

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 14

ФЕВРАЛЬ, 1978

ВЫПУСК 1

К ТЕОРИИ ВРАЩЕНИЯ СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ В ПУЛЬСАРАХ С УЧЕТОМ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭФФЕКТОВ В ВИХРЯХ

В. А. ЧЕРНОБАЙ, В. В. АНДРОНИК

Поступила 10 июня 1977

Показана необходимость учета релятивистских эффектов в квантованных вихрях сверхтекучих ядер пульсаров.

Определена полная энергия одиночного вихря в приближении специальной теории относительности. Асимптотика полной энергии одиночного вихря, при квантовых числах n , много больших отношения внешнего радиуса вихря к комптоновской длине волны нуклона, линейна по n , тогда как в нерелятивистском случае кинетическая энергия вихря пропорциональна n^2 . Это указывает на возможность существования в пульсарах квазистойчивых вихрей с большими квантовыми числами n .

Показано, что при малых квантовых числах, учет релятивистских эффектов в вихрях не приводит к качественным изменениям общей картины вращения сверхтекучей жидкости, по сравнению с нерелятивистской теорией.

Нерелятивистская теория вращающейся сверхтекучей жидкости [1] часто применяется для описания движения нуклонной жидкости в пульсарах. В работе [2] на ее основе вычислен полный магнитный момент пульсара в предположении, что магнитное поле пульсара обусловлено внутренними движениями заряженных частиц.

Однако, если вращение пульсара как целое можно рассматривать в нерелятивистском приближении (скорость поверхности самого быстрого пульсара — в Крабовидной туманности $v \sim 5 \cdot 10^8$ см/сек), то использование нерелятивистского выражения для поля скоростей в одиночном вихре [1]:

$$v_s = \frac{n\hbar}{mr}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

является некорректным. Здесь $\hbar$ — постоянная Планка, m — масса нуклона, r — расстояние от центра вихря.

Действительно, вблизи ствола вихря, т. е. при $r \sim 10^{-13}$ см получаем уже при $n = 1$ скорость $v_s \sim 6 \cdot 10^9$ см/сек. Поскольку в пульсарах следует ожидать сильные отклонения от термодинамического равновесия (больше n), формула (1) для них неприменима.

Представляется также важным учет релятивистских эффектов в вихрях при получении зависимости углового момента от полной энергии для сверхплотных тел, вводимых в космогонической концепции академика В. А. Амбарцумяна, если только в этих телах реализуется сверхтекучес состояние материи.

В настоящем сообщении мы рассматриваем вращение сверхтекучей жидкости, заполняющей цилиндрический сосуд, с учетом релятивистских эффектов в вихрях. Как и в работе [1], мы предполагаем справедливость двухжидкостной гидродинамики, т. е. рассматриваем движение сверхтекучей компоненты независимо от движения нормальной.

1. *Задача об одиночном вихре.* Наложив, следуя [1], условия квантования Бора—Зоммерфельда на импульс, получим для поля импульсов сверхтекучей компоненты единичного вихря с осью, параллельной оси вращения цилиндра,

$$p_s = \frac{n\hbar}{r}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Используя релятивистское выражение для импульса через скорость, получим поле скоростей:

$$v_s = \frac{n\hbar}{m \sqrt{r^2 + n^2 \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2}}, \quad (3)$$

где c — скорость света.

Аналогично [1] находим число вихрей на единицу площади N :

$$N = |\text{rot } p_s| / 2\pi n\hbar \quad (4)$$

и полную энергию вихря на единицу длины:

$$E_s = \pi c^2 \rho_s \left[b \sqrt{b^2 + n^2 \lambda_N^2} - a \sqrt{a^2 + n^2 \lambda_N^2} + n^2 \lambda_N^2 \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + n^2 \lambda_N^2}}{a + \sqrt{a^2 + n^2 \lambda_N^2}} \right] \quad (5)$$

Здесь ρ_s — плотность сверхтекучей компоненты, λ_N — комптоновская длина волны нуклона, b — некоторый условный внешний радиус вихря, a — его внутренний радиус. Исследование формулы (5) показывает, что при $b \gg n\lambda_N$ кинетическая энергия вихря пропорциональна n^2 . Это пол-

ностью соответствует нерелятивистскому случаю. Однако при больших n ($n \gg b/\lambda_N$) кинетическая энергия вихря зависит от n линейно. Таким образом, учет эффектов специальной теории относительности в вихрях приводит нас к выводу о возможности существования в пульсарах вихрей, которые обладают большим моментом количества движения. Явления, приводящие к образованию внешнего радиуса вихря, будут рассмотрены в отдельной работе.

2. *Вращение сверхтекучей жидкости в целом.* Следуя [1], воспользуемся вариационным методом. Будем предполагать также, что n достаточно мало, т. е. $n \ll b/\lambda_N$. Стационарному состоянию соответствует минимум величины $E_s - M\omega_0$, где E_s — энергия сверхтекучей компоненты, M — ее момент количества движения и ω_0 — угловая скорость вращения. В соответствии со сказанным во введении, второй член в этом выражении написан в предположении, что жидкость как целое вращается с нерелятивистской скоростью.

С учетом (4) и (5), а также очевидных выражений для момента количества движения имеем:

$$E_s - M\omega_0 = n_s \int \sqrt{m^2 c^4 + p_s^2 c^2} 2\pi r dr + \frac{\pi c^2 n_s m_N^2 n^2}{2\pi n \hbar} \times \\ \times \int |\operatorname{rot} p_s| \ln \left[\beta \frac{(2\pi n \hbar)^{1/2}}{(\pi |\operatorname{rot} p_s|)^{1/2} \lambda_N} \right] 2\pi r dr - n_s \omega_0 \int (p_s r + n \hbar) 2\pi r dr; \quad (6)$$

$$\beta = 2 \{ \exp [(b^2 - a \sqrt{a^2 + n^2 \lambda_N^2}) / n^2 \lambda_N^2] \} / (a + \sqrt{a^2 + n^2 \lambda_N^2}).$$

Варьируя (6) по δp_s и предполагая на границах $\delta p_s = 0$ (что, как легко видеть, приводит к $\delta v_s = 0$), получим уравнение:

$$(v_s - \omega_0 r) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (p_s r) + \frac{c^2 \lambda_N^2 m n}{4 \hbar} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (p_s r) \right) = 0 \quad (7)$$

Очевидно, уравнение (7) обладает двумя решениями. Одно из них соответствует ирротационному движению с полем импульсов

$$p_s = \frac{m \omega_0 R^2}{r}. \quad (8)$$

Здесь размерный коэффициент определен из граничных условий. Второе решение, с полем импульсов

$$p_s = m \omega_0 r \quad (9)$$

соответствует твердотельному вращению. Поскольку сумма решений (8) и

(9) не есть решение уравнения (7), учет релятивистских эффектов в вихрях сохраняет разрыв фазы на границе двух областей.

Найдем радиус R_i ирротационной области. Предположим, что она находится вблизи стен цилиндра. После интегрирования (6) и минимизации по R_i получаем:

$$\left(\frac{R}{R_i} - \frac{R_i}{R}\right)^2 = \frac{2mc^2 n_N^2}{\hbar \omega_0} \ln(\beta b).$$

При малых n правая часть мала. Тогда

$$\Delta R = R - R_i \simeq \frac{c}{V_T} \frac{\lambda_N}{4} \sqrt{\ln \frac{\beta b}{e}}. \quad (10)$$

Здесь V_T — скорость волн Ткаченко [3]. Подставив полученное выражение для R_i в (6), получим свободную энергию сверхтекучей компоненты при малых n :

$$E_s - M\omega_0 = -\frac{1}{4} \pi n_s m \omega_0^2 R^4 + \frac{\pi n_s m^2 c^2 \lambda_N^2 \omega_0 R^2}{h} n \ln \frac{\beta b}{e}. \quad (11)$$

Из (11) видно, что при малых n минимум свободной энергии отвечает значению $n = 1$. Из сравнения формулы (11) с результатами нерелятивистского расчета следует, что учет релятивистских эффектов в вихрях, при $n \ll b/\lambda_N$ качественно не меняет общую картину движения сверхтекучей жидкости. Такого рода отличия должны проявиться при больших n . Однако, из-за математических трудностей, мы не смогли довести до конца расчеты для случая $n \gg b/\lambda_N$.

В заключение авторы выражают благодарность участникам семинара под руководством академика АН МССР В. А. Москаленко за обсуждение работы и ценные замечания.

Кишиневский государственный
университет

ON THE THEORY OF SUPERFLUID LIQUID ROTATION IN PULSARS TAKING INTO ACCOUNT THE RELATIVISTIC EFFECTS IN VORTECES

V. A. CHERNOBYE, V. V. ANDRONIC

The paper proves the necessity of taking into account the relativistic effects in quantized vortices of a pulsar's superfluid nucleus. The full energy of a single vortex for special relativity theory approximation is determined. The single vortex's full energy asymptotics for quantized

numbers n , which are much greater than the ratio of vortex's exterior radius to Compton's length of the nucleon, is linear with respect to n while in the nonrelativistic case the kinetic energy is proportional to n^2 . This suggests the possibility of existence of quasistable vortices with great quantized numbers n .

It is revealed that for small quantized numbers the taking into account the relativistic effects in the vortices do not lead to qualitative changes of the general condition of superfluid liquid rotation as compared to non-relativistic theory.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Халатников, Теория сверхтекучести, Наука, М., 1971, стр. 104.
2. Д. М. Седракан, К. М. Шахабасян, Астрофизика, 8, 557, 1972.
3. В. К. Ткаченко, ЖЭТФ, 50, 1573, 1966.