АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 13 АВГУСТ, 1977 ВЫПУСК 3

АВТОМОДЕЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ ДЛЯ АККРЕЦИИ СО СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ С УЧЕТОМ ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ

Я. М. КАЖДАН, А. Е. ЛУЦКИЙ

Поступила 22 июля 1976
Пересмотрена 1 июля 1977

В работе получено автомодельное нестационарное решение задачи о сферической аккреции в гравитирующем поле точечной массы. На бесконечности и в центре заданы постоянные конечные потоки масс — A_{∞} и $-A_0$, причем $-A_{\infty} > -A_0$. Учитывается градиент давления во всем пространстве. Соответствующее решение найдено для значения показателя адиабаты $\varkappa=5/3$.

Автомодельные решения с нестационарным потоком аккреции газа в гравитационном поле точечной массы представляют существенный интерес, поскольку они дают возможность строить астрофизические модели, более близкие к реальным условиям, когда изменяется, например, плотность межзвездного газа [1].

Существует несколько работ, где строятся соответствующие автомодельные решения при различных предположениях [2—4]. Общим для этих работ является предположение, что газ перед фронтом ударной волны находится в состоянии свободного падения, т. е. пренебрегается вкладом, вносимым в течение градиентом давления перед волной.

Между тем, в автомодельном движении, построенном в настоящей работе, где учитывается градиент давления перед волной, он оказался того же порядка, что и ускорение при свободном падении:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho}\sim\frac{GM}{r^2}.$$

В работах [3, 4] строятся соответствующие автомодельные решения со сферической симметрией, с заданным распределением плотности на бесконечности $\rho\sim r^{-w}$, в режиме свободного падения перед фронтом ударной волны, причем поток аккреции A ($A = r^2 u\rho$) на бесконечности $A_\infty \sim r^{3/2-\omega}$, а в центре — $A_0 \sim t^{1-2/3\omega}$, где t — время, отсчитываемое от момента выхода из гравитирующего центра ударной волны.

В предлагаемой работе находится автомодельное решение для сферической аккреции в гравитационном поле точечной массы M, расположенной в начале координат, с отличным от нуля градиентом давления во всем пространстве, включая область перед фронтом ударной волны с заданными конечными постоянными значениями потоков масс как на бесконечности, так и в гравитирующем центре A_∞ и A_0, причем $A_\infty/A_0 = n > 1$.

Соответствующее течение описывается газодинамической системой уравнений:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 u\rho)}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{GM}{r^2} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(p\rho^{-\varkappa})}{\partial t} + u\frac{\partial(p\rho^{-\varkappa})}{\partial r} = 0$$

и уравнением состояния

$$p\rho^{-\varkappa} = S. \tag{2}$$

Здесь ρ — плотность, u — скорость, p — давление, r — расстояние от начала координат, t — время, отсчитываемое от момента выхода из центра ударной волны, G — гравитационная постоянная, M — сосредоточенная в начале координат гравитирующая масса, S — энтропийная величина.

Поток, идущий из бесконечности, предполагается стационарным. Одномерное стационарное течение всегда изэнтропично. Поэтому для идущего из бесконечности потока имеем

$$S = S_\infty = \text{const}. \tag{3}$$

Поскольку в настоящей работе рассматриваются автомодельные решения, то газодинамические функции для стационарного потока представляются в виде некоторых степеней r. Если давление отлично от нуля, то, как следует из системы (1), это возможно лишь при значении показателя $\varkappa = 5/3$. Все дальнейшее исследование будет проведено для этого значения $\varkappa$.

Газодинамические величины, соответствующие стационарному течению, выглядят следующим образом:

$$\rho = \rho_0 r^{-3/2}, \quad p = p_0 r^{-5/2}, \quad u = u_0 r^{-1/2}. \tag{4}$$

Постоянные ρ_0, p_0, u_0 определяются значениями потока A_∞, энтропии S_∞ и соотношением, следующим из уравнения движения.

В частности, стационарный поток, идущий из бесконечности, определяется следующими формулами:

$$\rho = -\frac{A_\infty}{\sqrt{GM}} C r^{-3/2},$$

$$p = -\frac{2}{5} A_\infty \sqrt{GM}\, C\left(1 - \frac{1}{2C^2}\right) r^{-5/2}, \tag{5}$$

$$u = -\frac{1}{C}\sqrt{GM}\, r^{-1/2},$$

параметр C определяет число Маха потока.

При заданных значениях A_∞, S_∞ величина C является корнем уравнения:

$$\frac{2}{5} C^{-2/3}\left(1 - \frac{1}{2C^2}\right) = (-A_\infty)^{2/3} S_\infty. \tag{6}$$

В автомодельном течении все газодинамические функции могут быть представлены в виде произведения размерных величин на безразмерные функции от безразмерной переменной:

$$u = \frac{r}{t} U(\eta); \qquad \rho = -\frac{A_0 t}{r^3} R(\eta); \qquad p = -\frac{A_0}{rt} P(\eta), \tag{7}$$

где $\eta = Lr^k/t$; A_0 — поток в центре.
Из этого представления следует, что

$$u = \frac{1}{L} r^{1-k} U(\eta)\,\eta; \quad \rho = -A_0 L r^{k-3} \frac{R(\eta)}{\eta}; \quad p = -\frac{A_0}{L} r^{-(k+1)} P(\eta)\,\eta. \tag{8}$$

Поскольку в области стационарного течения газодинамические функции не зависят от t и, следовательно, от η, то из сравнения (5) и (8) следует, что $k = 3/2$. Итак, безразмерная величина η может быть представлена в следующем виде:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{GM}} \frac{r^{3/2}}{t}. \tag{9}$$

В силу различия потоков в центре A_0 и на бесконечности A_∞ область течения должна разделяться на две части сферической ударной волной. Вследствие автомодельности фронт ударной волны должен совпадать с линией

$$\eta = \eta_s = \text{const}.$$

При этом течение за фронтом во внутренней области не может быть стационарным, ибо из условий на ударной волне следовало бы, что отношение плотностей перед фронтом и за фронтом равнялось бы отношению потоков, т. е. было бы больше единицы, что невозможно. Следовательно, течение за фронтом должно быть нестационарным. Это течение может быть определено путем интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$
\begin{gathered}
R'\eta - \frac{3}{2}(UR)'\eta - R = 0, \\
\left(\frac{3}{2}U - 1\right)U'\eta + \frac{3}{2}\frac{P'}{R}\eta + U^2 - U - \frac{P}{R} + \frac{1}{\eta^2} = 0, \\
\left(1 - \frac{3}{2}U\right)\left[(PR^{-5/3})'\eta + \frac{8}{3}(PR^{-5/3})\right] = 0,
\end{gathered}
\tag{10}
$$

которая получается в результате подстановки функций (7) в систему (1).

Искомое решение должно удовлетворять условиям на фронте ударной волны и условию

$$
\begin{gathered}
(RU) \to -1, \\
\eta \to 0.
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Последнее означает, что поток в центре должен равняться A_0.

Система (10) имеет первый интеграл

$$
PR^{-5/3} = B\eta^{-8/3}, \quad B = \text{const}. \tag{12}
$$

Интеграл (12) позволяет свести систему (10) к системе двух уравнений относительно функций $U(\eta)$, $f(\eta)$:

$$
\begin{gathered}
fU'\eta - \left(1 - \frac{3}{2}U\right)f'\eta + 2f(2U - 1) = 0, \\
\left(1 - \frac{3}{2}U\right)U'\eta - \frac{9}{4}f'\eta + U(1 - U) - 3f - \frac{1}{\eta^2} = 0,
\end{gathered}
\tag{13}
$$

где

$$
f = \frac{5}{3}\frac{P}{R}. \tag{14}
$$

Асимптотика решений системы (13) при $\eta \to 0$ (т. е. в окрестности центра) имеет вид:

$$U \approx -K\eta^{-1} + D\eta^{-1/3} + \cdots$$
$$f \approx \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2}K^2\right)\eta^{-2} + G\eta^{-4/3} + \cdots \quad (15)$$

Формулы (15) показывают, что, хотя течение за фронтом не является стационарным, но стационарное решение дает главный член асимптотики при $\eta \to 0$.

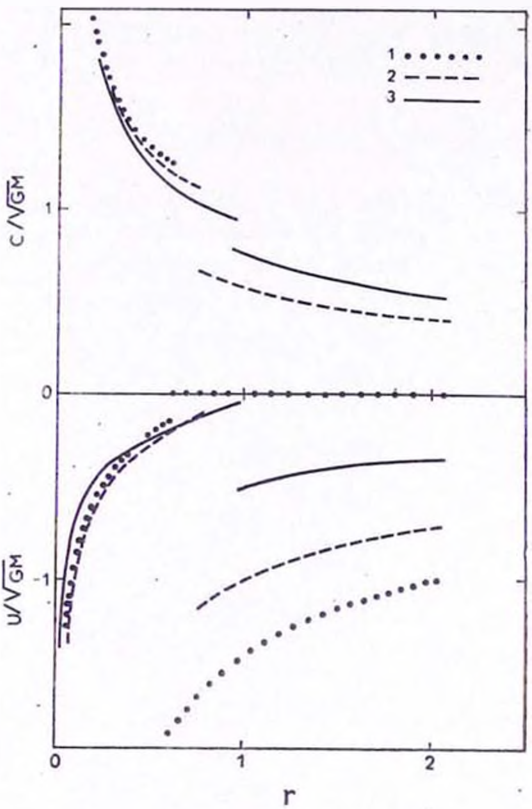

Рис. 1.

Очевидно, что условие (11) выполняется при любом значении K. Постоянная B в интеграле (12) определяется формулами (15):

$$B = \frac{2}{5}K^{2/3}\left(1 - \frac{1}{2}K^2\right). \quad (16)$$

Условия на фронте ударной волны, идущей по стационарному потоку (5), в силу представления (7), интеграла (12), соотношения (16) и замены (14) могут быть записаны в следующей форме:

$$\left(\frac{2}{3}-U(\eta_s)\right)\left[\frac{2}{5}\left(1-\frac{1}{2C^2}\right)\eta_s^{-2}+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{C\eta_s}\right)\left(U(\eta_s)+\frac{1}{C\eta_s}\right)\right]=$$

$$=\frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{C\eta_s}\right)f(\eta_s),$$

$$K^{-2/3}f(\eta_s)\left[\frac{2}{3}-U(\eta_s)\right]^{2/3}=\frac{2}{3}(Cn)^{2/3}\left(1-\frac{1}{2}K^2\right)\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{C\eta_s}\right)^{2/3}\eta_s^{-2}\quad(17)$$

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{C\eta_s}\right)f(\eta_s)\left[\frac{3}{C\eta_s}-6+12\,U(\eta_s)\right]+$$

$$+\eta_s^{-2}\left(\frac{2}{3}-U(\eta_s)\right)\left(1-\frac{1}{2C^2}\right)\left[4+\frac{8}{C\eta_s}+2U(\eta_s)\right]=0.$$

Величина C известна, коль скоро заданы энтропия и поток в стационарном течении перед фронтом. Величины K, η_s подлежат определению. Величина K должна быть такой, чтобы решение системы (13) с начальными данными η_s, $U(\eta_s)$, $f(\eta_s)$, удовлетворяющими соотношениям (17), имело асимптотику (15) с этим значением K при $\eta\to 0$. При этом, поскольку $f(\eta)>0$ и энтропия при переходе через ударную волну возрастает, необходимо выполнение следующих неравенств:

$$K<\sqrt{2};\qquad K^{2/3}\left(1-\frac{1}{2}K^2\right)>(nC)^{-2/3}\left(1-\frac{1}{2C^2}\right).\qquad(18)$$

Перечисленные условия позволяют по заданным значениям n, C однозначно определить величины K, η_s.

Величины K, η_s и соответствующее течение за фронтом были рассчитаны для следующих вариантов:

1. $C=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $n=2$, $K=0.3183$, $\eta_s=0.47569$,
2. $C=1$, $n=2$, $K=0.3285$, $\eta_s=0.64653$,
3. $C=2$, $n=2$, $K=0.2257$, $\eta_s=0.95120$.

Первый вариант отвечает стационарному течению перед фронтом с нулевым давлением. Этот вариант соответствует решению, построенному в работе [4] для $\omega=3/2$.

Второй вариант отвечает стационарному сверхзвуковому течению перед фронтом с переменным давлением.

Третий вариант соответствует дозвуковому стационарному течению перед фронтом. Для этих вариантов приведены графики распределения скорости звука и скорости течения на момент времени $t=1/\sqrt{GM}$.

Авторы признательны А. В. Забродину за постановку задачи, Я. Б. Зельдовичу, К. И. Бабенко, А. Г. Дорошкевичу, В. С. Имшеннику, Д. К. Надежину за обсуждение результатов, М. С. Гавреевой—за оформление работы.

Институт прикладной математики
АН СССР

SELFSIMILAR FLOW FOR ACCRETION WITH A SPHERICAL SYMMETRY TAKING ACCOUNT THE PRESSURE GRADIENT

Ya. M. KAZHDAN, A. Ye. LUTSKY

A selfsimilar time-dependent solution of the problems on spherical accretion in the gravitating field of a point mass is obtained. The constant finite mass fluxer $-A_\infty$ and $-A_0$ are given at infinity and in the centre, and moreover $-A_\infty > -A_0$.

The pressure gradient is taken into account in the whole space. The correspondent solution is found for the value of adiabate exponent $\varkappa = 5/3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков,* Теория тяготения и эволюция звезд. Наука, М., 1971.
2. *Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович, Д. К. Надежин,* Астрон. ж., 16, 393, 1972.
3. *S. Sakashita,* Astrophys. Space Sci., 26, 183, 1974.
4. *S. Sakashita, M. Yokosawa,* Astrophys. Space Sci., 31, 251, 1974.