АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 13 НОЯБРЬ, 1977 ВЫПУСК 4

НЕЛИНЕЙНЫЕ БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ ЗВЕЗДНОЙ ПЛОТНОСТИ В МОДЕЛИ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

С. Н. НУРИТДИНОВ

Поступила 11 мая 1977

Показано существование нелинейной бегущей волны плотности в модели звездной системы с постоянной фазовой плотностью. В системе координат, движущейся вместе с волной, найдена зависимость длины волны от амплитуды. Установлено, что с ростом фазовой скорости область существования нелинейных бегущих волн сужается. Бегущая волна, в отличие от стационарной, не распадается на отдельные сгустки. Однако она неустойчива по отношению к разбиению волны на пакеты и самосжатию волновых пакетов

В работе [1] нами была изучена нелинейная стационарная волна плотности с фазовой скоростью $v_p = 0$ в модели звездной системы в виде сильно сплюснутого однородного эллипсоида вращения. Было найдено, что нелинейность действует дестабилизирующим образом до некоторого порога устойчивости, после которого волна распадается на последовательность коллапсирующихся сгустков, образуя затем устойчивую систему в целом. Теперь же возникает естественный вопрос: существует ли нелинейная бегущая волна звездной плотности и, если да, то в чем заключается ее отличие от стационарной волны. С этой целью в данной работе рассматривается общий случай $v_p \neq 0$ в вышеуказанной модели бесстолкновительной звездной системы.

1. Пусть в исходном состоянии эффект звездной плотности сбалансирован центробежной силой, с одной стороны, и силой тяготения, с другой. Тогда при предположении, что возмущение имеет длину волны существенно меньшую, чем характерная толщина модели, справедлива следующая система уравнений эволюции фазовой границы [1]:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + (v_0 + \xi)\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} + (-v_0 + \xi_1)\frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\gamma_1 \Omega^2 (\xi - \xi_1), \quad (\Omega^2 \equiv 4\pi G m). \tag{3}$$

Здесь $\xi(x, t)$ и $\xi_1(x, t)$ — отклонения, соответственно, от прямых $v = v_0$ и $v = -v_0$ ($v_0 = \text{const}$) на фазоной плоскости, φ — возмущение гравитационного потенциала, $\gamma_1 = \text{const}$ — значение фазовой плотности и m — масса отдельной звезды. Система уравнений (1)—(3) в линейном приближении дает дисперсионное уравнение

$$\omega_0^2 = k^2 v_0^2 - 2 v_0 \gamma_1 \Omega^2, \tag{4}$$

где ω_0 и k — частота и волновой вектор соответственно.

Из (4) находим фазовую скорость волны

$$v_p^0 = \sqrt{v_0^2 - \frac{2 v_0 \gamma_1}{k^2}\Omega^2} \leqslant v_0 \tag{5}$$

и длину бегущей волны в линейном приближении

$$\lambda_0 = \lambda_{\text{дж}} \sqrt{1 - v_p^2/v_0^2}, \qquad \lambda_{\text{дж}} = \frac{\pi}{\Omega}\sqrt{\frac{2v_0}{\gamma_1}}, \tag{6}$$

где $\lambda_{\text{дж}}$ — аналог критической длины Джинса. Согласно (6) $\lambda_0 < \lambda_{\text{дж}}$, что указывает на существование нелинейной бегущей волны.

Найдем периодическое решение (1)—(3) в виде бегущей волны. Пусть, для определенности, фазовая скорость нелинейной волны $v_p \geqslant 0$. Перейдем к системе координат, движущейся вместе с волной. Это значит, что в (1) и (2) $\partial/\partial t = -v_p(\partial/\partial x)$. Здесь под x подразумевается разность $x - v_p t$. Тогда решения уравнений (1) и (2), соответственно, равны

$$\xi = -v_0 + v_p \pm \sqrt{(v_0 - v_p)^2 + 2\varphi + c}, \tag{7}$$

$$\xi_1 = v_0 + v_p - \sqrt{(v_0 + v_p)^2 + 2\varphi + c_1}, \tag{8}$$

где c и c_1 — постоянные интегрирования. Из физического смысла ξ следует, что в (7) знак плюс соответствует случаю $0 \leqslant v_p \leqslant v_0$, а минус — случаю $v_p > v_0$. Последнее, как будет видно ниже, не удовлетворяет условию периодичности волны. Для (7) и (8) предположение о неизменности импульса возмущенной системы (см. (12) в [1]) опять-таки дает нам равенство $c = c_1$. Так исключается тривиальное решение типа сдвига системы как целого.

Вводя обозначение $u = \varphi + c/2$, перепишем (3) с учетом (7) и (8):

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\gamma\Omega^2\left[-2v_0 + \sqrt{2u + (v_0 + v_p)^2} \pm \sqrt{2u + (v_0 - v_p)^2}\,\right]. \tag{9}$$

Это уравнение можно интерпретировать как уравнение нелинейного осциллятора с потенциальной энергией

$$W_\pm(u) = \gamma\Omega^2\left\{-2v_0u + \frac{1}{3}[2u + (v_0 + v_p)^2]^{3/2} \pm \frac{1}{3}[2u + (v_0 - v_p)^2]^{3/2}\right\}. \tag{10}$$

Периодические решения (9) существуют при условии, если $d^2W/du^2 < 0$, что равносильно наличию потенциальной ямы. Данному условию удовлетворяет лишь функция $W_+(u)$. Поэтому в (9) во всем дальнейшем берется только знак плюс, считая $0 \leqslant v_p \leqslant v_0$.

Пусть a и b — соответственно, максимальное и минимальное значения функции $u(x)$. Так же, как в [1], в качестве амплитуды волны возьмем a. Тогда из (9) легко найти зависимость длины нелинейной бегущей волны от амплитуды

$$\lambda(a) = \sqrt{2}\int_b^a \frac{du}{\sqrt{W_+(a) - W_+(u)}}, \tag{11}$$

причем

$$W_+(a) = W_+(b), \qquad -\frac{(v_0 - v_p)^2}{2} \leqslant b \leqslant 0. \tag{12}$$

При заданных v_p и b с помощью (11) и (12) определяется a и соответствующее ей значение λ. Однако зависимость λ от a можно легко представить себе и из качественных соображений.

2. Согласно (12), при $v_p \neq 0$ область периодических колебаний ограничена:

$$0 \leqslant a \leqslant a_m, \quad W_*(a_m) = W_*\left[-\frac{(v_0 - v_p)^2}{2}\right], \tag{13}$$

где a_m — максимально возможное значение a для данного v_p. Как видно из (6), (10) и (13), с ростом v_p значения длины волны, функции $W_*(u)$ и a_m постепенно уменьшаются. Таким образом, по мере приближения v_p к v_0 область существования нелинейных бегущих волн звездной плотности соответственно сужается, и когда $v_p = v_0$ значения $a_m = a = b = 0$, $\lambda = 0$. Очевидно для всякого $v_p: 0 < v_p < v_0$ в интервале $(0, a_m]$ нелинейность, как и в случае $v_p = 0$, действует дестабилизирующим образом.

Остановимся теперь на эффекте самовоздействия волны с собой. Известно [1], что нелинейная стационарная волна неустойчива относительно этого эффекта и при некотором значении амплитуды распадается на отдельные сгустки. В отличие от нее, бегущая волна не распадается. Действительно, для распада плотность возмущенной системы

$$\rho(x, t) = \gamma\left[\sqrt{2u + (v_0 + v_p)^2} + \sqrt{2u + (v_0 - v_p)^2}\right] \tag{14}$$

при каком-либо значении u должна равняться нулю. Однако, если $v_p \neq 0$, выражение (14) никогда не обращается в нуль.

3. Тем не менее, эффект самовоздействия имеет место и в случае бегущей волны, но приводит к разбиению ее на пакеты и самосжатии волновых пакетов. В [2] такая неустойчивость называется модуляционной. Ее критерий, найденный Лайтхиллом [3], выражается неравенством

$$\frac{d^2\omega_0}{dk^2}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial a^2}\right)_{a=0} < 0, \tag{15}$$

где $\omega(k, a) = 2\pi v_p/\lambda(a)$ — частота нелинейной волны. Данному критерию удовлетворяет и волна звездной плотности (11).

Для проверки этого факта заметим, что

$$\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial a^2}\right)_{a=0} = -2\pi v_p\left(\frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2\lambda}{da^2}\right)_{a=0}. \tag{16}$$

Согласно (4) и (6),

$$\frac{d^2\omega_0}{dk^2} = -\frac{\pi v_0^2\Omega^2}{4}\left(\frac{\lambda_0}{\pi v_p}\right)^3 < 0, \tag{17}$$

так что остается лишь показать, что $d^2\lambda/da^2 < 0$.

С этой целью разложим функцию $W_+(u)$ по степеням u до членов четвертого порядка включительно, так как другие члены более высокого порядка не будут содержаться в коэффициенте, стоящем перед a^2 в разложении $\lambda(a)$. Затем, составляя разность $W_+(a) - W_+(u)$, сделаем подстановку $u = (a+b)/2 - (a-b)y/2$. Получим

$$\lambda(a) = 4\sqrt{\frac{6}{\eta v_0}}\,\frac{n^{5/4}}{\Omega}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{F(y,a)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy, \tag{18}$$

причем

$$F(y,a) = [\bar{m}(a-b)^2 y^2 + 2(\bar{m}a^2 - \bar{m}b^2 + bp - ap)\,y + \bar{m}(a+b)^2 + 4q]^{-1/2}, \tag{19}$$

где введены следующие обозначения:

$$\bar{m} = 3(v_0^4 + 10v_0^2 v_p^2 + 5v_p^4), \qquad p = -\bar{m}(a+b) + 4n(v_0^2 + 3v_p^2),$$

$$n = (v_0^2 - v_p^2)^2, \qquad q = \bar{m}(a^2 + ab + b^2) - 4n(a+b)(v_0^2 + 3v_p^2) + 12n^2.$$

Из (18) легко вычислить

$$\left(\frac{d^2\lambda}{da^2}\right)_{a=0} = -\frac{\pi\sqrt{2}\,(4v_0^4 + 51v_0^2v_p^2 + 9v_p^4)}{18\,\Omega\sqrt{\eta v_0}\,n^{7/4}}, \tag{20}$$

которое всегда отрицательно. Итак, волна плотности (17) модуляционно неустойчива. Поскольку бегущая волна не распадается на отдельные сгустки, то, возможно, она стабилизируется другими нелинейными эффектами.

Отметим, что нелинейные явления тесно связаны с принудительным фазовым перемешиванием, которое происходит в сильно нестационарных звездных системах [4, 5]. Из (9) видно, что в бегущей волне плотности

$$\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_{a=-\frac{(v_0-v_p)^2}{2}} = \infty, \tag{21}$$

т. е. в указанной точке теряется аналитичность функции $u(x)$. Это значит, что после достижения значения амплитуды $a = a_m$ сразу происходит опрокидывание бегущей волны, аналогичное возникновению ударных волн в газодинамике и физике плазмы [2]. Данное опрокидывание приводит к принудительному фазовому перемешиванию. Отсюда ясна и причина невозможности распада бегущей волны (11). Для распада требуется достаточно большая амплитуда. Однако тогда волна опрокидывается и появляется многозначность в фазовом пространстве, приводящая к перемешиванию и, вообще говоря, к уменьшению амплитуды.

В заключение выражаю свою признательность В. А. Антонову за полезные обсуждения и внимание к данной работе.

Астрономический институт
АН УзССР

NON-LINEAR RUNNING WAVES OF STELLAR DENSITY IN MODEL OF A HOMOGENEOUS MEDIUM

S. N. NURITDINOV

The existence of non-linear running waves of stellar density in the model with a constant phase density is proved. The dependence of the wavelength from the amplitude in a coordinate system with respect to which the wave is at rest is found. It has been established that with the increase of the phase velocity the region of existence of the non-linear running waves becomes narrow. The running waves contrary to the stationary ones do not desintegrate into a number of parts. However, it is unstable in relation to the division of the wave into packets and self-compression of the wave packets.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Н. Нуритдинов*, Астрофизика, 11, 135, 1975.
2. *Б. Б. Кадомцев, В. И. Карпман*, УФН, 103, 193, 1971.
3. *M. J. Lighthill*, Jour Instit. Math. Appl., 1, 269, 1965.
4. *В. А. Антонов, С. Н. Нуритдинов, Л. П. Осипков*, в сб. «Динамика галактик и звездных скоплений», Наука, КазССР, Алма-Ата, 1973, стр. 55.
5. *D. Lynden-Bell*, M. N., 136, 101, 1967.