АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 13 | НОЯБРЬ, 1977 | ВЫПУСК 4

О КОНВЕКЦИИ В ПЕРИОДИЧЕСКОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ. II

Л. Н. ИВАНОВ

Поступила 7 января 1977
Пересмотрена 7 июля 1977

Исследован конвективный поток энергии в условиях периодических по времени изменений ускорения силы тяжести, что встречается в случае цефеид и в компонентах тесных двойных систем звезд при их несинхронном обращении. Показано, что амплитуда и фаза колебаний конвективного потока энергии зависит от соотношения времен тепловой и механической релаксаций конвективных элементов.

Если время механической релаксации меньше времени тепловой релаксации, то фазовое смещение положительно (это имеет место в звездах-карликах поздних спектральных классов). При обратном соотношении времен фазовое смещение отрицательно (это может происходить в случае цефеид).

1. *Основные уравнения*. Периодические изменения гравитационного поля в астрофизических условиях встречаются в цефеидах и при несинхронном обращении в компонентах тесных двойных звезд. Эти изменения, в свою очередь, вызывают вариации потоков энергии, переносимой конвекцией, а также и лучистым путем.

Влияние динамических приливов на конвективную зону звезды-карлика анализировалось в статьях автора [1, 2]. В них использовалась система уравнений, описывающая изменения скоростей и температур конвективных элементов, полученная из полной системы уравнений гидродинамики с применением методики усреднения, предложенной в [3].

Относительная простота ситуации в случае вынужденных приливных колебаний звезд-карликов по сравнению с пульсациями цефеид позволила в [1] получить решение проблемы в аналитическом виде. В настоящей работе основное внимание уделено изучению поведения нестационарного конвективного потока энергии при предположениях, отражающих условия в цефеидах.

Конвективную зону звезды будем моделировать плоским слоем вещества, находящимся в переменном гравитационном поле

$$g = g_0(1 + \varepsilon \cos 2\omega t), \quad \varepsilon < 1. \tag{1}$$

Состояние газового слоя полностью определяется заданием полей скоростей, плотности и температуры. В соответствии с тем, что вещество слоя участвует в двух видах движения — конвективном и пульсационном, эти поля представим в виде двух компонент: усредненной по горизонтали, плавно меняющейся с высотой и наложенными на нее флуктуациями, связанными с конвективными элементами. Таким образом

$$v = \bar{v} + v', \quad p = \bar{p} + p', \quad T = \bar{T} + T' \text{ и т. д.,} \tag{2}$$

где чертой сверху обозначены величины, усредненные по горизонтали, а величины со штрихом обозначают конвективные флуктуации.

Конвективный поток энергии можно выразить так:

$$F_c = \bar{\rho} c_p \overline{v' T'}. \tag{3}$$

Обычно в этой формуле заменяют среднее от произведения флуктуаций скорости и температуры на произведение средних значений абсолютных величин флуктуаций:

$$\overline{v' T'} = \overline{|v'|} \cdot \overline{|T'|} = \bar{v} \cdot \bar{T}. \tag{4}$$

В [1] показано, как из уравнений газодинамики можно получить следующую систему для нахождения $\bar{v}$ и $\bar{T}$:

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = -\frac{\bar{T}}{2\bar{T}\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{\bar{v}^2}{R}, \tag{5}$$

$$\frac{D\bar{T}}{Dt} = \beta \bar{v} - \frac{\chi}{R^2} \bar{T} - \frac{\bar{v}\bar{T}}{R}, \tag{6}$$

где оператор

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\bar{v}\nabla) \tag{7}$$

означает субстанциальную производную, связанную с приливными движениями. Ось z направлена по вертикали. В уравнениях (5), (6) величина R означает характерный размер конвективного элемента, β — сверхадиабатический градиент, χ — коэффициент лучистой температуропроводности.

Правая часть уравнения (5) содержит члены, выражающие действие сил плавучести и турбулентного трения. В правой части уравнения (6) член $\bar{\beta} v$ определяет изменения температуры конвективного элемента в результате его смещения, остальные члены описывают турбулентный и лучистый теплообмен конвективного элемента с окружающей средой.

В случае тесных двойных систем звезд-карликов период изменения $g(t)$ исчисляется по крайней мере часами и намного больше времени механической релаксации конвективной зоны (которое равно нескольким минутам). В этом случае уравнение движения (для функции $\bar{v}$) вырождается в уравнение гидростатического равновесия, т. к. давление в слое сравнительно быстро приспосабливается к новым значениям g:

$$\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{d\bar{p}}{dz} = -g(t). \tag{8}$$

Выражение (8) будет использоваться и в случае цефеид, но под $g(t)$ теперь следует понимать периодическую функцию вида (1), описывающую установившиеся колебания градиента давления в слое. Поскольку основным фактором, определяющим вариации конвективного потока, являются изменения силы плавучести, происходящие вследствие изменений ускорения силы тяжести, величины β, χ, $\bar{T}$, R можно считать постоянными внешними параметрами. Тогда система уравнений (5)—(6) допускает аналитическое решение — она сводится к одному линейному уравнению типа Хилла с переменными коэффициентами (5).

2. *Решение уравнений.* Можно показать, что в режиме стационарных колебаний конвективный поток выражается формулой (1):

$$F_c(t) = 2\bar{\rho} C_p \frac{\bar{T} R^2 \eta^2}{g_0} \frac{[1 + A(t)][1 + B(t)]}{[1 + D(t)]^2}, \tag{9}$$

где

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos 2n\omega t + A_n^* \sin 2n\omega t); \tag{10}$$

$$B(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos 2n\omega t + B_n^* \sin 2n\omega t); \tag{11}$$

$D(t)$ — тригонометрический ряд, аналогичный $A(t)$, величина η определяется выражением

$$\eta = \frac{\chi}{2R^2}\left[-1 + \left(1 + 2\frac{\beta g_0 R^4}{\chi^2 \bar{T}}\right)^{1/2}\right] \tag{12}$$

и практически совпадает со значением инкремента возрастания малых возмущений [4], причем η^{-1} имеет смысл характерного времени, за которое конвекция приспосабливается к изменившимся условиям.

Введем несколько вспомогательных величин:

$$q = \frac{\omega}{\eta}, \qquad \mu = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\chi^2}{4R^2} + \frac{\beta g_0}{2\overline{T}}\right)^{1/2}, \qquad \nu = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\beta g_0}{2\overline{T}}\right)^{1/2},$$
$$\tau_r = \left(\frac{2R^2}{\chi}\right), \qquad \tau_c = \left(\frac{2\overline{T}}{\beta g_0}\right)^{1/2}. \tag{13}$$

Уместно отметить, что величина τ_r выражает время тепловой релаксации (высвечивания) конвективного элемента размера R, а τ_c время его механической релаксации (разгона или торможения).

Инерционные свойства конвекции нагляднее всего проявляются при достаточно быстрых колебаниях ускорения силы тяжести, т. е. при условии

$$\max(\mu,\ 1/\tau_c\omega) < 1. \tag{14}$$

Тогда в формулах (10) и (11) можно ограничиться гармониками частоты 2ω. Используя теорию уравнения Хилла [5], можно получить группу формул для искомых коэффициентов:

$$B_1 = -\frac{\varepsilon}{4}\frac{\nu^2}{1+\mu^2}; \qquad B_1^{*} = \frac{\varepsilon}{4}\frac{\mu\nu^2}{1+\mu^2};$$
$$A_1 = \frac{B_1 + \varepsilon - 2qB_1^{*}}{1+4q^2}; \qquad A_1^{*} = \frac{2q(B + \varepsilon) + B_1^{*}}{1+4q^2}; \tag{15}$$
$$D_1 = \frac{A_1 - A_1^{*}\cdot 2q}{1+4q^2}; \qquad D_1^{*} = \frac{2qA_1 + A_1^{*}}{1+4q^2}.$$

Нетрудно видеть, что все коэффициенты имеют величину порядка ε. Линеаризуя формулу (9), получим

$$F_c(t) = F_c^0[1 + (A_1 + B_1 - 2D_1)\cos 2\omega t + (A_1^{*} + B_1^{*} - 2D_1^{*})\sin 2\omega t]. \tag{16}$$

Для придания наглядности этой формуле рассмотрим два важных частных случая.

Случай I. $\tau_r \gg \tau_c > \omega^{-1}$, т. е. конвективные элементы настолько непрозрачны, что время их высвечивания сильно превышает время механической релаксации.

Выражения для коэффициентов упрощаются:

$$B_1 = -\frac{\varepsilon}{4}\frac{1}{1+q^2}; \qquad B_1^{*} = \frac{\varepsilon}{4}\frac{1}{q(1+q^2)};$$

$$A_1 = \frac{\varepsilon}{4}\frac{1}{1+q^2}; \qquad A_1^{*} = \frac{\varepsilon}{4}\frac{(2q^2+1)}{q(1+q^2)}, \tag{17}$$

$$D_1 = -\frac{\varepsilon}{4}\frac{1}{1+q^2}; \qquad D_1^{*} = \frac{\varepsilon}{4}\frac{1}{q(1+q^2)},$$

после чего имеем

$$F_c(t) = F_c^0\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}\frac{\varepsilon}{2}\cos(2\omega t - \alpha)\right], \tag{18}$$

где α — фазовое смещение, равное

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} q. \tag{19}$$

Очевидно, что при увеличении ω амплитуда колебаний $F_c(t)$ убывает и $\alpha \to \pi/2$.

Случай II. $\tau_\nu \gg \tau_\chi > \omega^{-1}$.
Выражения для коэффициентов:

$$B_1 = -\frac{\varepsilon}{4}\nu^2; \qquad B_1^{*} = \frac{\varepsilon}{4}\mu\nu^2;$$

$$A_1 = \varepsilon\frac{1}{1+4q^2}; \qquad A_1^{*} = \varepsilon\frac{2q}{1+4q^2}; \tag{20}$$

$$D_1 = \varepsilon\frac{1-4q^2}{(1+4q^2)^2}; \qquad D_1^{*} = \varepsilon\frac{4q}{(1+4q^2)^2}.$$

Удерживая в формуле (16) только главные члены, получим:

$$F_c(t) = F_c^0\left[1 + \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{q}\cos(2\omega t - \alpha)\right], \tag{21}$$

причем

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{q}\right). \tag{22}$$

Из формулы (21) следует, что так же, как и в случае I, при увеличении ω происходит уменьшение амплитуды колебаний конвективного потока, однако

$$\lim_{\omega\to\infty} \alpha = -\frac{\pi}{2}. \tag{23}$$

3. *Обсуждение решения.* Представление нестационарного конвективного потока в виде, аналогичном формулам (18) и (21), уже встречалось ранее в литературе [6]. Приведем здесь это выражение, преобразовав с целью сравнения его так, чтобы колебания происходили с частотой 2ω, а не ω, как в оригинале:

$$F_c(t) = F_c^0 \left[1 + \frac{a}{\sqrt{1 + 4(\omega\tau)^2}} \cos(2\omega t - \alpha) \right], \tag{24}$$

где a — амплитуда колебаний конвективного потока, получаемая по формулам для стационарного случая при подстановке в них переменного $g(t)$, иными словами, a — асимптотическое значение амплитуды колебаний при $\omega \to 0$, τ — характерное время релаксации конвективных элементов, определяемое соотношением:

$$\tau \approx \left| \frac{l}{v} \right|, \tag{25}$$

причем l, v — характерные значения размера и скорости элементов.

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}(\omega\tau), \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}. \tag{26}$$

Используем форму записи (24) для уточнения поведения конвективного потока в случаях I и II.

Нетрудно установить на основании формулы (9), что в случае I периодические изменения g с относительной амплитудой ε приводят к колебаниям $F_c^\circ(g(t))$ с амплитудой $\varepsilon/2$. Таким образом, при возрастании q, как видно из выражения (18), амплитуда колебаний потока убывает как q^{-1} (сравнить с $(2q)^{-1}$ в (24)).

В случае II величина $a = 2\varepsilon$, и из (21) следует, что амплитуда убывает как $(4q)^{-1}$. Отметим также, что в случае II смещение фазы происходит в противоположном направлении, по сравнению со случаем I. Такая возможность не предусмотрена в [6].

Выигрышным моментом, по нашему мнению, является и то, что вместо недостаточно точно определяемой величины времени релаксации конвективного элемента τ, как в формуле (24), в (18) и (21) входит величина инкремента возрастания малых возмущений, находимая из линейного анализа.

Очевидно, что эффекты, обусловленные инерционностью конвекции, сильнее всего должны быть выражены вблизи нижней границы конвективной зоны. Именно для этих областей конвективных оболочек легко сделать оценки, используя которые можно решить, какой случай (I или II) реализуется в интересующих нас звездах.

Отметим, что размер конвективных элементов вблизи нижней границы порядка толщины всей конвективной зоны. Следовательно, время их тепловой релаксации хотя и меньше, но сравнимо со временем тепловой релаксации всей конвективной зоны. Как известно, механическая релаксация оболочки происходит за время, порядка требуемого для прохождения звуковой волны со скоростью $c_{зв}$ от одной границы оболочки до другой — $t_{зв}$

$$t_{зв} \approx \frac{H}{c_{зв}} = \frac{R^* T}{\mu g}\sqrt{\frac{\mu}{R^* T \gamma}} = \frac{1}{g}\sqrt{\frac{R^* T}{\gamma \mu}}. \tag{27}$$

Здесь H — высота однородной атмосферы, μ — молекулярный вес, R^* — газовая постоянная, γ — показатель адиабаты. С другой стороны

$$\tau_e = \sqrt{\frac{2\bar{T}}{\beta g}} = \frac{1}{g}\left(\frac{A \cdot 2\gamma}{\gamma - 1}\frac{R^* \bar{T}}{\mu}\right)^{1/2}, \tag{28}$$

где

$$A = \left|\frac{1}{\beta}\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad}\right|. \tag{29}$$

Здесь $(dT/dz)_{ad}$ — адиабатический температурный градиент. В конвективной зоне температурный градиент близок к адиабатическому, следовательно

$$\frac{\tau_e}{t_{зв}} = \sqrt{\frac{A}{\gamma - 1}} \gg 1. \tag{30}$$

В цефеидах времена тепловой и механической релаксации конвективной зоны близки по величине. Тогда на основании (30) получаем, что $\tau_e > \tau_T$, т. е. реализуется случай II.

В звездах-карликах, в частности в компонентах тесных двойных систем время тепловой релаксации конвективной зоны на много порядков превышает время установления механического равновесия, поэтому

$$\tau_T > \tau_e, \tag{31}$$

ибо неравенство (30) не может изменить этого соотношения. Следовательно, здесь условия соответствуют случаю I.

В заключение отметим, что важность учета инерционных свойств конвекции в цефеидах отмечалась в [6]. Содержащиеся там численные оценки, применительно к моделям пульсирующих звезд, свидетельствуют о том, что ожидаемое фазовое смещение может превышать величину $\pi/4$, а амплитуда колебаний конвективного потока может быть подавлена в несколько раз.

Ленинградский государственный университет

ON CONVECTION IN A PERIODICAL GRAVITATION FIELD. II

L. N. IVANOV

Expressions for convective energy flux in an atmosphere with periodical changes of the gravitation field are obtained in the mixing-length approximation. This regime of convection is encountered in the components of close binary systems and in the cepheids. The energy flux is determined by the ratio of the kinematical τ_v and radiative τ_r time scales of convection. In the case of a red dwarf $\tau_v \gg \tau_r$, and phase shift of the convective flux oscillation is positive. For the cepheids $\tau_v > \tau_r$, and the shift is negative.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Н. Иванов*, Астрофизика, 7, 1, 144, 1971.
2. *Л. Н. Иванов*, Вестн. ЛГУ, № 13, 126, 1972.
3. *W. Unno*, P. A. S. J., 19, 2, 140, 1967.
4. *P. Ledoux, M. Schwarzchild, E. Spiegel*, Ap. J., 133, 1, 184, 1961.
5. *Э. Уиттекер, Д. Ватсон*, Курс современного анализа, ч. 2, 1963.
6. *J. P. Cox, A. N. Cox, K. H. Olsen, D. S. King, D. D. Eilers*, Ap. J., 144, 3, 1038, 1966.