АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 14 ФЕВРАЛЬ, 1978 ВЫПУСК 1

ПЕРЕНОС РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ИЗОТРОПНО РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

С. И. ГРАЧЕВ

Поступила 31 октября 1977

Рассматривается задача о переносе излучения в резонансной линии в бесконечной однородной среде, изотропно расширяющейся с постоянным градиентом скорости $\gamma \ll 1$. Предполагается, что рассеяние происходит с полным перераспределением по частоте в сопутствующей системе координат при доплеровском и степенном профилях коэффициента поглощения. Получены асимптотики резольвентной функции основного интегрального уравнения. Найдены также асимптотические решения этого уравнения для некоторых частных распределений первичных источников.

Введение. Задача о диффузии излучения в спектральной линии в среде с дифференциальным движением вещества возникает при интерпретации наблюдений астрофизических объектов разного типа. К числу таких объектов относятся газовые туманности, оболочки новых звезд, звезд типов Be и WR, а также активные образования на Солнце. В последнее время с указанной задачей стали встречаться при изучении квазаров и ядер активных галактик.

Рассматривая диффузию излучения в линии, обычно считают, что рассеяние происходит изотропно и с полным перераспределением по частоте в сопутствующей системе координат. Если фотоны диффундируют в среде, движущейся с градиентом скорости, то большое влияние на поле излучения оказывает эффект Доплера.

Впервые основные интегральные уравнения переноса излучения в движущихся средах — одномерной и трехмерной плоскопараллельной были получены в работах В. В. Соболева [1, 2]. При этом профиль коэффициента поглощения сначала считался прямоугольным, а затем произвольным. В этих работах был также предложен простой приближенный (вероятностный) метод решения найденных уравнений.

В дальнейшем задача о переносе излучения в расширяющихся средах разных геометрий решалась приближенными и численными методами в ряде работ ([3—6] и др.). Хороший обзор исследований, выполненных до 1970 г., содержится в статье Райбики [7]. В работах В. В. Витязева [8] и автора [9] изучались ядерные функции уравнения переноса для одномерной ([8]) и трехмерной изотропно расширяющейся ([9]) сред.

В настоящей работе аналитически рассматривается перенос излучения в линии в бесконечной однородной среде, изотропно расширяющейся с постоянным градиентом скорости γ. При этом считается, что альбедо однократного рассеяния λ равно 1. Вначале изучается асимптотическое поведение резольвентной функции, через которую выражается решение основного интегрального уравнения при различных источниках излучения. Затем найдены асимптотические решения некоторых частных задач.

Основные уравнения. Распределение первичных источников в бесконечной однородной изотропно расширяющейся среде может обладать двумя типами симметрии: плоской и сферической. В случае плоской симметрии интегральное уравнение для функции источников $S(\tau)$ имеет вид

$$S(\tau) = S_0(\tau) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau - t, \gamma)\, S(t)\, dt, \tag{1}$$

где $S_0(\tau)$ — функция первичных источников и τ — оптическое расстояние от некоторой плоскости симметрии, измеренное в центре линии для неподвижной среды.

В случае сферической симметрии для определения функции источников имеем уравнение

$$\tau S(\tau) = \tau S_0(\tau) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau - t, \gamma)\, t S(t)\, dt, \tag{2}$$

где τ — оптическое расстояние от центра симметрии, причем функции $S_0(\tau)$ и $S(\tau)$ в (2) продолжены на отрицательные τ четным образом.

Ядро интегральных уравнений (1) и (2) может быть представлено в виде

$$K(\tau, \gamma) = \int_0^1 K_1(\tau/\mu, \gamma)\, d\mu/\mu, \tag{3}$$

где $K_1(\tau, \gamma)$ — ядерная функция для одномерной среды, найденная в [2] и определенная формулой

$$K_1(\tau, \gamma) = A \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)\,\alpha(x + \gamma|\tau|)\exp\left[-\frac{1}{\gamma}\int\limits_{x}^{x+\gamma|\tau|} \alpha(z)\,dz\right]dx. \qquad (4)$$

Здесь $\alpha(x)$ — профиль коэффициента поглощения ($\alpha(0) = 1$), $x = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu$ — безразмерная частота, $A = 1 \Big/ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)\,dx$ – нормировочная постоянная. Градиент скорости равен $\gamma = dv/d\tau$, где v — скорость относительного движения двух точек среды, разделенных оптическим расстоянием τ, причем скорость v измерена в средних скоростях теплового движения атомов. Уравнения (1) и (2) с ядром (3) были получены в работе автора [9].

Ядерная функция $K(\tau, \gamma)$ имеет следующую нормировку:

$$\int\limits_{0}^{\infty} K(\tau, \gamma)\,d\tau = 1 - L(\infty, \gamma), \qquad (5)$$

где $L(\infty, \gamma)$ — вероятность выхода фотона из бесконечной среды после однократного рассеяния. Подставляя (3) в (5), получим, что $L(\infty, \gamma)$ совпадает с аналогичной величиной для одномерной среды $L_1(\infty, \gamma)$, найденой в [2]:

$$L(\infty, \gamma) = L_1(\infty, \gamma) = A\gamma\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{A\gamma}\right)\right]. \qquad (6)$$

Обозначим резольвенту уравнений (1) и (2) через $\Gamma(\tau, t)$. Легко показать, что

$$\Gamma(\tau, t) = \Phi(\tau - t, \gamma) = \Phi(t - \tau, \gamma), \qquad (7)$$

где резольвентная функция $\Phi(\tau, \gamma)$ является решением уравнения

$$\Phi(\tau, \gamma) = \frac{1}{2}K(\tau, \gamma) + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\tau - t, \gamma)\,\Phi(t, \gamma)\,dt. \qquad (8)$$

Таким образом, решение уравнения (1) записывается через резольвентную функцию в виде

$$S(\tau) = S_0(\tau) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\tau - t, \gamma)\,S_0(t)\,dt, \qquad (9)$$

а для решения уравнения (2) имеем следующее представление:

$$\tau S(\tau) = \tau S_0(\tau) + \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\tau - t, \gamma)\, t S_0(t)\, dt. \tag{10}$$

Подчеркнем, что в (10) положено $S_0(-\tau) = S_0(\tau)$.

Ввиду важности функции $\Phi(\tau, \gamma)$ ниже мы изучим ее асимптотическое поведение для двух профилей коэффициента поглощения: доплеровского ($\alpha(x) = e^{-x^2}$) и убывающего в крыле линии по степенному закону ($\alpha(x) \sim W|x|^{-\varkappa}$). Отметим, что степенной закон поведения в крыльях при $\varkappa = 2$ имеют лоренцовский и фойгтовский профили коэффициента поглощения, причем для первого $W = 1$, а для второго $W = a/(\pi A)$, где a — отношение радиационной ширины линии к доплеровской ширине.

Функция $\Phi(\tau, \gamma)$. Уравнение (8) принадлежит к типу уравнений, стандартно решаемых применением двустороннего преобразования Лапласа по τ. Делая это, найдем, что

$$\overline{\Phi}(p, \gamma) = \frac{1}{1 - \overline{K}(p, \gamma)/2} - 1, \tag{11}$$

где $\overline{\Phi}(p, \gamma)$ и $\overline{K}(p, \gamma)$ — двусторонние преобразования Лапласа резольвентной и ядерной функций. Согласно (3)

$$\overline{K}(p, \gamma) = \int_0^1 \overline{\overline{K}}_1(p\mu, \gamma)\, d\mu. \tag{12}$$

Чтобы получить асимптотику $\Phi(\tau, \gamma)$ при $\tau \to \infty$ нужно, как известно, найти асимптотику $\overline{\Phi}(p, \gamma)$ при $p \to 0$ и затем обратить ее, зная особенности на комплексной плоскости. Сделаем это для двух профилей, указанных выше.

а) *Доплеровский профиль.* Согласно [9] для доплеровского профиля асимптотика $K(\tau, \gamma)$ при $\tau \to \infty$ пропорциональна $\exp[-(\gamma\tau)^2/2]$. Поэтому функция $\overline{K}(p, \gamma)$ является целой и, следовательно, функция $\overline{\Phi}(p, \gamma)$ может иметь в качестве особенностей на конечном расстоянии лишь полюсы, определяемые из уравнения

$$\frac{1}{2}\overline{K}(p, \gamma) = 1. \tag{13}$$

Это уравнение имеет по крайней мере один вещественный корень в левой полуплоскости, так как

$$\overline{K}(0, \gamma)/2 = 1 - L(\infty, \gamma) < 1, \tag{14}$$

а при $p \to -\infty$ функция $\overline{K}(p, \gamma) \to +\infty$.

Далее мы будем рассматривать наиболее важный для приложений случай, когда $\gamma \ll 1$. Ранее было получено [10], что при $\gamma \to 0$ и $|\mathrm{Re}\, q| < 1$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{2}\overline{K}_1(p, \gamma) \sim 1 - L_1(\infty, \gamma) + L_1(\infty, \gamma)\, q\, [\psi(1+q) - \psi(1-q)], \tag{15}$$

где

$$q = p\Big/\left(2\gamma \sqrt{\ln\frac{1}{\gamma}}\right) \tag{16}$$

и $\psi(x) = d\ln\Gamma(x)/dx$, $\Gamma(x)$ — гамма функция.

Пользуясь свойствами функции $\psi(x)$, перепишем (15) в виде

$$\frac{1}{2}\overline{K}_1(p, \gamma) \sim 1 - L_1(\infty, \gamma)\, \pi q \operatorname{ctg}(\pi q). \tag{17}$$

Подстановка (17) в (12) дает

$$\frac{1}{2}\overline{K}(p, \gamma) \sim 1 - L(\infty, \gamma)\, \pi q \int_0^1 \mu \operatorname{ctg}(\pi q \mu)\, d\mu. \tag{18}$$

Подставляя далее (18) в уравнение (13), найдем, что оно имеет в полосе $0 < \mathrm{Re}\, q < 1$ единственный корень, равный с точностью до третьего знака $q = k = 0.791$. В левой полуплоскости, очевидно, есть симметрично с ним расположенный отрицательный корень, который и определяет асимптотику $\Phi(\tau, \gamma)$ при $\gamma \to 0$ и $\tau \gg \tau_d$. Она имеет вид

$$\Phi(\tau, \gamma) \sim c \sqrt{\ln\frac{1}{\gamma}} \exp(-\tau/\tau_d), \tag{19}$$

где

$$c = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{tg}(\pi k) = 0.868. \tag{20}$$

Введенная здесь величина τ_d носит название диффузионной длины и определяется формулой: $\tau_d = 1/p$, где p — наименьший вещественный неотрицательный корень характеристического уравнения (13). Согласно сказанному выше

$$\tau_d \underset{\gamma \to 0}{\sim} 1 \Big/ \left(2k\gamma \sqrt{\ln \frac{1}{\gamma}}\right). \tag{21}$$

Отметим, что асимптотика резольвентной функции для одномерной среды также имеет, как показано в [10], вид (19), где $c = 4\pi^{-3/2}$, а τ_d получается из (21) при $k = 1/2$.

Поведение $\Phi(\tau, \gamma)$ в области $1 \ll \tau \ll \tau_d$ определяется из следующих соображений. Согласно [9] в указанной области $K(\tau, \gamma) \sim K(\tau, 0)$, а при $\tau \gg \tau_d$ ядерная функция очень быстро убывает. Поэтому при $p\tau_d \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\overline{K}(p, \gamma) \sim \int_0^{\tau_d} e^{-p\tau} K(\tau, 0)\, d\tau, \tag{22}$$

где $\overline{K}(p, \gamma)$ — преобразование Лапласа ядерной функции. Используя (22), можно показать, что при $1 \ll \tau \ll \tau_d$

$$\Phi(\tau, \gamma) \sim \frac{8}{3} \pi^{-3/2} [(\ln \tau_d)^{3/2} - (\ln \tau)^{3/2}]. \tag{23}$$

Итак, есть две области различного асимптотического поведения резольвентной функции: $1 \ll \tau \ll \tau_d$ и $\tau \gg \tau_d$. В первой из них справедлива формула (23), а во второй — (19).

б) *Степенной профиль.* Тем же способом, который использовался при выводе соотношения (15) для доплеровского профиля (см. [10]), можно показать, что для степенного профиля при $\gamma \ll 1$

$$1 - \frac{1}{2} \overline{K}(p, \gamma) \sim L(\infty, \gamma) \{1 - q^2 [I(q) + I(-q)]\}, \tag{24}$$

где $q = p\tau_c$,

$$\tau_c = \left(\frac{W}{\varkappa - 1}\right)^{1/(\varkappa-1)} \gamma^{-\varkappa/(\varkappa-1)}. \tag{25}$$

Функция $I(q)$ имеет вид

$$I(q) = \int_0^1 \mu^2 I_1(q\mu)\, d\mu, \tag{26}$$

где

$$I_1(q) = \int_0^\infty e^{-qz}dz \int_0^\infty \{\exp[(z+t)^{1-\varkappa} - t^{1-\varkappa}] - 1\}\, dt. \tag{27}$$

Характерная длина τ_c, возникающая при выводе (24), отличается от длины термализации τ_t, найденной в [9], лишь множителем порядка единицы.

Из (24) и (25) видно, что резольвентная функция должна иметь две области различного поведения: $1 \ll \tau \ll \tau_c$ и $\tau \gg \tau_c$. Асимптотика $\Phi(\tau, \gamma)$ в первой области определяется, очевидно, асимптотикой $I(q)$ при $q \to \infty$. Последняя получается из (26) и (27) и имеет вид

$$I(q) \sim \frac{-\pi(\varkappa-1)^{1/\varkappa}}{(2\varkappa-1)\sin(\pi/\varkappa)}\, q^{-(1+\varkappa)/\varkappa}. \tag{28}$$

Подставляя (28) в (24), затем (24) в (11) и производя обращение, найдем, что при $1 \ll \tau \ll \tau_c$ асимптотика $\Phi(\tau, \gamma)$ совпадает с асимптотикой $\Phi(\tau, 0)$, приведенной в книге В. В. Иванова [11]. Следовательно,

$$\Phi(\tau, \gamma) \sim \Phi(\tau, 0) \tag{29}$$

при $\tau \ll \tau_c$.

Что касается поведения $\Phi(\tau, \gamma)$ при $\tau \gg \tau_c$, то оно определяется асимптотикой $I(q)$ при $q \to 0$. После довольно громоздких преобразований из (26) и (27) можно найти для нее следующее представление при нецелом $\varkappa$

$$I(q) \sim \sum_{n=0}^{E(\varkappa-3)} \frac{c_n(\varkappa)}{n+3} q^n + \frac{\pi(\varkappa-1)\, q^{\varkappa-3}}{\varkappa\Gamma(\varkappa)\sin(\pi\varkappa)} - \frac{1}{2q}\theta(\varkappa-2)\,\Gamma\left(\frac{\varkappa-2}{\varkappa-1}\right), \tag{30}$$

где $E(x)$ — целая часть x, $\theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$,

$$c_n(\varkappa) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}\,\Gamma\left(\frac{\varkappa-3-n}{\varkappa-1}\right) \int_0^1 (1-t)^{n+1}\,(t^{1-\varkappa}-1)^{\frac{n+3-\varkappa}{\varkappa-1}}\, dt. \tag{31}$$

Используя (30), получим асимптотическую формулу

$$\Phi(\tau, \gamma) \underset{\tau \gg \tau_c}{\sim} \frac{W}{\varkappa L(\infty, \gamma)}\,(\gamma\tau)^{-\varkappa} \underset{\gamma \ll 1}{\sim} \frac{W}{A\varkappa}\,\gamma^{-1-\varkappa}\,\tau^{-\varkappa}, \tag{32}$$

которая справедлива и при целом $\varkappa$.

С учетом асимптотики ядерной функции, найденной в [9], (32) переписывается в виде

$$\Phi(\tau, \gamma) \sim \frac{1}{2} \frac{K(\tau, \gamma)}{[L(\infty, \gamma)]^2}. \tag{33}$$

Отметим сходство формулы (33) с асимптотикой резольвентной функции при $\gamma = 0$, $\lambda \neq 1$, приведенной в [11]. Последняя отличается от (33) лишь заменой $L(\infty, \gamma)$ на $1 - \lambda$, что отражает характер выхода фотона из процесса рассеяний: в одном случае этот выход обусловлен градиентом скорости, а в другом — гибелью при истинном поглощении.

Заметим, что асимптотические формулы для фойгтовского профиля получаются из формул для степенного профиля при $\varkappa = 2$, $W = a/(\pi A)$. Они применимы (так же, как и асимптотики ядерной функции (см. [9])) при $\gamma \ll a$.

Некоторые задачи. Рассмотрим теперь несколько частных распределений первичных источников.

1. *Равномерное распределение.* Положим $S_0(\tau) = S_0 = \text{const}$. Из соображений симметрии ясно, что тогда и $S(\tau) = \text{const}$. Вынося $S(t)$ из под знака интеграла в уравнении (1) или (2), найдем, что

$$S(\tau) = S_0/L(\infty, \gamma). \tag{34}$$

Это решение было получено впервые В. В. Соболевым [1] и, как показано в [2], не зависит от профиля коэффициента поглощения.

2. *Источник излучения в плоскости $\tau = 0$.* Пусть в плоскости $\tau = 0$ расположен изотропный источник излучения мощностью $A\alpha(x)dx$ в интервале частот от x до $x + dx$. Легко показать, что функция первичных источников, которая получается при учете однократного рассеяния фотонов, испускаемых источников, равна $S_0(\tau) = K(\tau, \gamma)/2$. Таким образом, функция источников в рассматриваемой задаче совпадает с резольвентной функцией $\Phi(\tau, \gamma)$, асимптотики которой были найдены выше.

3. *Экспоненциальное распределение с плоской симметрией.* Положим $S_0(\tau) = \exp(-\tau/m)$, где τ — оптическое расстояние от плоскости $\tau = 0$, причем τ принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$. Согласно асимптотикам $\Phi(\tau, \gamma)$ решение (9) при $S_0(\tau) = \exp(-\tau/m)$, имеющее физический смысл, есть лишь для доплеровского профиля, если $m > \tau_d$. Тогда из (9) и (11) имеем

$$S(\tau) = \frac{e^{-\tau/m}}{1 - \overline{K}(1/m,\ \gamma)/2}, \tag{35}$$

причем асимптотика $\overline{K}(1/m, \gamma)$ при $\gamma \ll 1$ дается формулой (18).

4. *Точечный источник излучения.* Пусть в точке $\tau = 0$ расположен изотропный источник излучения мощностью $A\alpha(x)\,dx$ в интервале частот от x до $x + dx$. Обозначим функцию источников через $S_p(\tau, \gamma)$, где τ — оптическое расстояние от источника. Функция первичных источников получается в результате учета однократного рассеяния фотонов, приходящих от источника. Она имеет вид

$$S_0(\tau) = K_1(\tau,\ \gamma)/(4\pi\tau^2). \tag{36}$$

Согласно (3) формула (36) переписывается следующим образом:

$$S_0(\tau) = -\frac{1}{4\pi\tau}\frac{dK(\tau,\ \gamma)}{d\tau}. \tag{37}$$

Сравнивая уравнение (2) при $S_0(\tau)$ в виде (37) с уравнением (8), находим, что

$$S_p(\tau,\ \gamma) = -\frac{1}{2\pi\tau}\frac{d\Phi(\tau,\ \gamma)}{d\tau}. \tag{38}$$

Соотношение (38) для $\gamma = 0$ приведено в [11]. В случае монохроматического рассеяния и $\gamma = 0$ оно следует из формул, полученных в статье В. А. Амбарцумяна [12].

Изучим поведение $S_p(\tau, \gamma)$, используя (38) и найденные выше асимптотики $\Phi(\tau, \gamma)$.

а) *Доплеровский профиль.* Подставляя (23) в (38), получим при $1 \ll \tau \ll \tau_d$

$$S_p(\tau,\ \gamma) \sim 2\pi^{-5/2}\frac{\sqrt{\ln \tau}}{\tau^2}, \tag{39}$$

что совпадает с асимптотикой $S_p(\tau, 0)$ (см. [11]). Для $\tau \gg \tau_d$ подстановка (19) в (38) дает

$$S_p(\tau,\ \gamma) \sim \frac{ck}{\pi\tau}\gamma \ln\frac{1}{\gamma}\exp(-\tau/\tau_d). \tag{40}$$

Легко убедиться, что при $\tau = \tau_d$ (39) и (40) дают одинаковый по порядку величины результат.

б) *Степенной профиль.* Для степенного профиля $\Phi(\tau, \gamma) \sim \Phi(\tau, 0)$ при $\tau \ll \tau_c$, поэтому здесь $S_p(\tau, \gamma) \sim S_p(\tau, 0)$. Асимптотика $S_p(\tau, 0)$

приведена в [11]. Для области $\tau \gg \tau_c$ асимптотика $S_p(\tau, \gamma)$ получается из (32) и (38). В итоге имеем

$$S_p(\tau, \gamma) \sim \begin{cases} W^{-1/x} \dfrac{2x-1}{4\pi^2 Ax} \dfrac{\operatorname{ctg}(\pi/(2x))}{\Gamma(1-1/x)} \tau^{-1/x-2}, & 1 \ll \tau \ll \tau_c \\ \dfrac{W}{2\pi Ax} \gamma^{-1-x} \tau^{-x-2}, & \tau \gg \tau_c. \end{cases} \tag{41}$$

Из (39)—(41) видно, что в близкой к источнику зоне ($\tau < \tau_d$ или τ_c) градиент скорости мало влияет на функцию источников, а в далекой зоне ($\tau > \tau_d$ или τ_c) приводит к очень быстрому по сравнению с неподвижной средой ее убыванию.

Заключение. Помимо рассмотренных выше задач можно сравнительно легко найти асимптотические решения в задаче со сферически симметричным экспоненциальным распределением первичных источников, а также в случае, когда первичные источники распределены равномерно внутри сферы конечного радиуса. Однако мы не приводим эти решения ввиду их громоздкости. Заметим, что некоторые из рассмотренных задач могут иметь непосредственные астрофизические приложения. Например, задача о точечном источнике может возникать при определении функции источников в задаче о свечении планетарной туманности.

Результаты настоящей работы, а также большинства других работ, получены в предположении о полном перераспределении по частоте при рассеянии в сопутствующей системе координат. В действительности это предположение не выполняется строго. Однако расчеты, проведенные недавно для движущейся среды [13, 14], показали, что результаты, найденные при истинном и полном перераспределении, мало отличаются друг от друга, причем эти отличия меньше, чем в случае неподвижной среды.

Ленинградский государственный
университет

TRANSFER OF RESONANCE RADIATION IN INFINITE ISOTROPICALLY EXPANDING MEDIUM

S. I. GRACHOV

The prcblem of radiative transfer in resonance line is considered for an infinite homogeneous medium which expands isotropically with constant velocity gradient $\gamma \ll 1$. Complete frequency redistribution over Doppler and power profiles is assumed in a local frame of reference. Asymptotic forms of the resolvent function of the integral transfer equation are obtained. Asymptotic solutions of this equation are also found for several particular distributions of primary sources.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 21, 143, 1944.
2. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 34, 694, 1957.
3. *J. I. Castor*, M. N., 149, 111, 1970.
4. *В. П. Гринин*, Астрофизика, 10, 239, 1974.
5. *D. Mihalas, P. B. Kunasz, D. G. Hummer*, Ap. J., 202, 465, 1975.
6. *В. П. Гринин*, Изв. Крымской обс., 54, 176, 1976.
7. *G. B. Rybicki*, in „Spectrum Formation in Stars with Steady-State Extended Atmospheres", N. B. S. Spec. Publ., 332, 87, 1970.
8. *В. В. Витязев*, Вестн. ЛГУ, № 19, 124, 1973.
9. *С. И. Грачев*, Вестн. ЛГУ, № 1, 128, 1978.
10. *С. И. Грачев*, Астрофизика, 13, 185, 1977.
11. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
12. *В. А. Амбарцумян*, Научные труды, т. I, Изд-во АН Арм. ССР, Ереван, 1960, стр. 269.
13. *D. Mihalas, R. A. Shine, P. B. Kunasz, D. G. Hummer*, Ap J., 205, 492, 1976.
14. *W.-R. Hamann, R.-P. Kudritzki*, Astron. Astrophys., 54, 525, 1977.