АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 14 МАЙ, 1978 ВЫПУСК 2

УДК 523.854.3

ОБ ОДНОМ ОБЩЕМ ВЫРАЖЕНИИ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА СФЕРИЧЕСКИХ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ

Л. П. ОСИПКОВ

Поступила 18 июля 1977

Исследуется распределение вещества в сферических системах с потенциалом $\Phi = \Phi_0 \alpha [(\alpha - 1) + w(r)]^{-1}$, $w^2(r) = 1 + \varkappa (r/r_0)^2$, $\varkappa = \alpha [2(1 - \lambda) + 2\lambda]/4$, где α, λ — структурные, а Φ_0, r_0 — масштабные параметры. Частными случаями таких систем являются обобщенно изохронные модели, а также сферические модели Кузмина—Маласидзе. Изучено влияние параметров на ход плотности и потенциала. При $\alpha > 1$ радиус системы бесконечен. Для различных α приведены значения для массы, потенциальной энергии и вириальной дисперсии скоростей. Доказано, что при $\alpha > 1$ модели с данным потенциалом и сферическим распределением скоростей устойчивы.

1. *Введение.* К настоящему времени построено довольно много моделей распределения вещества в сферических системах, а также произведено детальное сравнение с наблюдательными данными для сферических скоплений звезд и галактик (см. обзор [1]). К сожалению, большинство таких моделей не обладает необходимой гибкостью и, будучи применимыми к одним конкретным системам оказываются непригодными для описания других объектов, даже того же структурного уровня.

Одно из самых общих выражений для гравитационного потенциала $\Phi(r)$ сферических систем рассматривал Г. Г. Кузмин с соавторами [2—5]. При подходящем выборе единиц оно имеет вид

$$\Phi(r) = \alpha [\beta + w(r)]^{-1}, \tag{1}$$

где

$$w(r) = (l + \varkappa r^2)^{1/2}, \tag{2}$$

причем α, β, l — структурные параметры, а $\varkappa = \varkappa(\alpha)$ — некоторая функ-

ция. Наиболее подробно Г. Г. Кузмин и Ю.-И. К. Велтманн [2, 3] исследуют случай

$$\beta = \alpha - 1, \quad l = 1, \quad \varkappa = a^2. \tag{3}$$

Частным случаем этой модели при $\alpha = 1$ является известная сферическая модель Шустера—Пламмера (см., например, [1, 6]). Другим крайним случаем является сильно концентрированная модель $\alpha = \infty$, названная в [2, 4] «предельной». Из промежуточных случаев наиболее интересна изохронная модель Энона [7], получающаяся при $\alpha = 2$. Модели типа (1)—(3) предлагается в [2, 3] называть «обобщенно изохронными». В [2, 4] проводится сравнение с данными электрофотометрии для нескольких шаровых скоплений, а в заметке [3] описаны некоторые соответствующие фазовые модели.

В обстоятельном исследовании [5] Г. Г. Кузмин и Г. А. Маласидзе изучают весьма общее выражение для потенциала в экваториальной плоскости звездных систем. Для нахождения же пространственного потенциала в [5] использована модель неоднородного сфероида. В качестве предельного случая рассмотрена и сферическая система. Потенциал последней также имеет вид (1), (2), но, в отличие от (3),

$$\beta = \alpha - 1, \quad l = 1, \quad \varkappa = \alpha(\alpha + 2). \tag{4}$$

Частными случаями такой модели являются не только модели Шустера и Энона (как для потенциала (1)—(3)), но и, так называемая, сферическая модель Идлиса [8] — Мазотти [9], получающаяся в пределе $\alpha \to 0$. Потенциал последней совпадает (с точностью до аддитивной константы) с известным потенциалом Паренаго для экваториальной плоскости Галактики (см. [6, 8]).

В данной работе изучается более общее двухпараметрическое выражение для гравитационного потенциала сферической системы. Частными случаями модели являются как потенциал Кузмина—Маласидзе (1), (2), (4), так и обобщенно изохронная модель (1)—(3). Укажем также, что исследуемая модель является предельным случаем еще более общего аналитического выражения, найденного С. А. Кутузовым и автором [10, 11] и охватывающего системы различной сплюснутости.

2. *Описание модели.* Рассмотрим системы с потенциалом

$$\Phi(r) = \Phi_0 a[(\alpha - 1) + w(r)]^{-1}, \tag{5}$$

где

$$w^2(r) = 1 + \varkappa (r/r_0)^2, \tag{6}$$

а

$$\varkappa = \alpha\,[\alpha\,(1-\lambda)+2\lambda]\,4. \qquad (7)$$

Здесь r — расстояние от центра, $\Phi_0 = \Phi(0)$ — потенциал центра, а r_0 — некоторый характерный радиус модели. Параметр α является структурным параметром, определяющим степень концентрации вещества. Что же касается параметра $\varkappa$, то фактически он играет роль масштабного коэффициента. Поэтому уместным было бы положить $\varkappa = 1$. Но для сравнения с упомянутыми выше несферическими моделями оказалось более удобным принять для $\varkappa$ выражение (7) и считать новым независимым параметром λ. Соотношение (7) полезно еще и тем, что позволяет рассматривать в рамках единой модели и интересные предельные случаи $\alpha = 0$ и $\alpha = \infty$.

Сравнение (7) с (3), (4) показывает, что при $\alpha \neq 2$ обобщенно изохронные модели получаются, если

$$\lambda = 3\alpha/(2-\alpha),$$

а модели Кузмина—Маласидзе — когда

$$\lambda = (8+3\alpha)/(2-\alpha).$$

В случае $\alpha = 2$ зависимость от λ выпадает в (7) и оказывается, что $\varkappa = 1$; в модели же (3) получаем, что если $\alpha = 2$, то $\varkappa = 4$, а в модели (4) — $\varkappa = 8$. Все эти модели сводятся одна к другой масштабным преобразованием.

Установим интервал изменения параметра λ. Из (5), (6) следует, что

$$d\Phi/dr = -\Phi_0 r_0^{-1} \alpha\varkappa\,(r/r_0)\,w(r)^{-1}[(\alpha-1)+w(r)]^{-2}. \qquad (8)$$

Естественно потребовать, чтобы потенциал монотонно убывал с расстоянием. Из (8) следует, что наша модель обладает этим свойством тогда и только тогда, когда $\alpha\varkappa > 0$. Подстановка (7) дает, что $\alpha + \lambda(2-\alpha) > 0$. Отсюда окончательно находим:

$$\lambda > -\alpha/(2-\alpha) \quad \text{при} \quad \alpha < 2,$$

$$\lambda < \alpha/(\alpha-2) \quad \text{при} \quad \alpha > 2,$$

$$\lambda \text{ произвольно} \quad \text{при} \quad \alpha = 2.$$

Если ограничиться положительными значениями α и исключить предельные случаи $\alpha = 0$ и $\alpha = \infty$, то для простоты можно считать, что всегда $\lambda \in [0,\ 1]$*.

* При $\alpha = 0$ недопустимо значение $\lambda = 0$, а при $\alpha = \infty$ нельзя полагать $\lambda = 1$ (см. (14), (16)).

3. *Некоторые свойства моделей.* Из (3), (4) получаем (как и в [3, 5]) следующее выражение для плотности:

$$\nu(r) = \nu_0 \alpha \varkappa [2\beta w^2(r) + 3w(r) + \beta][\beta + w(r)]^{-1} w^{-3}(r), \tag{9}$$

где (как и в (3)) $\beta = \alpha - 1$, а

$$\nu_0 = (4\pi G)^{-1} \Phi_0 r_0^{-2}$$

(G — гравитационная константа). Тогда плотность в центре

$$\nu(0) = 3\nu_0 \varkappa/\alpha = (3/4)\,\nu_0 [\alpha(1-\lambda) + 2\lambda]/\alpha. \tag{10}$$

Отсюда следует, что при $\alpha \in (0, 2)$ с увеличением λ плотность в центре возрастает, а при $\alpha \in (2, \infty)$ — уменьшается. Из (10) находим также, что при $\lambda > 0$ центральная плотность уменьшается с увеличением $|\alpha|$.

Приравнивая плотность (9) нулю, находим (как и в [5]) w граничное

$$w_* = (3 + \sqrt{9 - 8\beta^2})/(-4\beta). \tag{11}$$

Решение, имеющее физический смысл, существует при $\alpha \in [\alpha_*, 1)$, где

$$\alpha_* = 1 - 3/\sqrt{8} \simeq -0.0607.$$

α_* является естественной нижней границей для α. Радиус системы

$$r_* = [(w_*^2 - 1)/\varkappa]^{1/2} r_0. \tag{12}$$

Результаты вычисления r_*/r_0 по формулам (11), (12) для различных значений α, λ приведены на рис. 1. Видно, что при малых α, λ зависимость r_* от λ сравнительно сильная. Любопытно, что при увеличении α радиус системы сначала уменьшается. Затем r_* довольно быстро возрастает, причем зависимость этой величины от λ ослабляется.

Следуя Г. М. Идлису [8], при $r > r_*$ следует положить плотность равной нулю, а к потенциалу (5) добавить аддитивную константу $C(\alpha)$. Легко найти, что

$$C(\alpha) = -\Phi_0 \alpha (1 + \beta w^*)(\beta + w_*)^{-2} w_*^{-1} > 0.$$

Если же $\alpha \geqslant 1$, размеры системы бесконечны. Из (9) получаем асимптотический закон убывания плотности:

$$\nu(r) \xrightarrow[r \to \infty]{} \nu_\infty^{(\alpha)}(r) = \begin{cases} 2\nu_0 \alpha \beta \varkappa^{-1} (r/r_0)^{-4}, & \alpha > 1 \\ 3\nu_0 \varkappa^{-3/2} (r/r_0)^{-5}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

С помощью (8) находим, что масса, заключенная внутри сферы радиуса r,

$$M(r) = M_0 \alpha\lambda (r/r_0)^3 [3 + w(r)]^{-2} w^{-1}(r), \tag{13}$$

где

$$M_0 = 4\pi\nu_0 r_0^3 = G^{-1}\Phi_0 r_0.$$

Отсюда следует конечность полной массы системы.

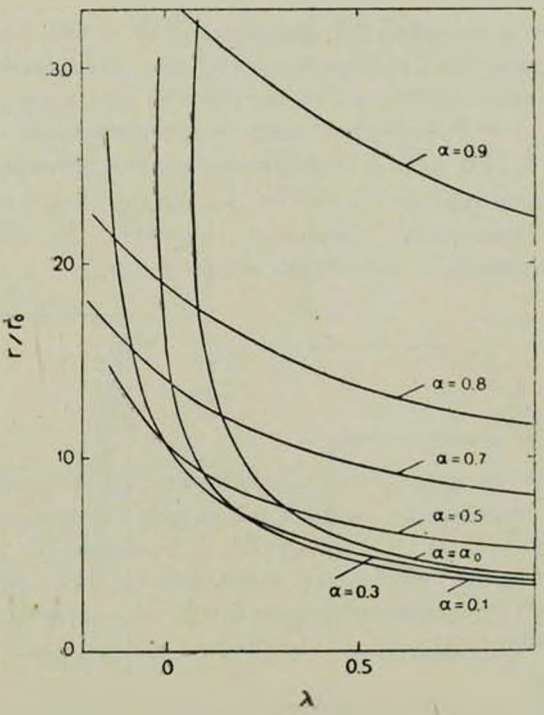

Рис. 1.

В заключение этого раздела выпишем потенциал и плотность для двух крайних случаев. Если $\alpha = 0$, то

$$\Phi(r) = \Phi_0 [1 + (\lambda/2)(r/r_0)^2]^{-1}. \tag{14}$$

В отличие от общего случая (9) здесь роль масштабного коэффициента играет параметр λ (а не обращающийся в нуль параметр $\varkappa$). Плотность для этой модели (см. [8])

$$\nu(r) = \nu_0 \lambda [3 - (\lambda/2)\cdot(r/r_0)^2]\cdot[1 + (\lambda/2)\cdot(r/r_0)^2]^{-3}. \tag{15}$$

Если же $\alpha = \infty$, то потенциал

$$\Phi(r) = \Phi_0[1 + \sqrt{(1-\lambda)/4}\, r/r_0]^{-1}, \qquad (16)$$

а плотность [2]

$$\nu(r) = \nu_0 (1-\lambda)^{1/2} [1 + \sqrt{(1-\lambda)/4}\, r/r_0]^{-3} (r/r_0)^{-1}. \qquad (17)$$

Такая модель характеризуется значительной концентрацией вещества. Плотность в центре, как видно из (17), становится бесконечной.

4. *Результаты расчетов.* По формулам (5) и (9) были произведены расчеты потенциала $\Phi(r)$ и плотности $\nu(r)$ для ряда значений параметров α, λ. Кратко опишем некоторые из полученных при этом результатов.

На случае $\alpha = 0$ не будем здесь останавливаться; см. монографию Г. М. Идлиса [8]. На рис. 2, 3 представлены ход потенциала и плотности для $\alpha = 0.1$. Рассмотрены только $r < r_*$. Видно, что увеличение λ приводит к более быстрому убыванию как $\Phi(r)$, так и $\nu(r)$. Примерно таковы же плотность и потенциал и при $\alpha = \alpha_*$.

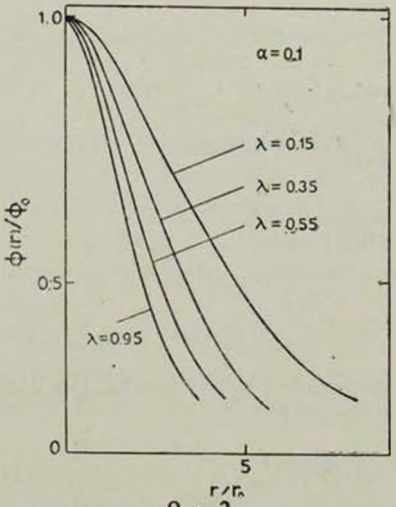

Рис. 2.

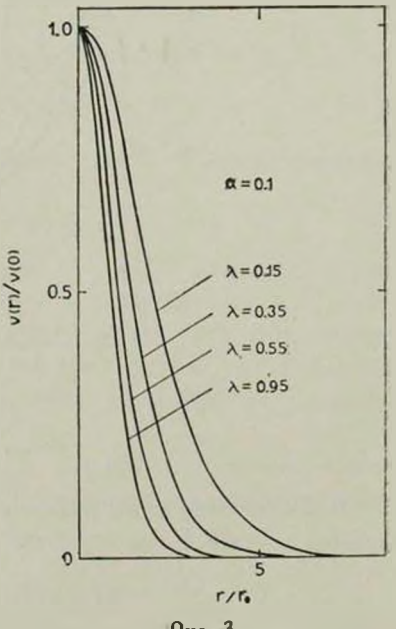

Рис. 3.

Вблизи центра качественных различий в ходе кривых для различных значений параметров нет (исключая большие значения α). Для выявления же влияния параметров в периферийных областях более удобным оказа-

лось рассмотреть $\lg[\nu(r)/\nu(0)]$. На рис. 4 изображены графики этой функции для $\alpha = 0.3$ и $\alpha = 0.7$ для различных λ.

Эти графики показывают, что с увеличением λ ядра систем становятся более выраженными, а внешние части — более протяженными. Заметно, кроме того, что при увеличении α влияние параметра λ на ход кривых уменьшается (если $\alpha < 2$).

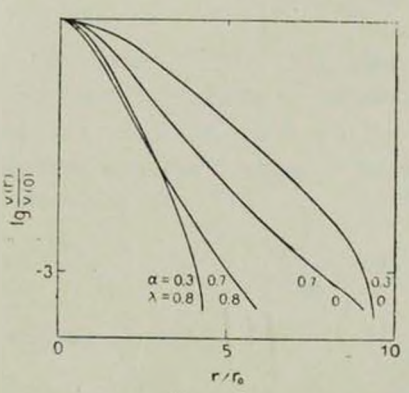

Рис. 4.

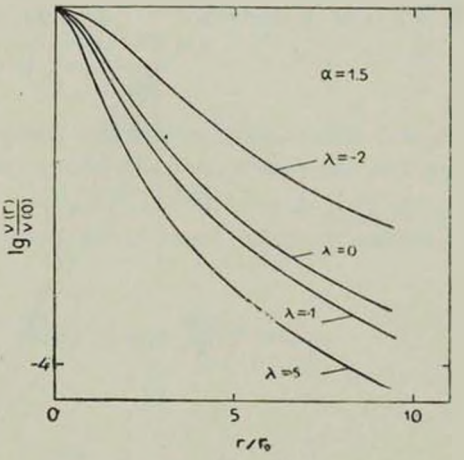

Рис. 5.

Для иллюстрации последнего утверждения приведем рис. 5 (плотность при $\alpha = 1.5$), на котором построены кривые, отвечающие более широкому интервалу $[-2, 5]$ значений λ. Интервалу $[0, 1]$ соответствует на этом рисунке полоска значительно более узкая, чем, например, при $\alpha = 0.3$ (рис. 4). Напомним, что при $\alpha = 2$ все подобные кривые сливаются в одну. Когда же $\alpha > 2$, различным значениям λ вновь отвечает большее разнообразие кривых.

На рис. 6 построены графики плотности, соответствующие различным α при фиксированном значении $\lambda = 0.5$. Можно заметить, что у систем с большими значениями α происходит более резкий переход от ядра к короне с малой, сравнительно медленно меняющейся плотностью.

Если динамическую эволюцию изолированных скоплений описывать моделями данного класса (5)—(7), то кажется правдоподобным, что более старые скопления будут характеризоваться бо́льшими значениями α.

5. *Гросс-параметры модели.* Следуя С. А. Кутузову и Я. Эйнасто [12], под гросс-параметрами модели будем понимать интегральные характеристики системы как целого. Важнейшими из них являются масса и потенциальная энергия системы.

Выражение для полной массы $\mathfrak{M} = M(r_*)$ получаем с помощью (13). В случае $\alpha \in [1, \infty)$ (размеры системы бесконечны) находим, что

$$\mathfrak{M} = M_0 \alpha \varkappa^{-1/2}.$$

Эта же формула справедлива и при $\alpha < 1$, но тогда в $\mathfrak{M}$ будет включаться отрицательная масса, получающаяся экстраполяцией выражения для плотности (9) для $r > r_*$. В таблице приведены значения $\mathfrak{M}/M_0$ для различных α. Для определенности было принято $\lambda = 0.5$.

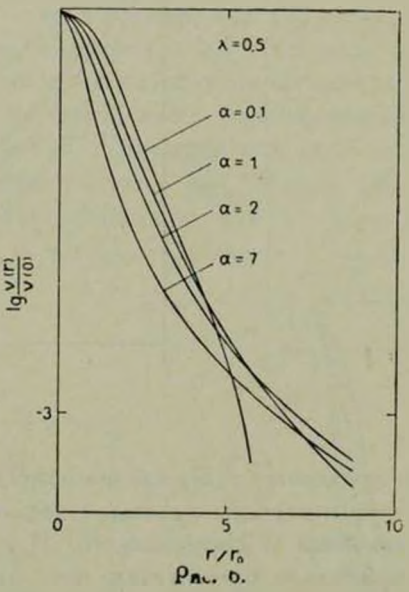

Рис. 6.

Что же касается потенциальной энергии U, то для ее вычисления, как известно, служит следующая формула (см. [6, 13])*:

$$-U = \frac{1}{2}\frac{G\mathfrak{M}^2}{r_*} + G\int_0^{r_*} \frac{M^2(r)}{r^2}\,dr.$$

Обычно ее приводят к виду

$$-U = \frac{1}{2}\int_0^{r_*} \Phi(r)\,dM(r),$$

* При выводе этой формулы предполагается, что $\lim\limits_{r\to 0} M^2(r)/r = 0$ — условие, которое обычно не отмечается и которое не выполнено, например, для моделей с точечным ядром.

молчаливо предполагая, что $\lim_{r \to 0} \Phi(r) M(r) = 0$. Последняя формула удобна в тех случаях, когда $\Phi = \Phi(M(r))$ оказывается сравнительно простой функцией. Для нашей же модели, напротив, проще известной функцией считать $M = M(\Phi)$, а Φ рассматривать как новую независимую переменную вместо r. В таком случае выражение для потенциальной энергии полезно записать в следующей форме:

$$-U = \frac{1}{2} \frac{G\mathfrak{M}^2}{r_*} - \frac{1}{2} \int_0^{\Phi_0} M(r)\, d\Phi(r). \tag{18}$$

Подставим (13) в (18). Полученные интегралы выражаются через элементарные функции, но весьма громоздким образом, к тому же различным для значений $\alpha = 0$, $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha = 1$, $\alpha \in (1, 2)$, $\alpha = 2$, $\alpha \in (2, \infty)$. Поэтому приведем здесь U только для важнейших частных случаев. Если $\alpha = 0$, то

$$U = -U_0 \left\{ \frac{27}{64} \lambda (\lambda/6)^{1/2} + \lambda (2/\lambda)^{3/2} [\pi/6 - 9\sqrt{3}/64] \right\}.$$

В случае Шустера $\alpha = 1$

$$U = -U_0 \frac{3\pi}{32 \lambda^{1/2}},$$

что совпадает с выражением, найденным А. Поведой [14] (см. также [15]). Для изохронной модели

$$U = -U_0 \frac{3\pi - 8}{3\lambda^{1/2}},$$

наконец, в случае $\alpha = \infty$

$$U = -U_0 (1 - \lambda)^{-1/2}/3.$$

Здесь

$$U_0 = G^{-1} \Phi_0^2 r_0.$$

В таблице приведены значения $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_0$ для различных α и $\lambda = 0.5$. Там же дается средняя вириальная дисперсия скоростей

$$\sigma^2 = -U/\mathfrak{M}.$$

Видно, что обе эти характеристики довольно слабо зависят от значений структурного параметра α. Интересно, что увеличение α (т. е. повышение

концентрации вещества) не приводит к возрастанию $|U|$. Для ориентировочных оценок по порядку величины можно положить

$$\mathfrak{M} \simeq 2.5\, M_0, \qquad -U \simeq 0.5\, U_0, \qquad \sigma^2 \simeq 0.2\, \Phi_0.$$

Таблица 1

БЕЗРАЗМЕРНЫЕ МАССА $\mathfrak{M}/M_0$, ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ U/U_0 И СРЕДНЯЯ ДИСПЕРСИЯ СКОРОСТЕЙ σ^2/Φ_0 ИССЛЕДУЕМЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ СТРУКТУРНОГО ПАРАМЕТРА КОНЦЕНТРАЦИИ α (ПАРАМЕТР $\lambda = 0.5$)

α	$\mathfrak{M}/M_0^*$	$-U/U_0$	σ^2/Φ_0
0	1.84 (0)	0.689	0.374
0.1	1.70 (0.62)	0.687	0.403
0.2	1.62 (0.85)	0.646	0.398
0.3	1.57 (1.02)	0.614	0.390
0.5	1.53 (1.26)	0.565	0.370
0.7	1.53 (1.44)	0.527	0.344
1.0	1.63	0.481	0.295
1.5	1.85	0.477	0.258
2.0	2.00	0.475	0.237
4.0	2.31	0.472	0.205
6.0	2.45	0.472	0.193
10.0	2.58	0.472	0.183
15.0	2.65	0.471	0.177
20.0	2.70	0.471	0.175
∞	2.83	0.471	0.166

* В скобках указана масса, соответствующая экстраполяции модели на область отрицательных значений плотности.

6. *Устойчивость моделей со сферическим распределением скоростей.* После того, как распределение вещества в наших моделях с потенциалом (5) детально изучено, можно приступить к нахождению соответствующих фазовых моделей. Методика построения фазовых моделей сферических систем с заданным законом плотности детально разработана, см. обзор [1]. В частности, для любого α можно найти модель со сферическим распределением скоростей .Соответствующая фазовая плотность, вообще говоря, выражается через гипергеометрические функции. Приводить здесь формулы для нее не будем.

Встает вопрос, какие из моделей нашего класса, с различными значениями параметра концентрации α и различными распределениями скоростей могут реализовываться в действительности. Первый шаг к пониманию этого может дать исследование устойчивости наших моделей. Проверим достаточное условие устойчивости, полученное В. А. Антоновым [16] для сферических систем со сферическим распределением скоростей. Это условие имеет вид

$$d^3\nu_i/d\Phi^3 \geqslant 0.$$

Введем новую независимую переменную $u = \alpha - \beta\Phi/\Phi_0$, очевидно, $u \in [1, \alpha]$ (в вырожденном случае $\beta = 0$ получаем модель Шустера, устойчивость которой известна). Введем функцию

$$g(u) = \nu(r(u))/\nu_0.$$

Преобразуя (9), находим:

$$g(u) = \frac{\alpha\varkappa}{\beta^2(\alpha\beta)^{\varkappa}}\left|2(\alpha-2)u^3 + (1 + 16\alpha - 8\alpha^2)u^2 - \right.$$

$$- 4\alpha(1 + 6\alpha - 3\alpha^2)u + 2\alpha^2(1 + 4\alpha - 2\alpha^2) +$$

$$\left. + 2\alpha^3(\alpha-1)^2u^{-1} + 3\alpha^4u^{-2} + \alpha^5u^{-3}\right|.$$

Тогда

$$g'''(u) = \frac{\alpha\varkappa}{\beta^2(\alpha\beta)^2}\left[12(\alpha-2) - 12\alpha^3(\alpha-1)^2u^{-4} + 72\alpha^4u^{-5} - 60\alpha^5u^{-6}\right].$$

Исследуем знак этого выражения. Введем полином

$$P_6(u) = (\alpha-2)u^6 - \alpha^3(\alpha-1)^2u^2 + 6\alpha^4u - 5\alpha^5.$$

Поскольку $u^6 \leqslant u^2\alpha^4$, то

$$P_6(u) \leqslant -\alpha^3(u^2 - 6\alpha u + 5\alpha^2).$$

Исследуя корни мажорирующего полинома, легко заключить, что $P_6(u) \leqslant 0$, т. е. $g''' \leqslant 0$, что означает устойчивость для всех значений структурного параметра концентрации $\alpha \geqslant 1$.

Представим теперь, что бесстолкновительную эволюцию сферических систем можно в некотором приближении описать как изменение структурных и масштабных параметров нашей модели. В каком направлении происходит такая эволюция и не прекращается ли она по достижении некоторого значения α? Этот вопрос в принципе можно исследовать с помощью введенного В. А. Антоновым [17] понятия *квазиэнтропии* (см. также [18]).

Под квазиэнтропией $K[\Psi]$ В. А. Антонов понимает функционал

$$K = \int\int P(\Psi)\, d^3r\, d^3v,$$

где $P(\Psi)$ — произвольная выпуклая функция фазовой плотности $\Psi(r, v)$. Легко показать, что в результате перемешивания (т. е. при бесстолкновительной эволюции) квазиэнтропия может только увеличиться. Поэтому если существует хоть одна такая выпуклая функция $P(\Psi)$ что при данном изменении параметров функционал K убывает, то эволюция в этом направлении оказывается невозможной.

Нетрудно убедиться, что для произвольной сферической системы K достигает экстремального значения, если распределение скоростей становится сферическим, $\Psi = \Psi(E)$ (E — интеграл энергии), и $P''(\Psi) = 1/\Psi'(E)$. Тогда направление эволюции определяется знаком второй вариации K.

Вычисления по этой схеме, однако, оказываются технически слишком сложными и пока не привели автора к определенным заключениям. По их завершении появится возможность говорить о физической выделенности моделей исследованного семейства. В результате мы, быть может, приблизимся к пониманию того, почему в природе осуществляется лишь небольшая часть из возможных стационарных моделей.

Ленинградский государственный
университет

ON ONE GENERAL EXPRESSION FOR THE POTENTIAL OF SPHERICAL STELLAR SYSTEMS

L. P. OSSIPKOV

The matter distribution in spherical systems with the potential

$$\Phi = \Phi_0 \alpha [(\alpha - 1) + w(r)]^{-1}, \quad w^2(r) = 1 + \varkappa (r/r_0)^2,$$
$$\varkappa = \alpha [\alpha (1 - \lambda) + 2\lambda]/4$$

is studied. Here α, λ are structure parameters of the models and Φ_0, r_0 are scale ones. Generalized isochronic models are special cases of such systems as well as Kuzmin—Malasidze's spherical models. The influence of parameters on the density and potential run is investigated. If $\alpha \geqslant 1$, the size of the system is infinite. The values of the mass, the potential energy and the virial velocity dispersion are given for various α. It is proved that the models with such potential and spherical velocity distribution are stable for $\alpha \geqslant 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю.-И. К. Велтманн*, сб. «Итоги науки. Астрономия, 1966. Кинематика и динамика звездных систем», ВИНИТИ, М., 1968, стр. 5.
2. *Г. Г. Кузмин, Ю.-И. К. Велтманн*, Публ. Тартуской обс., 40, 261, 1973.
3. *Г. Г. Кузмин, Ю.-И. К. Велтманн*, сб. «Динамика галактик и звездных скоплений», Наука, Алма-Ата, 1973, стр. 82.
4. *Г. Г. Кузмин* и др., сб. «Динамика галактик и звездных скоплений», Наука, Алма-Ата, 1973, стр. 13.
5. *Г. Г. Кузмин, Г. А. Маласидзе*, Публ. Тартуской обс., 38, 181, 1969.
6. *К. Ф. Огородников*, Динамика звездных систем, Физматгиз, М., 1958.
7. *M. Hénon*, Ann. Astrophys., 22, 126, 1959.
8. *Г. М. Идлис*, Гр. АФИ АН КазССР, 1, 1961.
9. *A. Masotti*, Contr. Oss. Astron. Milano-Merate, No. 83, 1956.
10. *С. А. Кутузов, Л. П. Осипков*, сб. «Всесоюзная конференция по плазменной астрофизике», Наука, М., 1976, стр. 22.
11. *С. А. Кутузов, Л. П. Осипков*, Астрон. цирк., № 921, 5, 1976.
12. *С. А. Кутузов, Я. Эйнасто*, Публ. Тартуской обс., 36, 341, 1967.
13. *С. Чандрасекар*, Введение в учение о строении звезд, ИЛ, М., 1950, гл. III, § 2.
14. *A. Poveda*, Bol. Obs. Tonantzintla, No. 17, 8, 1958.
15. *Е. М. Нежинский, Л. П. Осипков*, Астрон. ж., 46, 680, 1969.
16. *В. А. Антонов*, Вестн. ЛГУ, № 19, 96, 1962.
17. *В. А. Антонов*, Приложение вариационного метода к звездной динамике и некоторым другим проблемам, Диссертация, ЛГУ, 1963.
18. *В. А. Антонов, С. Н. Нуритдинов, Л. П. Осипков*, сб. «Динамика галактик и звездных скоплений», Наука, Алма-Ата, 1973, стр. 55.