10}$$

Значения функций p_1 и ρ_1 связаны через уравнение состояния идеального газа. Согласно предположению, температура T_1 постоянна вдоль атмосферы. Возможными изменениями с расстоянием молекулярного веса газа перед фронтом для простоты пренебрегаем. Тогда и для функции $\rho_1(r)$ выполняется соотношение, аналогичное (10):

$$\rho_1(r) = \frac{D+\gamma\frac{g\Pi}{2}}{D-\gamma\frac{g\Pi}{2}}\, \rho_1(r + D\Pi). \tag{11}$$

Так как скорость фронта D, согласно (7), постоянна, следовательно, коэффициент в правой части (11) и величина $D\Pi$ не зависят от расстояния, и решение уравнения (11) имеет вид:

$$\rho_1(r) = \rho_1(r_0)\, e^{-\frac{r-r_0}{D\Pi}\ln\frac{D+\gamma\frac{g\Pi}{2}}{D-\gamma\frac{g\Pi}{2}}}. \tag{12}$$

Полученная формула дает закон падения плотности с точки зрения наблюдателя, движущегося с фронтом волны. Найти распределение плот-

ности в атмосфере в заданный момент при заданном расположении фронтов волн можно, используя уравнение неразрывности, так как поле скоростей известно. В точках перед фронтами плотность определяется из (12).

Сравним полученное распределение с распределением плотности в статической изотермической атмосфере, которое представляет собой экспоненту со шкалой высот H_0, равной $c^2/\gamma g$. Отношение характерной высоты H из формулы (12) к H_0 равно

$$\frac{H}{H_0} = \frac{D}{c} - \frac{g\Pi}{c}\left(\ln\frac{\frac{D}{c} + \gamma\frac{g\Pi}{2c}}{\frac{D}{c} - \gamma\frac{g\Pi}{2c}}\right)^{-1}, \qquad (13)$$

D/c определяется уравнением (7). Таким образом, отношение характерных высот также является функцией безразмерной величины $g\Pi/c$.

Применим полученные формулы к долгопериодическим переменным. Характерные значения постоянных для них следующие: $g \sim 0.1$ *см/сек*^{2}, $\Pi \sim 3\cdot 10^7$ *сек*, $c \sim 5\cdot 10^5$ *см/сек*. Тогда $g\Pi/c = 6$. Из (7) и (13) получаем $D/c = 5.12$, $H/H_0 = 11.6$ и при $H_0 \sim 1.5\cdot 10^{12}$ *см* $H \sim 1.7\cdot 10^{13}$ *см*. Характерный размер атмосферы, расширенной периодическими ударными волнами, получается на порядок большим, чем в статическом случае и сравним с радиусом этих звезд. Атмосфере звезды типа RR Лиры, рассмотренной в [2], соответствует $g\Pi/c = 20$, что дает $D/c = 16.7$, $H/H_0 = 82$. По оценке в [2], в один из моментов атмосфера в расчетах была расширена по сравнению со статической в 20 раз, что по порядку величины близко к полученному здесь результату, при всей грубости исходных предположений в отношении высвечивания за фронтом.

Очевидно, что периодически распространяющиеся по атмосфере звезды ударные волны — мощный фактор, расширяющий атмосферу. Но если бы все слои атмосферы начинали и заканчивали движение одновременно, то в конце периода атмосфера возвращалась бы к своему статическому состоянию и была бы расширена только в среднем по периоду. Тот факт, что и перед фронтом волны газ занимает положение, отличное от статического, объясняется неодновременностью действия ударной волны на разные слои атмосферы.

б) *Сферически-симметричная атмосфера.* Только в предположении, что за фронтом волны $\partial p/\partial r = 0$, удается решить задачу в сферическом случае, то есть при учете переменности g. Уменьшение g с расстоянием от центра звезды существенно для долгопериодических переменных, так как характерный размер атмосферы у них порядка радиуса звезды.

Задача решается аналогично только что рассмотренной, но скорость элемента газа после прохождения через фронт ударной волны u_2 теперь

зависит от координаты фронта r. Зависимость $u_2(r)$ находится численно из условия, что газ в сферически-симметричном поле тяжести возвращается в исходную точку за время П. Скорость фронта волны $D(r)$, как и ранее, определяется из уравнения (6). Для того чтобы найти распределение плотности $\rho_1(r)$, введем функцию $r_\Phi(r)$, определяющую координату предыдущего ударного фронта в момент, когда последующий фронт проходит через точку r. Величину r_Φ находим численно, зная $D(r)$. Уравнение для $\rho_1(r)$ записывается аналогично (11) с той разницей, что все величины в правой части теперь являются функциями $r_\Phi(r)$:

$$\rho_1(r) = \frac{D(r_\Phi) + \gamma u_2(r_\Phi)}{D(r_\Phi) - \gamma u_2(r_\Phi)}\,\rho_1(r_\Phi). \qquad (14)$$

Зададим некоторое значение координаты фронта r_1. Зная функцию $r_\Phi(r)$, из (14) находим отношение плотностей $\rho_1(r_2)/\rho_1(r_1)$, где $r_2 = r_\Phi(r_1)$. Аналогично для $r_3 = r_\Phi(r_2)$ можно найти отношение $\rho_1(r_3)/\rho_1(r_2)$ и, учитывая предыдущий результат, отношение $\rho_1(r_3)/\rho_1(r_1)$. Повторив эту процедуру несколько раз, получаем значения относительной плотности перед фронтом $\rho_1(r_i)/\rho_1(r_1)$ для последовательности точек r_i, таких, что $r_{i+1} = r_\Phi(r_i)$. Уже по результатам этих вычислений можно судить о характере зависимости $\rho_1(r)$. Уточнить вид функции $\rho_1(r)$ можно, например, следующим образом. Сделаем такие расчеты для нескольких последовательностей с различными значениями начальной координаты r_1. Результаты вычислений для последовательности, начинающейся на нижней границе слоя r_0, нанесем на график, по оси абсцисс которого отложена координата фронта r, а по оси ординат $-\lg[\rho_1(r)/\rho_1(r_0)]$. Для любой другой последовательности сдвиг соответствующей ей серии точек вдоль оси ординат неизвестен, и сначала мы располагаем эту серию на графике с произвольным сдвигом. Потом, передвигая вдоль оси ординат серии точек для разных последовательностей, добиваемся того, чтобы все эти точки легли на одну плавную кривую.

При решении задачи необходимо задать следующие параметры звезды: П, T_1, r_0, M. Значения П, T_1 и r_0 примем соответственно $3 \cdot 10^7$ *сек*, 2500 °К, $4 \cdot 10^{13}$ *см*. Массы долгопериодических переменных в настоящее время известны с очень низкой точностью. В большинстве случаев при расчетах, следуя [5, 6], принимают $M = (1 \div 2)\,M_\odot$, однако возможно, что ближе к действительности значения $M = (2 \div 3)\,M_\odot$ [7]. Здесь мы примем $M = 1.5\,M_\odot$. На рис. 1 показана полученная описанным способом зависимость $\rho_1(r)$. Для сравнения приведены распределение плотности в статической сферической атмосфере с температурой T_1 и распределение, полученное при неизмен-

ном g, равном $g(r_0)$. Основное следствие учета переменности g — быстрое уменьшение скорости волны и, соответственно, более быстрое падение плотности перед фронтом.

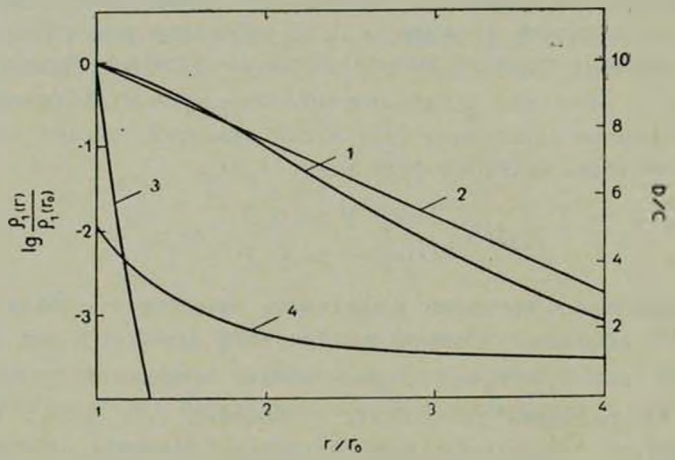

Рис. 1. 1 — относительная плотность перед фронтом с учетом переменности g, 2 — то же при постоянном g, 3 — относительная плотность в статической сферической атмосфере, 4 — скорость ударной волны при переменном g. Шкала для скорости дана справа.

4. *Решение задачи при произвольной начальной скорости ударной волны.* Условие отсутствия градиента давления за фронтом ударной волны соответствует определенному значению скорости ударной волны. Здесь мы решим задачу методом, позволяющим произвольно задавать начальную скорость волны. Будем считать, что нам известен закон изменения со временем давления в лагранжевом элементе газа за фронтом. Для простоты предполагаем, что этот закон верен для всего слоя атмосферы, по которому распространяются ударные волны.

Для описания изменения давления в элементе газа за фронтом естественно брать достаточно простые функции, которые принимают значение p_2 в момент прохождения через фронт t_0 и значение p_1 при $t = t_0 + \Pi$. Критерием при отборе допустимых предположений служило условие:

$$\frac{dp_2(r)}{dr} < 0, \tag{15}$$

где r — координата фронта волны. Условие (15) выражает естественное физическое требование — так как ударная волна теряет энергию, приводя газ в движение и нагревая его, давление на ее фронте может только уменьшаться.

Простейшим является линейный закон, использованный в работе [3]:

$$p(t) = p_1 + (p_2 - p_1)\frac{t - t_0}{\Pi}, \tag{16}$$

но оказалось, что критерию (15) он не удовлетворяет. Примем экспоненциальный закон:

$$p(t) = p_2 e^{-\left(\ln \frac{p_2}{p_1}\right)\frac{t-t_0}{\Pi}}. \tag{17}$$

Закон (17) предполагает гораздо более быстрое уменьшение давления, чем (16). Характерное время падения давления по закону (17) составляет $\Pi/\ln(p_2/p_1)$. При расчетах значение p_2/p_1, как правило, лежало в интервале $10^2 \div 10^3$, поэтому характерное время примерно на порядок меньше периода П. Основная причина уменьшения давления в лагранжевом элементе газа за фронтом — высвечивание газа, нагретого ударной волной. Закон (17) лучше всего описывает условия в атмосферах долгопериодических переменных, где времена высвечивания достаточно велики—порядка 10^7 *сек* [8], а значение П составляет 10^7—10^8 *сек*. Ниже будет рассматриваться случай еще более быстрого высвечивания. Задача решается для плоской атмосферы с постоянным ускорением силы тяжести.

а) *Решение задачи для случая* $u_1 = -u_2$.

Рассмотрим сначала случай, когда скорости газа перед фронтом и за фронтом волны связаны соотношением (2). Уравнение движения лагранжева элемента газа имеет вид:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial m} - g, \tag{18}$$

m — лагранжева координата — масса газа в столбе с единичным сечением. Продифференцируем (17) по массе.

$$\frac{\partial p}{\partial m} = e^{-\left(\ln \frac{p_2}{p_1}\right)\frac{t-t_0}{\Pi}}\left[\frac{dp_2}{dm}\left(1 - \frac{t-t_0}{\Pi}\right) + \frac{dp_1}{dm}\frac{p_2}{p_1}\frac{t-t_0}{\Pi} + \left(\ln \frac{p_2}{p_1}\right)\frac{1}{\Pi}\frac{dt_0}{dm}\right]. \tag{19}$$

Разность давлений в соседних лагранжевых элементах газа за фронтом волны определяется разностью давлений в них в момент прохождения через фронт, разностью скоростей изменения давления и, наконец, различием моментов прохождения через фронт, откуда в (19) и появляется производная dt_0/dm.

За время dt_0 через фронт протекает масса dm,

$$dm = \rho_1 (D - u_1)\, dt_0, \tag{20}$$

отсюда

$$\frac{dt_0}{dm} = \frac{1}{\rho_1 (D - u_1)}. \tag{21}$$

Величины p_1 и p_2 являются функциями только координаты, и производные dp_1/dm и dp_2/dm в (19) от времени не зависят. Поэтому, интегрируя уравнение (18) после подстановки в него (19) с учетом (21), получим скорость элемента газа за фронтом в функции времени — $u(t)$, а повторное интегрирование даст $r(t)$. Затем полученные функции подставляем в условия периодичности изменения состояния газа. Для того, чтобы элемент газа от состояния p_2, ρ_2, u_2 вернулся к состоянию p_1, ρ_1, u_1, а также в исходную точку пространства, достаточно выполнения трех условий:

$$\begin{aligned} p(t_0 + \Pi) &= p_1 \\ u(t_0 + \Pi) &= u_1 \\ r(t_0 + \Pi) &= r(t_0). \end{aligned} \tag{22}$$

Первое из (22) уже учтено в формуле (17). Подставив в оставшиеся условия функции $u(t)$ и $r(t)$, получим два уравнения, содержащие производные dp_1/dm и dp_2/dm. Мы приведем только окончательный результат выкладок. Из этих уравнений получаем:

$$\begin{aligned} \Pi \frac{d(p_2 - p_1)}{dm} &= -\gamma \frac{\ln q}{q}\left(x + y + \frac{u_2 - u_1}{s}\right) \\ \Pi \frac{dp_1}{dm} &= -\ln q \left(sx - \frac{y}{q} + u_2 - u_1\right), \end{aligned} \tag{23}$$

где обозначено

$$q = \frac{p_2}{p_1}, \qquad s = 1 - \frac{1}{q},$$

$$x = \frac{(u_2 - u_1 - g\Pi)\left|\frac{2s}{(\ln q)^2} + \frac{s-2}{\ln q}\right| - \left(u_2 - \frac{g\Pi}{2}\right)\left(1 - s - \frac{s}{\ln q}\right)}{1 - s - \frac{s^2}{(\ln q)^2}},$$

$$y = \frac{\left(1 - \frac{s}{\ln q}\right)(u_2 - u_1 - g\Pi) - s\left(u_2 - \frac{g\Pi}{2}\right)}{1 - s - \frac{s^2}{(\ln q)^2}}.$$

Перейдем от производных по m к производным по координате фронта r. Связь элементов времени и массы дается формулой (20), и так как $dr = Ddt_0$, получим

$$\frac{d}{dr} = \frac{\rho_1 (D - u_1)}{D} \frac{d}{dm}. \tag{24}$$

Записанная в производных по r система (23) содержит шесть неизвестных функций: $u_1(r)$, $u_2(r)$, $p_1(r)$, $p_2(r)$, $\rho_1(r)$, $D(r)$. Два соотношения между ними следует из законов сохранения на фронте ударной волны (5). Кроме того, существуют зависимости между u_1 и u_2 и между p_1 и ρ_1. При учете этих четырех соотношений система (23) становится полной. Нас интересуют функции $D(r)$ и $\rho_1(r)$. Запишем дифференциальные уравнения для этих функций вместо p_1 и $p_2 - p_1$. Перейдем к безразмерным переменным. Плотность перед фронтом ρ_1 вычисляем по отношению к плотности на внутренней границе слоя ρ_0, в качестве масштаба скорости берем скорость звука c на внутренней границе перед фронтом. Обозначим $\tilde{u}_2 = u_2/c$, $\tilde{D} = D/c$, $\tilde{r} = r/\Pi c$, $\tilde{\rho}_1 = \rho_1/\rho_0$. Тогда система уравнений приобретает вид:

$$\frac{d\tilde{D}}{d\tilde{r}} = \frac{\Pi}{2c} \frac{d(p_2 - p_1)}{dm} \frac{(\gamma - 1)\tilde{D} + 2\gamma\tilde{u}_2}{2\tilde{D}(\tilde{D} + \tilde{u}_2)} +$$

$$+ \frac{\Pi}{c} \gamma \frac{dp_1}{dm} \frac{1}{\tilde{D} - \gamma\tilde{u}_2} \left[\frac{k-1}{2k} - \tilde{u}_2 \frac{(\gamma - 1)\tilde{D} + 2\gamma\tilde{u}_2}{2\tilde{D}(\tilde{D} + \tilde{u}_2)} \right], \tag{25}$$

$$\frac{d\tilde{\rho}_1}{d\tilde{r}} = \frac{\tilde{\rho}_1}{k} \frac{\Pi}{c} \gamma \frac{dp_1}{dm} \frac{1}{\tilde{D}(\tilde{D} - \gamma\tilde{u}_2)},$$

где k — степень политропы в формуле, связывающей p_1 и ρ_1, а $\tilde{u}_2$ получается из уравнения

$$(\tilde{D} + \tilde{u}_2)(\tilde{D} - \gamma\tilde{u}_2) = \tilde{\rho}_1^{k-1}. \tag{26}$$

В систему (25) параметры звезды входят через коэффициенты $(\Pi/c)\,d(p_2 - p_1)/dm$ и $(\Pi/c)\,dp_1/dm$. Как легко видеть из уравнений (23), эти коэффициенты содержат ту же безразмерную комбинацию параметров $g\Pi/c$, которая входила в решение задачи с постоянным давлением за фронтом волны.

Система (25) решалась для ряда значений безразмерной начальной скорости волны $\tilde{D}_{\text{нач.}}$ в интервале от 1.5 до 20 при нескольких значениях k от 1 до 2.

Расчеты при условии „изотермичности“ перед фронтом ($k = 1$) показывают следующее. Обозначим через $\tilde{D}_0$ скорость ударной волны, полученную в задаче с постоянным давлением за фронтом. При любом значении $\tilde{D}_{\text{нач.}}$ скорость волны стремится к $\tilde{D}_0$. Функция $\tilde{D}(r)$ возрастает, если $\tilde{D}_{\text{нач.}} < \tilde{D}_0$, и убывает при $\tilde{D}_{\text{нач.}} > \tilde{D}_0$. При некотором значении координаты r, близком к 2, достигается равенство $\tilde{D} = \tilde{D}_0$, и далее $\tilde{D}$ остается постоянной. Начиная с этого момента задача сводится к уже решенной задаче с постоянным давлением за фронтом, и распределение плотности описывается экспоненциальным законом (12). Результаты вычислений, соответствующие значению постоянной $g\Pi/c = 6$, для значений $\tilde{D}_{\text{нач.}}$, равных 3 и 10 при $k = 1$ представлены на рис. 2. Напомним, что величина $g\Pi/c = 6$ соответствует атмосфере долгопериодической переменной. В случае $\tilde{D}_{\text{нач.}} > \tilde{D}_0$ возникает инверсия плотности — плотность перед фронтом волны сначала растет, достигает максимума и убывает до исходного значения вблизи точки, где $\tilde{D} = \tilde{D}_0$. Трудно судить без дополнительных исследований, устойчива ли эта инверсия.

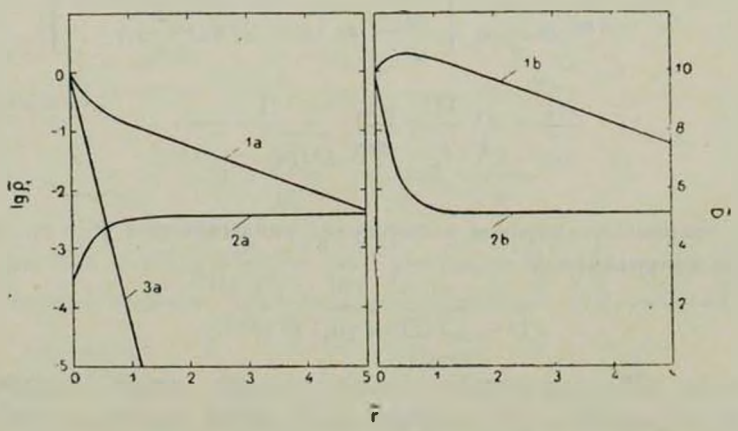

Рис. 2. 1а — относительная плотность перед фронтом при $\tilde{D}_{\text{нач.}} = 3$; 2а — скорость ударной волны при $\tilde{D}_{\text{нач.}} = 3$; 1б и 2б — то же при $\tilde{D}_{\text{нач.}} = 10$; 3а — относительная плотность в статической атмосфере. Шкала для скорости дана справа.

Вычисления при $k > 1$ показывают, что качественно картина такая же, как и при $k = 1$. Скорость ударной волны $\bar{D}$ также стремится к некоторому значению, близкому к $\bar{D}_0$, и потом слабо колеблется около него. Плотность на больших расстояниях от начала слоя убывает тем быстрее, чем больше k.

б) *Решение задачи в случае* $u_2 - u_1 = \text{const}$.

Рассмотрим случай, когда u_1 и u_2 связаны соотношением

$$u_2 - u_1 = v, \tag{27}$$

где v — постоянная. Из системы законов сохранения на фронте (5) с учетом (27) получим:

$$(D - u_2 + v)\left(D - u_2 - \frac{\gamma - 1}{2} v\right) = \frac{\gamma p_1}{\rho_1} \tag{28}$$

$$\frac{D - u_2 + \dfrac{\gamma + 1}{2} v}{D - u_2 - \dfrac{\gamma - 1}{2} v} = \frac{p_2}{p_1}. \tag{29}$$

В эту систему скорости D и u_2 входят только в сочетании $D - u_2$, поэтому, исключая $D - u_2$, получаем соотношение между p_1, ρ_1, p_2 и v:

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{\rho_1 v^2}{p_1}\left(\frac{\gamma + 1}{4} + \sqrt{\frac{(\gamma + 1)^2}{16} + \frac{\gamma p_1}{\rho_1 v^2}}\right). \tag{30}$$

Теперь продифференцируем (30) по m. Так как предполагается политропная зависимость между p_1 и ρ_1, получим уравнение, связывающее производные dp_1/dm и $d(p_2 - p_1)/dm$:

$$\frac{dp_1}{dm} = \frac{d(p_2 - p_1)}{dm} \frac{\dfrac{\gamma + 1}{2} + 2\gamma \dfrac{p_1}{p_2 - p_1}}{\gamma + \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{\gamma + 1}{2} \dfrac{p_2 - p_1}{p_1} + \gamma\right)}. \tag{31}$$

Выражения для производных даны формулами (23). Подставив их в (31) с учетом (27), получим уравнение, в которое входят u_2, v, p_2/p_1 и характеристики звезды. Из этого уравнения находим $\tilde{u}_2$ в виде:

$$\tilde{u}_2 = -\frac{Q}{W\dfrac{s^2}{(\ln q)^2} + \dfrac{1}{q}\left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{s}{\ln q} + s\right)}, \tag{32}$$

где

$$Q = W\left|sA + \frac{B}{q} + \bar{v}\left(\frac{1}{q} - \frac{s^2}{(\ln q)^2}\right)\right| -$$

$$- \frac{1}{q}\left[A + B + \frac{\bar{v}}{s}\left(\frac{1}{q} - \frac{s^2}{(\ln q)^2}\right)\right],$$

$$A = \left(\bar{v} - \frac{g\Pi}{c}\right)\left[\frac{2s^2}{(\ln q)^2} + \frac{s-2}{\ln q}\right] + \frac{g\Pi}{2c}\left(\frac{1}{q} - \frac{s}{\ln q}\right),$$

$$B = \left(\bar{v} - \frac{g\Pi}{c}\right)\left(1 - \frac{s}{\ln q}\right) + s\frac{g\Pi}{2c},$$

$\bar{v}$ — отношение v/c, W — коэффициент при $d(p_2 - p_1)/dm$ в правой части (31). Система уравнений (29), (30), (32), записанная в безразмерных переменных, дает возможность определить скорость ударной волны $\bar{D}$, если известна постоянная $\tilde{v}$ и, наоборот, если мы знаем $\bar{D}$, то, решая систему методом итераций, находим $\tilde{v}$. Так как на внутренней границе слоя в качестве начального условия задается $\bar{D}$, а $\bar{\rho}_1 = 1$, мы сразу же определяем $\tilde{v}$ и в дальнейшем система (29), (30), (32) используется для того, чтобы вычислять скорость волны $\bar{D}$. В задаче остается одно дифференциальное уравнение для плотности:

$$\frac{d\bar{\rho}_1}{d\bar{r}} = \frac{\bar{\rho}_1}{\kappa}\frac{\Pi}{c}\frac{dp_1}{dm}\frac{p_2 - p_1}{p_1\bar{D}\bar{v}}, \tag{33}$$

$\Pi(dp_1/dm)$ дается второй из формул (23) при учете (27).

Рассмотрим сначала случай „изотермичности" перед фронтом ($k = 1$). Легко видеть из уравнений (28), (29), (32), что при постоянном значении $\gamma p_1/\rho_1$ функции p_2/p_1, $D - u_2$, u_2 не зависят от координаты r. Следовательно, и скорость ударной волны D постоянна. Значение dp_1/dm также не меняется, поэтому постоянен и коэффициент при $\bar{\rho}_1$ в правой части (33), откуда следует, что распределение плотности описывается экспоненциальной функцией. В табл. 1 приведены результаты вычислений $\tilde{v}$ и отношения H/H_0 при различных значениях $\bar{D}_{\text{нач}}$. Значение $g\Pi/c = 6$ соответствует долгопериодическим переменным, $g\Pi/c = 20$ — переменным типа RR Лиры.

Таблица 1

$g\Pi/c=6$			$g\Pi/c=20$		
$\bar{D}_{\text{нач.}}$	$\bar{v}$	H/H_0	$\bar{D}_{\text{нач.}}$	$\bar{v}$	H/H_0
1.5	2.32	2.19	1.5	6.40	3.53
5.0	5.89	11.22	5.0	9.81	10.52
10	10.27	31.31	10	14.27	38.86
20	18.63	93.38	20	22.77	107.6

Расчеты при k, превышающих единицу, показывают, что скорость меняется по-разному в зависимости от своего начального значения: она быстро убывает с расстоянием при малых $\bar{D}_{\text{нач.}}$ и остается практически постоянной, если $\bar{D}_{\text{нач.}}$ превышает некоторое критическое значение, близкое к 5 при $g\Pi/c = 6$. Локальная характерная шкала распределения плотности во всех случаях убывает с расстоянием, тем быстрее, чем меньше $\bar{D}_{\text{нач.}}$ Инверсий плотности, как в случае использования соотношения $u_1 = -u_2$, нигде не возникает.

Сравнение результатов расчетов для двух рассмотренных вариантов соотношения между u_1 и u_2 показывает, что решения сильно различаются как при малых значениях начальной скорости волны $\bar{D}_{\text{нач.}} \sim 2-3$, так и при больших, $\bar{D}_{\text{нач.}} > 8$. Наилучшее соответствие для $g\Pi/c = 6$ достигается при $\bar{D}_{\text{нач.}} \sim 5$. В обоих случаях при условии „изотермичности" перед фронтом скорость волны почти постоянна, а характерная шкала высот по плотности на порядок больше, чем в статической атмосфере.

Следует отметить, что в обоих случаях волна идет по газу, падающему ей навстречу, и относительно газа скорость фронта равна $D - u_1$. Напомним, что $u_1 < 0$ в случае падения газа навстречу ударному фронту.

Задача была решена также в предположении, что $u_1 = 0$, то есть к моменту прохождения через фронт волны газ останавливается. Уравнения для функций $\bar{D}(r)$ и $\rho_1(r)$ получаются для этого случая тем же методом, что при $u_1 = -u_2$. Но расчеты показали, что полученное решение не удовлетворяет критерию (15).

Для того, чтобы выяснить, как влияет на распределение плотности перед фронтом волны изменение зависимости $p(t)$, проводились расчеты при такой функции:

$$p(t) = p_1 + (p_2 - p_1)\left(1 - \frac{t - t_0}{\Pi}\right)^n, \qquad (34)$$

где $n > 1$. Качественно характер функций $\tilde{D}(r)$ и $\tilde{\rho}_1(r)$ остался прежним. Характерная шкала распределения плотности тем больше, чем меньше n, то есть чем медленнее высвечивается газ за фронтом волны. При $n < 2$ атмосфера расширена сильнее, чем в случае использования экспоненциальной функции (3).

Функция (34), как и (17), соответствует достаточно медленному высвечиванию газа за фронтом. Чтобы качественно исследовать, как меняется распределение плотности перед фронтом в случае быстрого высвечивания, была решена следующая задача. Предположим, что основная часть энергии газа излучается непосредственно на фронте, а далее снова верен экспоненциальный закон (17). Будем считать, например, что в атмосфере скачок плотности на фронте постоянен, и примем его в качестве параметра. Тогда в системе условий сохранения на фронте волны уравнение энергии заменится соотношением:

$$\rho_2 = \lambda \rho_1, \qquad (35)$$

где $\lambda > 4$. Вычисления проводились для случая $u_1 = -u_2$. Расчеты показали, что качественных изменений в характере функций $\tilde{D}(r)$ и $\tilde{\rho}_1(r)$ нет. При „изотермичности“ перед фронтом скорость ударной волны $\tilde{D}$ достигает некоторого критического значения и далее остается постоянной, а распределение плотности с этого момента описывается экспоненциальной функцией. Значения критической скорости $\tilde{D}_0$ и отношения характерной высоты по плотности к шкале высот статической изотермической атмосферы H/H_0 слабо зависят от λ. Для $g\Pi/c = 6$ при $\lambda = 10$ имеем $\tilde{D}_0 = 3.67$, $H/H_0 = 8.70$. При $\lambda = 20$ эти величины равны соответственно 3.32 и 8.00.

5. *Обсуждение данных наблюдений.* Рассмотрим наблюдательные факты, касающиеся размеров атмосфер пульсирующих звезд. Результаты вычислений предполагают очень протяженные атмосферы для долгопериодических переменных. Их расположение на диаграмме ГР — высокие болометрические светимости, сравнимые со светимостями сверхгигантов, и низкие эффективные температуры — свидетельствует о фотосферных радиусах, бо́льших, чем у большинства непеременных красных гигантов. Следует отметить, что понятие фотосферы для звезд поздних спектральных классов не является отчетливым. Фактически это внешние слои атмосферы, не-

прозрачные в инфракрасной и оптической областях спектра. Для нескольких мирид имеются непосредственные измерения диаметров в совокупности с оценками расстояния. Радиус V Can составляет около 400 $R_\odot$ [9], для R Leo при расстоянии 250 *пс* измерения дают радиус 1800 $R_\odot$ [10]. Диаметр Миры Кита измерялся неоднократно, однако расстояние до нее определяется неоднозначно — от 50 *пс* [6] до 200 *пс* по спектроскопическому параллаксу [11]. При 100 *пс* радиус Миры получается близким к 600 $R_\odot$ [12]. Для сравнения — самый поздний из непеременных красных гигантов с измеренным диаметром — звезда класса M3 III η Gem имеет радиус 90 $R_\odot$ [13].

Непосредственное представление о протяженности атмосферы долгопериодической переменной можно получить, оценивая путь, который проходит в атмосфере ударная волна. По кривой лучевых скоростей, измеренных по смещениям эмиссионных линий, для Миры Кита получается величина $\sim 3 \cdot 10^{13}$ *см* [7], того же порядка, что и радиус звезды.

Косвенным свидетельством сильно расширенных атмосфер у мирид является присутствие у многих из них околозвездных оболочек, проявляющих себя инфракрасными избытками и излучением молекул OH, H_2O, SiO [14—17]. Большая протяженность атмосфер мирид, очевидно, должна способствовать действию механизмов, приводящих к потере массы и образованию околозвездных оболочек. Эти оболочки наблюдаются иногда и у непеременных красных гигантов и полуправильных переменных, но даже в предельных случаях инфракрасные избытки у этих звезд намного меньше, чем у долгопериодических переменных [14].

Ударные волны периодически распространяются в атмосферах полуправильных переменных типа RV Тельца. Об этом свидетельствует присутствие эмиссионных линий водорода в их спектрах и разрывов в кривых лучевых скоростей. Изучение кривых скоростей привело к выводу о большой протяженности атмосфер этих звезд [18]. Амплитуды изменения радиуса обращающего слоя получаются порядка 10^{13} *см* для колебаний с периодом 30^d—100^d. Протяженность атмосфер звезд типа RV Тельца оценивается в $5 \cdot 10^{13}$ *см* при радиусе фотосфер порядка 10^{13} *см*.

У звезд типа RR Лиры амплитуда перемещения в атмосфере слоя, излучающего водородные эмиссионные линии, а, следовательно, и протяженность атмосферы порядка 10^{11} *см* при радиусах фотосфер $3 \cdot 10^{11}$ *см* — $4 \cdot 10^{11}$ *см* [19].

Таким образом, наблюдательные данные свидетельствуют о большой протяженности атмосфер пульсирующих переменных. Эта протяженность, несомненно, связана с действием на атмосферу звезды периодических ударных волн.

В заключение автор приносит искреннюю благодарность В. Г. Горбацкому за постановку задачи и полезные обсуждения.

Специальная астрофизическая
обсерватория АН СССР

ON THE EXTENSION OF THE PULSATING STAR ATMOSPHERE UNDER THE ACTION OF PERIODICAL SHOCK WAVES

O. V. FEDOROVA

The self-consisting problem of the extension of the pulsating star atmosphere under the action of periodical shock waves is solved for different cooling laws behind the shock front. The greater the initial shock velocity and the slower the rate of gas cooling, the larger is the extent of the atmosphere. In the case of absence of the pressure gradient behind the shock front the density scale height exceeds that of static atmosphere by an order in the case of long-period variables and by two orders in the case of RR Lyr variables.

ЛИТЕРАТУРА

1. *C. Whitney*, Ann. Astrophys., 19. 34, 142, 1956.
2. *S. J. Hill*, Ap. J., 178, 793, 1972.
3. *И. А. Климишин*, Астрофизика, 3, 259, 1967.
4. *В. Г. Горбацкий*, Астрон. ж., 39, 198, 1962.
5. *J. D. Fernie*, Ap. J., 130, 611, 1959.
6. *J. D. Fernie, A. A. Brooker*, Ap. J., 133, 1088, 1961.
7. *В. Г. Горбацкий, И. Н. Минин*, Нестационарные звезды, Физматгиз, М., 1963.
8. *В. Г. Горбацкий*, Астрон. ж., 34, 860, 1957.
9. *J. T. McGraw, J. R. P. Angel*, A. J., 79, 485, 1974.
10. *R. E. Nather, P. A. T. Wild*, A. J., 78, 628, 1973.
11. *A. R. Upgren*, A. J., 80, 828, 1975.
12. *D. Bonneau, A. Labeyrie*, Ap. J., 181, L1, 1973.
13. *S. T. Ridgway, D. C. Wells, D. F. Carbon*, A. J., 79, 1079, 1974.
14. *G. Neugebauer, E. Becklin, A. R. Hyland*, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 9, 67, 1971.
15. *R. Foy, A. Heck, M. O. Mennessier*, Astron. Astrophys., 43, 175, 1975.
16. *J. R. D. Lepine, M. H. Paes de Barros, R. H. Gammon*, Astron. Astrophys., 48, 269, 1976.
17. *L. E. Snyder, D. Buhl*, Ap. J., 197, 329, 1975.
18. *В. П. Цесевич*, в сб. «Пульсирующие звезды», Наука, М., 1970, стр. 140.
19. *В. П. Цесевич*, в сб. «Пульсирующие звезды», Наука, М., 1970, стр. 177.