АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 14 ФЕВРАЛЬ, 1978 ВЫПУСК 1

О ПОВЕДЕНИИ ДИСПЕРСИИ РАДИАЛЬНЫХ СКОРОСТЕЙ НА ПЕРИФЕРИИ СФЕРИЧЕСКИХ СИСТЕМ ГРАВИТИРУЮЩИХ ТЕЛ

Л. П. ОСИПКОВ

Поступила 25 мая 1976

Найдено разложение дисперсии радиальных скоростей на больших расстояниях от центра сферической гравитирующей системы конечной массы в предположении справедливости формулы Эддингтона для отношения дисперсий. Оказалось, что вид разложения радикально меняется в зависимости от асимптотического закона убывания плотности и от того, являются ли распределения скоростей сферическими или нет.

1. Естественно потребовать, чтобы в моделях стационарных сферических скоплений дисперсии скоростей монотонно убывали с расстоянием. Обычно это условие выполняется, причем на периферии системы дисперсия скоростей ведет себя как потенциал.

Иногда при построении моделей постулируют точное равенство полной дисперсии одной шестой потенциала («локальная теорема вириала») [1—3]. Это приводит к модели Эддингтона [1] с законом плотности Шустера и сферическим распределением скоростей. Но известны и фазовые модели с таким же законом плотности, но другим коэффициентом пропорциональности между дисперсией радиальных скоростей и потенциалом (и уже несферическим распределением скоростей) [4]. В статье [4] авторы сообщают также о гидродинамических моделях сферических систем, в которых «локальная теорема вириала» заменяется более сложным линейным соотношением с переменными коэффициентами. Монотонность убывания дисперсий в этом случае, вообще говоря, не обязательна. В [4] описаны модели, для которых в ходе дисперсий появляется «горб» вблизи изотермического «плато» в центре.

Несколько особняком стоят изотермическая модель (со сферическим распределением скоростей), гидродинамическая модель Агекяна и Петровской [5], в которой обе дисперсии постоянны и не равны между собой, и модель Эддингтона [6] с шварцшильдовым распределением скоростей, в которой постоянна лишь радиальная дисперсия. Но изотермичность оказывается возможной лишь при слишком медленном падении плотности, приводящем к бесконечной массе. Поэтому можно утверждать, что в ходе эволюции сферическое скопление никогда не достигнет совершенно изотермического состояния, хотя иррегулярные силы и стремятся выровнять дисперсии в различных точках системы. И действительно, Агекян [7] нашел, что в построенной им квазистационарной модели дисперсия скоростей убывает к границе довольно быстро.

Для довольно широкого класса моделей с законом плотности Шустера, но несферическим распределением скоростей убывание радиальной дисперсии с расстоянием было доказано Велтманном [8]. Возможные способы нарушить это свойство (например ,сделав орбиты круговыми) связаны с искусственной и в то же время довольно существенной перестройкой моделей.

В статье [9] Огородников нашел при некоторых предположениях, что нарушение монотонности в ходе дисперсии радиальных скоростей возможно разве что на периферии системы. Более точному решению задачи, поставленной в [9], и посвящена данная работа. Полученные результаты будут частично перекрываться с найденными Кузминым и Велтманном [4].

2. Будем придерживаться гидродинамического уровня описания. Пусть $\nu(r)$ — материальная плотность, $M(r)$ — масса, заключенная внутри сферы радиуса r, т. е. для самогравитирующих систем, исследованием которых мы ограничимся,

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \nu(x)\, x^2 dx,$$

$\sigma_r^2(r)$, $\sigma_t^2(r)$ — дисперсии соответственно радиальных и поперечных скоростей, G — гравитационная постоянная.

Сделаем следующие предположения.

I. На любом конечном отрезке $[a, b] \subset I = [0, \infty)$ плотность $\nu(r)$ является (строго) положительной дифференцируемой функцией, а ее производная удовлетворяет условию Липшица.

II. Отношение радиальной и поперечной дисперсий выражается формулой Эддингтона [6], т. е. существует такое $\varkappa \geq 0$, что для любого $r \in I$

$$\sigma_t^2(r) = \frac{2\sigma_r^2(r)}{1 + \varkappa^2 r^2}.$$

Из предположения I следует, что радиус системы бесконечен, а $M(r)$ — монотонно возрастающая, непрерывно дифференцируемая функция, причем

$$M(r)/r^2 \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Подобного рода предположения гладкости всегда молчаливо подразумеваются в звездной динамике, хотя они нарушаются, например, для моделей, полученных суперпозицией подсистем конечных размеров; включить в рассмотрение этот последний случай не представляет затруднений, не будем, однако, этого делать. Уклонимся также от обсуждения предположения о бесконечности размеров системы, связанного с анализом постулата об автономности звездных систем и проблемы диалектического единства дискретного и континуального в их строении (см. [10, 11]).

Что же касается формулы Эддингтона, то первоначально [6], как известно, она была получена в эллипсоидальной динамике, когда $\sigma_r = \mathrm{const}$. Однако связывать ее с этим последним условием вовсе не обязательно. Ряд фазовых моделей сферических систем, для которых справедлива формула Эддингтона, но σ_r меняется с расстоянием, указан, например, в [4].

Приложение 1. При предположениях I, II для любого $\varepsilon > 0$ функция $\sigma_r^2(r)$ непрерывно дифференцируема на $I_\varepsilon = [\varepsilon, \infty)$, причем для любого $r \in I_\varepsilon$

$$\sigma_r^2(r) = \frac{\nu_\varepsilon \sigma_\varepsilon^2 (1 + \varkappa^2\varepsilon^2)}{\nu(r)(1 + \varkappa^2 r^2)} - \frac{G}{\nu(r)(1 + \varkappa^2 r^2)} \int\limits_\varepsilon^r M(x)\,\nu(x)(1 + \varkappa^2 x^2)\,\frac{dx}{x^2},$$

где

$$\nu_\varepsilon = \nu(\varepsilon), \quad \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_r^2(\varepsilon).$$

Доказательство. В силу предположения I имеет смысл дифференциальное уравнение гидростатического равновесия [12], откуда следует непрерывная дифференцируемость $\sigma_r^2(r)$. Учитывая II, перепишем это уравнение в следующей форме:

$$\frac{d\sigma_r^2}{dr} + \sigma_r^2 \left(\frac{d}{dr} \ln \nu r^2 - \frac{2}{r(1 + \varkappa^2 r^2)} \right) = -\frac{GM(r)}{r^2}.$$

Будем рассматривать его как линейное неоднородное уравнение относительно σ_r^2. Решение такого уравнения и выписано выше.

Замечание. Точка $r = 0$ является особой для данного уравнения. Можно, однако, сделать следующее естественное предположение.

III. $\nu'(0) = 0$.

Тогда, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем более простую формулу: для любого $r \in I$

$$\sigma_r^2(r) = \frac{\nu_0 \sigma_0^2}{\nu(r)(1 + \varkappa^2 r^2)} - \frac{G}{\nu(r)(1 + \varkappa^2 r^2)} \int_0^r M(x)\,\nu(x)\,\frac{dx}{x^2}.$$

Поскольку нас в дальнейшем будут интересовать большие r, условие III излишне. Однако с целью упрощения промежуточных выкладок будем далее предполагать его справедливость.

Следствие. В предположениях I—III для любого $r \in I$

$$\frac{d\sigma_r^2(r)}{dr} = \left(\frac{1}{\nu(r)(1 + \varkappa^2 r^2)}\right)' \left[\nu_0 \sigma_0^2 - G \int_0^r M(x)\,\nu(x)\,(1 + \varkappa^2 x^2)\frac{dx}{x^2}\right] - \frac{GM(r)}{r^2}.$$

Заметим, что в этой формуле в квадратных скобках стоит выражение

$$\nu(r)(1 + \varkappa^2 r^2)\,\sigma_r^2(r) > 0.$$

Легко видеть, что при малых r второе слагаемое и подынтегральный член в формуле для $d\sigma_r^2/dr$ исчезающе малы, а стоящая впереди производная отрицательна, так что вблизи центра дисперсия радиальных скоростей убывает. Это согласуется с [9].

С другой стороны, при достаточно больших r первое слагаемое в этой формуле, очевидно, положительно (а второе — отрицательно). Поэтому для определения знака производной во внешних частях системы необходим более детальный анализ, к которому мы и переходим.

3. Сделаем еще следующие предположения.

IV. Масса системы конечна, т. е. существует

$$\lim_{r \to \infty} M(r) = M < \infty.$$

V. Дисперсия $\sigma_r^2(r)$ равномерно ограничена на I.

VI. Существует такое $R \geqslant 0$, что в R — окрестности точки ∞ функция $\nu(r)$ голоморфна.

Условия IV, VI необходимы и достаточны для того, чтобы при $r > R$

$$\nu(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k}{r^{k+3}}.$$

Пусть

$$l = \min k: \quad \nu_k \neq 0.$$

Для модели Шустера $l = 2$. Модели с $l > 2$, по-видимому, подробно еще не изучены.

Примерами систем с $l = 1$ являются изохронная модель Энона [13] или обобщенно-политропные модели Кузмина и Велтманна (при значении параметра $b > 0$); фазовые плотности последних построены в [14]. Об асимптотическом законе $\nu = O(r^{-4})$ для систем конечной массы заключил еще Джинс [15]. Возражения Кинга [16] против такого закона остались непонятными автору. Правда, ниоткуда не следует, что $\nu_1 \neq 0$, хотя эволюционные соображения, высказанные, например, в [17], заставляют предпочесть именно закон r^{-4} для достаточно старых скоплений.

Во всяком случае, модели с $l = 1$ возможны теоретически и, согласно [18], достаточно хорошо описывают распределение плотности в ряде реальных систем.

Лемма 1. Если справедливы предположения IV, VI, то в окрестности точки $r = \infty$

1) функция $M(r)$ голоморфна,

$$M(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{r^k},$$

причем

$$M_0 = M = 4\pi \int_0^{\infty} \nu(r)\, r^2 dr$$

— полная масса системы, а

$$M_k = -4\pi \nu_k / k, \quad k \geqslant 1;$$

2) функция $a(r) = M(r) \cdot \nu(r)$ голоморфна

$$a(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{r^{k+3}},$$

причем

$$a_k = \sum_{i=0}^{k-1} \nu_{k-i} M_i;$$

3) функции

$$f(r) = \int_0^r M(x)\,\nu(x)\,dx, \qquad g(r) = \int_0^r M(x)\,\nu(x)\,\frac{dx}{x^2}$$

также голоморфны,

$$f(r) = f_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k+2}\,\frac{1}{r^{k+2}},$$

$$g(r) = g_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k+4}\,\frac{1}{r^{k+4}},$$

где

$$f_0 = \int_0^{\infty} M(x)\,\nu(x)\,dx, \qquad g_0 = \int_0^{\infty} M(x)\,\nu(x)\,\frac{dx}{x^2}.$$

Доказательство. Второе утверждение получается просто перемножением рядов, а первое и третье — почленным интегрированием. При этом надо выбрать произвольное $r_* \in (R, r)$, разбить интегралы на два: от 0 до r_* и от r_* до r и подставить ряды во второй интеграл.

Замечание. Если $l \neq 1$, то $a_k = \nu_k M$, $l \leqslant k \leqslant 2l$; если же $l = 1$, то $a_1 = \nu_1 M$, $a_2 = \nu_2 M + \nu_1 M_1$, $a_3 = \nu_3 M + \nu_2 M_1 + \nu_1 M_2, \ldots$.

Элементарными операциями легко убедиться, что верна

Лемма 2. 1) Если $\varkappa \neq 0$, то при $r > R$

$$\frac{1}{\nu(r)\,(1 + \varkappa^2 r^2)} = \frac{r^{l+1}}{\varkappa^2 \nu_l}\,F(r),$$

где $F(r)$ — голоморфная в окрестности $r = \infty$ функция,

$$F(r) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k\,\frac{1}{r^k}, \qquad r > R,$$

причем

$$F_0 = 1,\ F_1 = -\nu_{l+1}/\nu_l,\ F_2 = (\nu_{l+1}/\nu_l)^2 - (\nu_l + \varkappa^2 \nu_{l+2})/(\varkappa^2 \nu_l);$$

2) Если $\varkappa = 0$, то при $r > R$

$$\frac{1}{\nu(r)} = \frac{r^{l+3}}{\nu_l}\,F^*(r),$$

где $F^*(r)$ — голоморфная в окрестности $r=\infty$ функция,

$$F^*(r)=\sum_{k=0}^{\infty} F_k^* \frac{1}{r^k},$$

причем

$$F_0^*=1,\quad F_1^*=-\nu_{l+1}/\nu_l,\quad F_2^*=(\nu_{l+1}^2/\nu_l^3)-\nu_{l+2}/\nu_l^2.$$

Лемма 3. Если справедливы предположения I—VI, то

$$\nu_0\sigma_0^2=G(f_0+\varkappa^2 g_0).$$

Доказательство. Подставим полученные выше ряды в выражение для $\sigma_r^2(r)$. Выделив старшие члены, убеждаемся, что искомое равенство является необходимым и достаточным условием ограниченности σ_r^2 при больших r.

Предложение 2. Если справедливы предположения I—VI, то в R — окрестности точки $r=\infty$ дисперсия радиальных скоростей $\sigma_r^2(r)$ голоморфна,

$$\sigma_r^2(r)=\sum_{k=1}^{\infty} s_k(\varkappa, l)\, r^{-k},$$

причем, если $\varkappa \neq 0$, то

$$s_1(\varkappa, l)=\frac{GM}{l+2};$$

$$s_2(\varkappa, l)=-\frac{GM\nu_{l+1}}{(l+2)(l+3)\nu_l},\qquad l\geqslant 2,$$

$$s_2(\varkappa, 1)=-\frac{GM\nu_2}{\nu_1}+\frac{GM_1}{4};$$

$$s_3(\varkappa, l)=-\frac{GM}{(l+2)(l+3)}\left(\frac{\nu_{l+1}}{\nu_l}\right)^2-\frac{2GM\nu_{l+2}}{(l+2)(l+4)\nu_l}-$$

$$-\frac{2GM}{(l+2)(l+4)\varkappa^2},\qquad l\geqslant 2,$$

$$s_3(\varkappa, 1)=-\frac{GM\nu_2^2}{12\nu_1^2}-\frac{2GM\nu_3}{15\nu_1}-\frac{2GM}{15\varkappa^2}-\frac{GM_1\nu_2}{20\nu_1}+\frac{GM_2}{5}.$$

Если же $\varkappa = 0$, то

$$s_1(0, l) = \frac{GM}{l+4};$$

$$s_2(0, l) = -\frac{GM\nu_{l+1}}{(l+4)(l+5)\nu_l}, \quad l \geqslant 2,$$

$$s_2(0, 1) = -\frac{GM\nu_2}{30\nu_1}\frac{GM_1}{6};$$

$$s_3(0, l) = -\frac{GM\nu_{l+1}^2}{(l+4)(l+5)\nu_l^2} - \frac{2GM\nu_{l+2}}{(l+4)(l+6)\nu_l}, \quad l \geqslant 2,$$

$$s_3(0, 1) = -\frac{GM\nu_2^2}{30\nu_1^2} - \frac{2GM\nu_3}{35\nu_1} - \frac{GM_1\nu_2}{42\nu_1} + \frac{GM_2}{7}.$$

Доказательство. Учитывая леммы 1—3, подставим найденные ряды в формулу для σ_r^2, выписанную в замечании к предложению 1 и перегруппируем члены.

Следствие. Существует такое $R^* \geqslant 0$, что при $r > R^*$ функция $\sigma_r^2(r)$ монотонно убывает.

Полученные разложения и решают задачу о поведении σ_r^2 при больших r.

4. Сравним теперь поведение на периферии системы дисперсии $\sigma_r^2(r)$ и потенциала $U(r)$.

Используя известную формулу

$$U(r) = 4\pi G\left[\frac{1}{r}\int_0^r \nu(x)\,x^2dx + \int_r^\infty \nu(x)\,xdx\right],$$

легко придти к следующему утверждению.

Лемма 4. Если выполнены условия IV, VI, то потенциал голоморфен в R — окрестности точки $r = \infty$,

$$U(r) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{U_k}{r^{k+1}},$$

причем

$$U_0 = GM = 4\pi G \int_0^\infty \nu(x)\, x^2 dx,$$

$$U_k = 4\pi\nu_k / [k(k+1)], \quad k \geqslant 1.$$

Сравнивая ряды для $U(r)$ и $\sigma_r^2(r)$, получаем следующее.

Предложение 3. Если выполнены условия I—VI, то существует конечный предел $\lim\limits_{r\to\infty} \sigma_r^2(r)/U(r)$, а именно,

$$\frac{\sigma_r^2(r)}{U(r)} \underset{r\to\infty}{\to} \frac{1}{l+2}, \quad \varkappa \neq 0,$$

$$\frac{\sigma_r^2(r)}{U(r)} \underset{r\to\infty}{\to} \frac{1}{l+4}, \quad \varkappa = 0.$$

Замечание. Если $l = 2$, то полученные предельные соотношения совпадают с формулами (7.5) и (7.12) работы [4] (найденными в предположении закона Шустера).

Следствие. «Локальная теорема вириала» в форме

$$\sigma_r^2 + \sigma_t^2 = U/2$$

может выполняться на периферии системы только если $\varkappa = 0$, $l = 2$ (а во всей системе только для модели Шустера—Эддингтона [1]).

Поскольку в «среднем» элементе объема она все-таки должна выполняться, то можно ожидать следующего.

Если $\varkappa = 0$ и $l = 1$, то «температура» во внутренних частях скоплений меньше вириальной. Если $\varkappa = 0$ и $l \geqslant 3$ или если $\varkappa \neq 0$, то «температура» в центре системы больше вириальной.

Так как при исследовании правильных скоплений галактик приходится учитывать объекты только из центральных областей, то получаем, что существует еще один источник систематических ошибок, приводящих к переоценке вириальной массы скоплений (по-видимому, данный эффект отличен от указанного Шером [19]). Напротив, для достаточно старых рассеянных скоплений с распределением скоростей, вероятно, близким к сферическому, можно ожидать, что обычные методы недооценивают массу. Впрочем, указанные динамические эффекты являются слишком тонкими и, вероятно, не имеют отношения к наблюдательным фактам.

Имея в виду полученные в предложении 3 предельные равенства, можно поставить проблему отыскания моделей сферических систем с эддингтоновским отношением дисперсий, для которых σ_r^2 (или $\sigma_r^2 + \sigma_t^2$) пропорциональны $U(r)$ для всех r. Насколько можно судить, для каждых $\varkappa$, l

такие модели существуют (и единственны). Однако ввиду сложности выражений для произвольных $s_k(x, l)$ точное решение вопроса мы откладываем на будущее.

Поскольку возможности звездной гидродинамики принципиально ограничены, а использование формулы Эддингтона (или какого-либо иного конкретного замыкающего соотношения) ставит вопрос о существовании соответствующих фазовых моделей, на который не всегда удается ответить, необходимо также выявление действительной общности полученных результатов. Сравнивая с [4], можно предположить, что предложение 3 справедливо, если только

$$\frac{\sigma_r^2}{\sigma_t^2} = O(r^{-2}).$$

Физического осмысления требует также обнаруженное здесь и в [4] различие случаев сферического и несферического распределений скоростей.

Из числа более общих вопросов укажем на следующий, имея в виду наметившуюся в звездной динамике тенденцию к минимизации условий гладкости [20]. Следствия предложения 2 и предложение 3 могут быть сформулированы без предположения VI. Не могут ли они быть доказаны без него?

Анализу хотя бы некоторых из отмеченных здесь проблем автор надеется посвятить отдельную работу.

Автор с благодарностью отмечает, что при действиях (хотя и элементарных) с рядами он находился под влиянием исследования К. В. Холшевникова, в котором решается поставленная в [21] задача о связи асимптотических выражений плотности и потенциала гравитирующих систем конечной массы, но бесконечной протяженности.

Ленинградский государственный
университет

ON THE BEHAVIOR OF RADIAL VELOCITY DISPERSION AT OUTER REGIONS OF SPHERICAL SYSTEMS OF GRAVITATING BODIES

L. P. OSSIPKOV

Spherical gravitating systems of finite masses and infinite sizes with the Eddingtonian relation between velocity dispersions are considered. The asymptotic development of radial dispersions at large distances is found. The latter is quite different for spherical and non-sphe-

rical velocity distribution and depends on the form of the asymptotic density law.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. S. Eddington*. M. N., 76, 572, 1916.
2. *И. Н. Минин*. Уч. зап. ЛГУ, № 153, 60, 1950.
3. *В. М. Багин*. Астрон. ж., 46, 1201, 1969.
4. *Г. Г. Кузмин, Ю.-И. К. Велтманн*. Публ. Тартуской обс., 36, 3, 1968.
5. *Т. А. Агекян, И. В. Петровская*. Уч. зап. ЛГУ, № 307, 187, 1962.
6. *A. S. Eddington*, M. N., 76, 366, 1915.
7. *Т. А. Агекян*. Астрон. ж., 41, 523, 1964.
8. *Ю.-И. К. Велтманн*. Публ. Тартуской обс., 34, 81, 1964.
9. *К. Ф. Огородников*. Труды Астрофиз. ин-та АН Каз. ССР, 5, 219, 1965.
10. *К. Ф. Огородников*. Астрон. ж., 34, 809, 1957; 36, 746, 1959; 44, 399, 1967.
11. *Ф. А. Цицин*. Труды Астрофиз. ин-та АН Каз. ССР, 5, 211, 1965.
12. *К. Ф. Огородников*. ДАН СССР, 116, 200, 1957.
13. *M. Hénon*. Ann. Astrophys., 22, 126, 1959.
14. *Г. Г. Кузмин, Ю.-И. К. Велтманн*. в кн.: «Динамика галактик и звездных скоплений», Наука, Алма-Ата, 1973, стр. 82.
15. *J. H. Jeans*, M. N., 76, 567, 1917.
16. *I. R. King*, A. J., 136, 784, 1962.
17. *Г. Г. Кузмин, Ю.-И. К. Велтманн*. Публ. Тартуской обс., 36, 470, 1968.
18. *Г. Г. Кузмин, Ю.-И. К. Велтманн* и др., в кн.: «Динамика галактик и звездных скоплений», Наука, Алма-Ата, 1973, стр. 13.
19. *D. Sher*, Ap. J., 171, P. 1, 537, 1972.
20. *В. А. Антонов*. Уч. зап. ЛГУ, № 373, 111, 1974.
21. *Л. П. Осипков*. Вестн. ЛГУ, № 7, 151, 1975.