АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 12

НОЯБРЬ, 1976

ВЫПУСК 4

ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНЫХ АТМОСФЕРАХ. II

В. В. ИВАНОВ

Поступила 27 ноября 1975

Изучаются связи между четырьмя характерными угловыми распределениями интенсивности излучения в плоских бесконечной и полубесконечной средах. Эти распределения соответствуют случаям, когда источник и приемник лежат в одной плоскости (для полубесконечной среды — на границе) и когда они разнесены бесконечно далеко. Это позволило, в частности, из физических соображений получить ранее неизвестные уравнения Фредгольма для интенсивности $u(\lambda)$ на границе в задаче Милна и для функций Амбарцумяна $\varphi_m(\lambda)$. В основе рассмотрения лежит возможность разбиения бесконечной среды на два примыкающих полупространства.

Введение. В первой части настоящей работы [1] были рассмотрены некоторые общие свойства полей излучения в бесконечных атмосферах и подробно исследована задача о диффузном отражении от такой атмосферы. Под этим термином понимается нахождение интенсивности того диффузного излучения в атмосфере с плоским мононаправленным источником, которое падает на плоскость источника. Было выяснено, что между задачами о диффузном отражении от бесконечной и полубесконечной сред существует далеко идущее формальное сходство.

В настоящей статье исследуется связь между решениями уравнения переноса для бесконечной и полубесконечной сред. В основе всех рассмотренных лежит та простая мысль, что бесконечную среду можно разбить на два примыкающих друг к другу полупространства. Исходя из этого, И. Кушнер и С. Пахор [2], С. Пахор [3], Х. ван де Хюлет [4] и В. В. Соболев [5] (см. также [6], гл. II) получили ряд соотношений между полями излучения в бесконечной и полубесконечной средах. Однако, как будет показано в настоящей статье, найденными в этих работах результатами не исчерпываются все следствия, вытекающие из возможности разбиения бесконечной среды на две половины.

Непосредственно из физических соображений можно написать весьма общее соотношение [7], связывающее функции Грина уравнения переноса для бесконечной и полубесконечной сред. Его частными случаями являются как известные ранее, так и получаемые в настоящей статье соотношения между полями излучения в полупространстве и в полном пространстве. Из дидактических соображений было, однако, решено не исходить в изложении из этого общего соотношения, а рассмотреть важнейшие частные случаи непосредственно.

Используются обозначения, принятые в книге В. В. Соболева [6]. Ссылки вида (1. n) означают формулу (n) из первой части настоящей работы [1]. Индекс ∞ будет подчеркивать, что величина относится к бесконечной среде. Так, коэффициент отражения от бесконечной среды, обозначавшийся в [1] через ρ , будет теперь обозначаться через ρ_{∞} и т. п.

Наводящие соображения. Содержание статьи. Бесконечная среда с плоским мононаправленным источником порождает два характерных угловых распределения интенсивности, $i(\mu)$ и $\rho_{\infty}(\mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0)$. Они описывают поле излучения в такой среде при двух выделенных положениях приемника: когда он удален от источника на большое расстояние (строго говоря, на бесконечность), и когда приемник лежит в одной плоскости с источником.

В полубесконечной среде существуют два выделенных положения источника — на границе среды и в бесконечно глубоких слоях. Каждому из них соответствует по два выделенных положения приемника — в плоскости источника и на бесконечном удалении от него. Таким образом, имеется четыре типичные задачи, которые мы обозначим как $(0, 0)$, $(0, \infty)$, $(\infty, 0)$ и (∞, ∞) , где символ (b, a) означает, что мононаправленный источник излучения находится на глубине $\tau = a$, а приемник расположен при $\tau = b$, и ищется относительное угловое распределение интенсивности в плоскости приемника. Задача $(0, 0)$ есть задача о диффузном отражении от полупространства. Соответствующий угловой режим описывается коэффициентом отражения $\rho(\mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0)$. Задача Милля $(0, \infty)$ порождает граничный угловой режим $u(\mu)$. Наконец, задачи $(\infty, 0)$ и (∞, ∞) ничего нового давать не должны. Из физических соображений очевидно, что наличие границы не будет сказываться на относительном угловом распределении интенсивности в бесконечно глубоких слоях. Поэтому задача $(\infty, 0)$ должна приводить к уже знакомой нам функции $i(\mu)$, а задача (∞, ∞) возвращает нас назад к $\rho_{\infty}(\mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0)$.

Итак, существуют четыре характерных угловых распределения интенсивности, $i(\mu)$, $u(\mu)$, $\rho_{\infty}(\mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0)$ и $\rho(\mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0)$. Три из них, i , u и ρ , изучены к настоящему времени во всех деталях, в частности, найдены соотношения, связывающие их друг с другом (см., например, [6], гл. II). Четвертый угловой режим, ρ_{∞} , был исследован в первой части на-

стоящей работы [1], однако связь его с тремя другими типичными угловыми распределениями и вытекающие из этого следствия до сих пор не рассмотривались. Это делается в настоящей статье. Содержание ее следующее.

Сначала устанавливается связь между решениями задач (∞, ∞) и $(0, 0)$, т. е. между коэффициентами отражения от бесконечной (ρ_∞) и полубесконечной (ρ) сред. После этого показывается, что простые соотношения существуют также между i , u и ρ_∞ . Они во многом подобны хорошо известным соотношениям, связывающим i , u и ρ (см. [6], гл. II, § 3). Затем находятся консервативные пределы ($\lambda \rightarrow 1$) найденных соотношений. В основе лежит разложение ρ_∞ при малых $1 - \lambda$. Если индикатриса рассеяния разлагается по полиному Лежандра, то m -ая азимутальная гармоника коэффициента отражения $\rho^m(\mu, \mu_0)$, как известно, представима в виде разложения по функциям одной переменной $\varphi_m^m(\mu)$ — функциям Амбарцумяна. Для $\rho^m(\mu, \mu_0)$ аналогичные разложения, содержащие некоторые вспомогательные функции $\varphi_{m,n}^m(\mu)$, были найдены в [1]. Исходя из соотношения между ρ и ρ_∞ , мы устанавливаем, что φ_m^m и $\varphi_{m,n}^m$ связаны между собой. Эта связь есть фактически совокупность некоторых (по-видимому, ранее неизвестных) независимых уравнений Фредгольма для нахождения каждой из функций $\varphi_m^m(\mu)$ по считающимся известными $\varphi_{m,n}^m(\mu)$ и $\varphi_m^m(\mu, \mu_0)$. В конце статьи результаты применяются к частному случаю изотропного рассеяния.

Основные соотношения. Рассмотрим бесконечную среду, в которой источник и приемник лежат в одной плоскости ($\tau = 0$). Пусть источник излучает в направлении ω_0 , характеризуемом угловыми переменными (μ_0, φ_0) , где $\mu_0 = \omega_0 n$, n — единичный вектор в положительном направлении оси оптических глубин z , φ_0 — азимут ω_0 . Не ограничивая общности, примем, что $\mu_0 \geq 0$. Мощность источника считаем нормированной так, что интенсивность его прямого излучения при $\tau = +0$ равна $\pi \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$. Интенсивность диффузного излучения на уровне τ в направлении ω с угловыми переменными (μ, φ) , где $\mu = \omega n$ и φ — азимут ω , обозначим через $I_\tau(\tau, \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0)$. Положим

$$\rho_\infty(\mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) \mu_0 = I_\infty(0, -\mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0), \quad 1 > \mu > -1, \quad (1)$$

и назовем ρ_∞ коэффициентом отражения от бесконечной среды (в [1] I_∞ и ρ_∞ обозначались просто I и ρ , без индекса ∞). Пусть, далее, $\rho(\mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0)$ — коэффициент отражения от полубесконечной среды, определяемый соотношением

$$\rho(\mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) \mu_0 = I(0, -\mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0), \quad 1 > \mu > 0, \quad (2)$$

где $I(\tau, \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0)$ — интенсивность диффузного излучения в полу-

пространстве, освещаемом извне параллельными лучами так, что $I(0, \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) = \pi \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$.

Коэффициенты отражения ρ и ρ_+ связаны очевидными соотношениями

$$\begin{aligned} \rho_+(\mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) &= \rho(\mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \rho(\mu, \mu'; \varphi - \varphi') \rho_+(-\mu', \mu_0; \varphi' - \varphi_0) \mu' d\mu', \end{aligned} \quad (3)$$

$$\rho_+(-\mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \rho(\mu, \mu'; \varphi - \varphi') \rho_+(\mu', \mu_0; \varphi' - \varphi_0) \mu' d\mu'. \quad (4)$$

Первое из них выражает тот факт, что интенсивность диффузного излучения в бесконечной среде при $\tau=0$ (в плоскости источника), распространяющегося в сторону $\tau < 0$, возникает в результате диффузного отражения от полупространства $\tau > 0$. При этом отражение прямого излучения источника описывается внеинтегральным членом, тогда как интегральное слагаемое учитывает отражение диффузного излучения, падающего со стороны $\tau < 0$. Второе соотношение утверждает, что излучение, распространяющееся в бесконечной среде при $\tau=0$ в сторону $\tau > 0$, можно рассматривать как результат отражения от полупространства $\tau < 0$ того излучения, которое падает на него со стороны $\tau > 0$.

Если ρ_+ и ρ представить в виде фурье-разложений по азимуту

$$\rho_+(\mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho_+^m(\mu, \mu_0) e^{-im(\varphi - \varphi_0)}, \quad (5)$$

$$\rho(\mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho^m(\mu, \mu_0) e^{-im(\varphi - \varphi_0)}, \quad (6)$$

то из (3) и (4) получаем следующие соотношения между ρ_+^m и ρ^m :

$$\rho_+^m(\mu, \mu_0) = \rho^m(\mu, \mu_0) + 2 \int_0^1 \rho^m(\mu, \mu') \rho_+^m(-\mu', \mu_0) \mu' d\mu', \quad (7)$$

$$\rho_+^m(-\mu, \mu_0) = 2 \int_0^1 \rho^m(\mu, \mu') \rho_+^m(\mu', \mu_0) \mu' d\mu'. \quad (8)$$

Особый интерес представляют нулевые азимутальные гармоники ρ_+^0 и ρ^0 , т. е. усредненные по азимуту коэффициенты отражения. Верхний

индекс $m=0$ у всех величин, зависящих от m , для упрощения записи в дальнейшем опускается, так что (7) и (8) при $m=0$ будут записываться так ($\mu > 0$):

$$\rho_{-}(\mu, \mu_0) = \rho(\mu, \mu_0) + 2 \int_0^1 \rho(\mu, \mu') \rho_{-}(-\mu', \mu_0) \mu' d\mu'. \quad (9)$$

$$\rho_{-}(-\mu, \mu_0) = 2 \int_0^1 \rho(\mu, \mu') \rho_{-}(\mu', \mu_0) \mu' d\mu'. \quad (10)$$

Возможны два взгляда на приведенные соотношения: их можно рассматривать либо как уравнения для определения ρ_{-} по известному ρ , либо как уравнения, позволяющие находить ρ по заданному ρ_{-} .

Заметим, что, поменяв местами μ и μ_0 и воспользовавшись свойствами симметрии ρ_{-}^m и ρ^m

$$\rho_{-}^m(\mu, \mu_0) = \rho_{-}^m(\mu_0, \mu); \quad \rho_{-}^m(-\mu, -\mu_0) = \rho_{-}^m(\mu, \mu_0), \quad (11)$$

$$\rho^m(\mu, \mu_0) = \rho^m(\mu_0, \mu), \quad (12)$$

вместо (7) и (8) получим

$$\rho_{-}^m(\mu, \mu_0) = \rho^m(\mu, \mu_0) + 2 \int_0^1 \rho_{-}^m(-\mu, \mu') \rho^m(\mu', \mu_0) \mu' d\mu', \quad (13)$$

$$\rho_{-}^m(-\mu, \mu_0) = 2 \int_0^1 \rho_{-}^m(\mu, \mu') \rho^m(\mu', \mu_0) \mu' d\mu'. \quad (14)$$

Физический смысл этих соотношений иной, чем у (7) и (8). В (7) и (8) интенсивность диффузного излучения представляется в виде суммы вкладов, вносимых в поле излучения фотонами, летевшими в некотором определенном направлении (характеризуемом угловой переменной μ') при последнем пересечении ими плоскости $\tau=0$. В соотношениях же (13) и (14) полная интенсивность при $\tau=0$ представляется как сумма тех вкладов в окончательное поле излучения, которые даются фотонами, при своем первом пересечении плоскости $\tau=0$ летевшими в направлении с угловой переменной μ' .

Рассмотрим теперь бесконечную среду, в которой источник лежит при $\tau = -\infty$, а приемник помещен в плоскости $\tau=0$. Интенсивность излучения при $\tau=0$ обозначим через $i(\mu)$, $1 \geq \mu \geq -1$, и нормируем $i(\mu)$ условием

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 i(\mu) d\mu = 1, \quad (15)$$

где λ — вероятность выживания фотона при рассеянии. Хорошо известны неоднократно переоткрывавшиеся [2, 4, 5] соотношения ($\mu > 0$)

$$i(\mu) = M u(\mu) + 2 \int_0^1 \rho(\mu, \mu') i(-\mu') \mu' d\mu', \quad (16)$$

$$i(-\mu) = 2 \int_0^1 \rho(\mu, \mu') i(\mu') \mu' d\mu', \quad (17)$$

где $u(\mu)$ — интенсивность выходящего излучения в задаче Милна, причем

$$2 \int_0^1 u(\mu) i(\mu) \mu d\mu = 1, \quad (18)$$

M — нормировочная постоянная:

$$M = 2 \int_{-1}^1 i^2(\mu) \mu d\mu. \quad (19)$$

Согласно (16), в интенсивности излучения, распространяющегося в сторону роста τ , можно выделить «затравку» $Mu(\mu)$, обусловленную фотонами, впервые пересекающими плоскость $\tau=0$ при своем движении от источника, и добавку, возникающую из-за отражения от области $\tau < 0$ излучения, падающего на нее из полупространства $\tau > 0$. «Затравочная» интенсивность $Mu(\mu)$ пропорциональна граничной милновской интенсивности $u(\mu)$ потому, что фотоны, впервые пересекающие плоскость $\tau=0$ со стороны $\tau < 0$, не могут «знать» о существовании рассеивающей среды при $\tau > 0$, и поэтому их распределение по направлениям должно быть таким же, как и тогда, когда при $\tau > 0$ находится пустота. Аналогичным образом, (17) утверждает, что излучение, распространяющееся при $\tau=0$ в сторону $\tau < 0$, можно рассматривать как результат отражения от полупространства $\tau > 0$ того излучения, которое падает на него из области $\tau < 0$. Таким образом, физический смысл двух пар формул, (9)—(10) и (16)—(17), фактически один и тот же, отличие же их друг от друга отражает различие в относительном расположении источника и приемника.

Очевидно, что должны существовать формулы, находящиеся к (16)—(17) в таком же отношении, как (13)—(14) соотносятся к (7)—(8). Они имеют вид

$$i(\mu) = M u(\mu) + 2M \int_0^1 \rho_{\infty}(-\mu, \mu') u(\mu') \mu' d\mu', \quad (20)$$

$$i(-\mu) = 2M \int_0^1 \rho_{\infty}(\mu, \mu') u(\mu') \mu' d\mu', \quad (21)$$

Физический смысл этих формул состоит в следующем. Поле излучения при $\tau=0$ «знает» о существовании источника при $\tau = -\infty$ только потому, что от этого источника к плоскости $\tau=0$ со стороны $\tau < 0$ приходят фотоны. Обусловленная ими интенсивность есть уже знакомая нам затравочная интенсивность $M u(\mu)$. Выключим источник при $\tau = -\infty$, введя вместо него источник при $\tau=0$, излучающий в сторону $\tau > 0$ с мощностью $M u(\mu)$. Ясно, что интенсивность излучения при $\tau=0$ при такой замене должна остаться неизменной. Это и выражают формулы (20) и (21).

Соотношений (20) и (21) в литературе, насколько нам известно, нет. Их общая структура такая же, как и у хорошо известных формул (16) и (17). В обоих случаях $i(\mu)$ представляется в виде интеграла от произведения двух характерных угловых распределений, из которых одно относится к бесконечной, а другое — к полубесконечной среде.

В теории переноса существует естественная иерархия задач по сложности геометрии. Самой простой является бесконечная среда, следующей по сложности — полубесконечная. Соотношение (20) можно рассматривать как уравнение Фредгольма для нахождения одного из типичных угловых режимов в полубесконечной среде — миллионской интенсивности на границе $u(\mu)$ — μ -функциям $i(\mu)$ и $\rho_{\infty}(\mu, \mu')$, описывающим поле излучения в бесконечной среде. В этом состоит существенное отличие (20) от формулы (16), выражающей полупространственную функцию $u(\mu)$ через полупространственную же характеристику $\rho(\mu, \mu')$.

Почти консервативное и консервативное рассеяние. При $\lambda \rightarrow 1$ коэффициент отражения ρ_{∞} расщедится. Поэтому непосредственно применять к консервативному случаю соотношения, полученные в предыдущем разделе для $m=0$, нельзя. Чтобы вывести их аналоги для $\lambda=1$, исследуем поведение $\rho_{\infty}(\mu, \mu')$ при $\lambda \rightarrow 1$.

Поскольку левая часть в (21), как известно [6], § 5, гл. II, есть $1 + O(k)$, то и $M \rho_{\infty} = 1 + O(k)$. Ищем поэтому $M \rho_{\infty}$ в виде

$$M \rho_{\infty}(\mu, \mu') = 1 - \frac{3k}{3 - \kappa_1} \rho^*(\mu, \mu') + O(k^2), \quad \lambda \rightarrow 1, \quad (22)$$

где $\rho^*(\mu, \mu')$ — новая неизвестная функция. Чтобы получить уравнения

для ее определения, достаточно ввести разложение (22) в уравнения (1.29) и (1.30) для $\rho_{\pm}$. Рассмотрение членов $O(k)$ дает ($\mu > 0$)

$$(\mu + \nu_0) \rho^*(\mu, \nu_0) = -\frac{2}{3} \rho(-\mu, \nu_0) + \\ + \mu \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \rho(\mu', \nu_0) \rho^*(\mu, \mu') d\mu' + \nu_0 \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \rho(\mu, \mu') \rho^*(\mu', \nu_0) d\mu', \quad (23)$$

$$(\mu - \nu_0) \rho^*(-\mu, \nu_0) = \\ = \mu \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \rho(\mu', \nu_0) \rho^*(-\mu, \mu') d\mu' - \nu_0 \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \rho(\mu, \mu') \rho^*(-\mu', \nu_0) d\mu', \quad (24)$$

где $\rho(\mu, \mu')$ — усредненная по азимуту индикатриса рассеяния. Решение этих уравнений неединственно, так как соответствующая однородная система, получающаяся отбрасыванием члена $-\frac{2}{3} \rho(-\mu, \nu_0)$ в правой части (23), имеет нетривиальные решения. Непосредственной подстановкой в (23) и (24) легко проверить, что если $\rho^*(\mu, \mu_0)$ — некоторое решение этой системы, то $\rho^*(\mu, \mu_0) + a + b(\mu - \mu_0)$, где a и b — произвольные постоянные, также является решением. Функция $\rho^*(\mu, \mu_0)$, имеющая физический смысл, определяемый разложением (22), должна удовлетворять дополнительным соотношениям

$$\int_{-1}^1 \rho^*(\mu, \nu_0) \mu d\mu = -\frac{2}{3}, \quad (25)$$

$$\int_{-1}^1 \rho^*(\mu, \nu_0) \mu^2 d\mu = \frac{2}{3} \nu_0, \quad (26)$$

вывод которых будет дан немного позже.

Отметим следующие свойства симметрии ρ^* , вытекающие из аналогичных симметрий $\rho_{\pm}$:

$$\rho^*(\mu, \nu_0) = \rho^*(\nu_0, \mu); \quad \rho^*(-\mu, -\nu_0) = \rho^*(\mu, \nu_0). \quad (27)$$

Перейдем непосредственно к выводу консервативных аналогов соотношений, полученных в предыдущем разделе. Подставим в (9) разложения $\rho_{\pm}$ и ρ при $\lambda \rightarrow 1$. Первое из них дается (22), а второе имеет вид (см. [6], гл. II, § 6).

$$\rho(\mu, \mu_0) = \rho_0(\mu, \mu_0) - \frac{4k}{3-x_1} u_0(\mu) u_0(\mu_0) + \dots, \quad i=1, \quad (28)$$

где через ρ_0 и u_0 обозначены функции ρ и u для $i=1$. Воспользовавшись тем, что (см. [6], гл. II, § 5)

$$u_0(\mu) = \frac{3}{4} \left(\mu + 2 \int_0^1 \rho_0(\mu, \mu') \mu'^2 d\mu' \right), \quad (29)$$

$$2 \int_0^1 u_0(\mu) \mu d\mu = 1, \quad (30)$$

после небольших преобразований находим ($\mu > 0$)

$$\rho_0(\mu, \mu_0) = \frac{3}{8} \left[\mu - \rho^*(\mu, \mu_0) + 2 \int_0^1 (\rho^*(-\mu', \mu_0) + \mu') \rho_0(\mu, \mu') \mu' d\mu' \right]. \quad (31)$$

Из (10) аналогичным образом получаем ($\mu \geq 0$).

$$\rho^*(-\mu, \mu_0) = \mu + 2 \int_0^1 (\rho^*(\mu', \mu_0) + \mu') \rho_0(\mu, \mu') \mu' d\mu'. \quad (32)$$

Соотношение (31) есть линейное интегральное уравнение для определения ρ_0 по известному ρ^* . Если, наоборот, считать известным ρ_0 , то (31) и (32) позволяют найти ρ^* для всех μ , $-1 \geq \mu \geq -1$.

Чтобы получить консервативный аналог (20), подставим в это соотношение ρ_0 из (22) и учтем известные разложения (см. [6], гл. II, § 5 и 6).

$$i(\mu) = 1 + \frac{3k}{3-x_1} \mu + O(k^2), \quad (33)$$

$$M = \frac{8k}{3-x_1} + O(k^2), \quad (34)$$

$$u(\mu) = u_0(\mu) \left(1 - \frac{3\gamma}{3-x_1} k \right) + O(k^2), \quad (35)$$

где

$$\gamma = 2 \int_0^1 u_0(\mu) \mu^2 d\mu. \quad (36)$$

Воспользовавшись также (30), получаем окончательно

$$u_0(\mu) = \frac{3}{8} \left[\mu + 2 \int_0^1 (\rho^0(-\mu, \mu') + \mu') u_0(\mu') \mu' d\mu' \right]. \quad (37)$$

Это есть (по-видимому, ранее неизвестное) уравнение Фредгольма для $u_0(\mu)$. Функции ρ^0 и u_0 удовлетворяют также соотношению

$$2 \int_0^1 (\rho^0(\mu, \mu') + \mu') u_0(\mu') \mu' d\mu' = \mu, \quad \mu > 0, \quad (38)$$

получающемуся из рассмотрения членов $O(k)$ в разложении (21) по степеням k .

Приведенные ранее формулы (25) и (26) легко доказать, исходя из (31) и (32). Проинтегрировав по μ от 0 до 1 эти соотношения, умноженные предварительно на μ , и приняв во внимание, что

$$2 \int_0^1 \rho_0(\mu, \mu_0) \mu d\mu = 1, \quad (39)$$

придем к (25). Умножение (31) и (32) на μ^2 и такое же интегрирование дает (26). При преобразованиях следует воспользоваться (29), (37) и (38).

Связь между вспомогательными функциями. Если индикатриса рассеяния $x(\gamma)$ разложена по полиномам Лежандра

$$x(\gamma) = \sum_n x_n P_n(\cos \gamma), \quad (40)$$

то m -ую азимутальную гармонику коэффициента отражения от полупространства $\rho_m^m(\mu, \mu_0)$ можно представить в виде хорошо известного разложения по функциям Амбарцумяна $\rho_n^m(\mu)$, зависящим от одной переменной (см., например, [6], гл. II, § 2). При этом $\rho_n^m(\mu)$ следующим образом выражаются через $\rho_n^m(\mu, \mu_0)$:

$$\rho_n^m(\mu_0) = P_n^m(\mu_0) + 2\mu_0 \int_0^1 \rho_n^m(\mu, \mu_0) P_n^m(-\mu) d\mu, \quad (41)$$

где $P_n^m(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра. В первой части настоящей работы [1] было показано (формула (1.36)), что $\rho_n^m(\mu, \mu_0)$ также можно представить как разложение по некоторым вспомогатель-

ным функциям одной переменной $\varphi_{\pm n}^m(\mu)$, аналогичным функциям Амбарцумяна. Эти функции вводятся соотношением, подобным (41):

$$\varphi_{\pm n}^m(\mu_0) = P_n^m(\mu_0) + 4\mu_0 \int_{-1}^1 \varphi_{\pm}^m(\mu, \mu_0) P_n^m(-\mu) d\mu. \quad (42)$$

Возникает естественный вопрос, каким образом $\varphi_n^m(\mu)$ и $\varphi_{-n}^m(\mu)$ связаны между собой. Ответ на него легко получить, воспользовавшись найденными выше соотношениями между φ_n^m и φ_{-n}^m . Умножая (7) на $4\mu_0 P_n^m(-\mu)$ и (8) — на $4\mu_0 P_n^m(\mu)$, складывая почленно получающиеся равенства и интегрируя результат по μ от 0 до 1, с учетом (41) и (42) после простых преобразований находим

$$\varphi_n^m(\mu) = \varphi_{-n}^m(\mu) - 2\mu \int_0^1 [\varphi_n^m(-\mu', \mu) + (-1)^{n+m} \varphi_n^m(\mu', \mu)] \varphi_n^m(\mu') d\mu'. \quad (43)$$

Это соотношение есть уравнение Фредгольма для нахождения полупрямостранственной характеристики — функции φ_n^m — по считающимся известным функциям $\varphi_{\pm n}^m$ и φ_n^m , описывающим бесконечную среду. Подчеркнем, что каждая из функций φ_n^m определяется при этом независимо от остальных. Насколько нам известно, уравнения (43) в литературе нет.

Между φ_{-n}^m и φ_n^m существует еще одно полезное соотношение.

$$\varphi_{-n}^m(\mu) = \varphi_n^m(\mu) + (-1)^{n+m} 2\mu \int_0^1 \varphi_n^m(\mu', \mu) \varphi_{-n}^m(\mu') d\mu'. \quad (44)$$

Оно выводится из (13) — (14) точно так же, как (43) получается из (7) — (8). Если решение задачи о диффузном отражении от полубесконечной среды (т. е. функции φ_n^m и φ_{-n}^m) считать известным, то это соотношение есть уравнение Фредгольма для φ_n^m .

Консервативный случай заслуживает отдельного рассмотрения, что связано с расходимостью φ_n^m для $m=0$ при $\lambda=1$. Она влечет расходимость φ_0^0 при $\lambda \rightarrow 1$ (все остальные функции $\varphi_{\pm n}^m$ ограничены при $\lambda \rightarrow 1$). Вводя (22) в (42) и учитывая (34), получаем

$$\varphi_{\pm n}^0(\mu) = \frac{3-\lambda}{k} \varphi + \frac{3}{8} \varphi^0(\mu) + o(1), \quad \lambda \rightarrow 1, \quad (45)$$

где обозначено

$$\varphi^0(\mu) = \frac{8}{3} - 4\mu \int_{-1}^1 \varphi^0(\mu, \mu') d\mu'. \quad (46)$$

Можно показать (вывод мы опускаем), что в пределе при $\lambda \rightarrow 1$ (43) переходит в соотношения

$$\varphi_0^0(\mu) = \frac{3}{8} \varphi^*(\mu) + \frac{3}{4} \mu \int_0^1 [\rho^*(-\mu', \mu) + \rho^*(\mu', \mu) + 2\mu'] \varphi_0^0(\mu') d\mu', \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \varphi_n^0(\mu) = \varphi_{-n}^0(\mu) + \frac{3}{4} \mu \int_0^1 [\rho^*(-\mu', \mu) + \mu' + (-1)^n (\rho^*(\mu', \mu) + \\ + \mu')] \varphi_n^0(\mu') d\mu', \quad n > 0, \end{aligned} \quad (48)$$

а вместо (44) при $\lambda = 1$ мы имеем

$$\dot{\varphi}^*(\mu) = -\frac{16}{3} \varphi_2^0(\mu) + 2\mu \int_0^1 \rho_0(\mu', \mu) \dot{\varphi}^*(\mu') d\mu', \quad (49)$$

$$\varphi_{-n}^0(\mu) = \varphi_n^0(\mu) + (-1)^n 2\mu \int_0^1 \rho_0(\mu', \mu) \varphi_{-n}^0(\mu') d\mu', \quad n > 0. \quad (50)$$

Из (46), между прочим, следует, что

$$\int_0^1 \varphi^*(\mu) \mu d\mu = 0, \quad (51)$$

а с помощью (48) можно показать, что ($k = 1, 2, \dots$)

$$\int_0^1 \varphi_{-2k}^0(\mu) \mu d\mu = 0, \quad (52)$$

$$\int_0^1 \varphi_{-2k+1}^0(\mu) d\mu = 0. \quad (53)$$

Изотропное рассеяние. В качестве иллюстрации рассмотрим простейший частный случай изотропного рассеяния. Обозначим

$$H(\mu) = \varphi_0^0(\mu), \quad H_-(\mu) = \varphi_{-0}^0(\mu). \quad (54)$$

Как хорошо известно, при изотропном рассеянии

$$\rho(\mu, \mu_0) = \frac{\lambda}{4} \frac{H(\mu) H(\mu_0)}{\mu + \mu_0}. \quad (55)$$

В первой части работы показано (формула (1.49)), что $\rho_{\pm}$ в этом случае можно представить в форме

$$\rho_{\pm}(\pm \mu, \mu_0) = \frac{\lambda}{8} \frac{H_{\pm}(\mu) \pm H_{\pm}(\mu_0)}{\mu \pm \mu_0}, \quad \mu \geq 0. \quad (56)$$

Пользуясь этим, из (43) получаем для полупространственной H -функции следующее уравнение Фредгольма:

$$H(\mu) = H_{\infty}(\mu) - \mu \int_0^1 K(\mu, \mu') H(\mu') d\mu', \quad (57)$$

где

$$K(\mu, \mu') = K(\mu', \mu) = \frac{\lambda}{2} \frac{\mu H_{\infty}(\mu) - \mu' H_{\infty}(\mu')}{\mu^2 - \mu'^2}, \quad (58)$$

а (44) принимает вид

$$H_{\infty}(\mu) = H(\mu) + \mu H(\mu) \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{H(\mu')}{\mu + \mu'} H_{\infty}(\mu') d\mu'. \quad (59)$$

Отметим следующее интегральное соотношение, связывающее H и H_{∞} :

$$\int_0^1 H(\mu) (1 - \sqrt{1 - \lambda}) H_{\infty}(\mu) d\mu = 0. \quad (60)$$

Получить его можно, например, из (59), положив $\mu = \infty$.

Консервативным пределом (57) служит уравнение [8]

$$H_0(\mu) = 1 + \sqrt{3} \mu + \int_0^1 K^*(\mu, \mu') H_0(\mu') d\mu', \quad (61)$$

где

$$K^*(\mu, \mu') = K^*(\mu', \mu) = \frac{1}{2} \frac{\mu r_0(\mu') - \mu' r_0(\mu)}{\mu - \mu'}. \quad (62)$$

Здесь через $H_{\infty}(\mu)$ обозначена функция $H(\mu)$ для $\lambda = 1$, а $r_0(\mu)$ определено согласно (1.60) при $\lambda = 1$. Это уравнение проще всего получить как частный случай (37) (в [8] оно было найдено совсем другим путем). Действительно, согласно (1.62)

$$H_{\infty}(\mu) = \frac{3}{k} \mu + 1 - 3\mu^2 + 2r_0(\mu) + O(k), \quad \lambda \rightarrow 1, \quad (63)$$

что в комбинации с (56) и (22) дает

$$\rho^*(-\mu, \mu_0) = \mu + \mu_0 - \frac{2}{3} \frac{r_0(\mu) - r_0(\mu_0)}{\mu - \mu_0}, \quad \mu \geq 0. \quad (64)$$

Введем это в (37) и воспользуемся тем, что $u_c(\mu) = \sqrt{3} H_0(\mu)/4$. Преобразуя получающееся уравнение с помощью вытекающего из него при $\mu=0$ соотношения

$$\frac{1}{2} \int_0^1 r_0(\mu) H_0(\mu) d\mu = \sqrt{3} q(\infty) - 1, \quad (65)$$

где

$$q(\infty) = 0.710446... = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^1 H_0(\mu) \mu^2 d\mu, \quad (66)$$

мы и приходим к (61).

Астрономическая обсерватория
Ленинградского университета

RADIATION TRANSFER IN AN INFINITE ATMOSPHERE. II

V. V. IVANOV

The interrelations are studied between four typical angular distributions of intensity in plane infinite and semiinfinite media. These angular distributions correspond to the cases when the source and the detector of radiation are in the same plane (for semiinfinite medium, at the boundary) and when they are infinitely separated. This enabled, in particular, to obtain from physical considerations previously unknown Fredholm equations for the boundary intensity $u(\mu)$ in the Milne problem and for Ambartsumian's functions $F_2^{\pm}(\mu)$. The consideration is based on the possibility of splitting an infinite medium into two adjacent half-spaces.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Иванов, *Астрофизика*, **10**, 193, 1974.
2. I. Kusler, S. Pahor, *Ap. J.*, **143**, 883, 1965.
3. S. Pahor, *Nucl. Sci. Eng.*, **26**, 192, 1956.
4. H. C. van de Hulst, *Bull. Astron. In t. Netherlan ls*, **20**, 77, 1953.
5. В. В. Соболев, *ДАН СССР*, **179**, 41, 1968.
6. В. В. Соболев, *Рассеяние света в атмосферах планет*, Наука, М., 1972.
7. Х. Домкс, В. В. Иванов, *Астрон. ж.*, **52**, 1034, 1975.
8. В. Г. Буславский, *Изв. КрАО*, **35**, 81, 1966.