ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 67, №2, 2014 Механика
УДК 539.3

О ФЛАТТЕРЕ УПРУГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ, ОБТЕКАЕМОЙ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА, НАБЕГАЮЩИМ НА ЕЁ СВОБОДНЫЙ КРАЙ

Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.

Ключевые слова: устойчивость упругой прямоугольной пластинки, дивергенция, локализованная дивергенция, флаттер, сверхзвуковое обтекание
Key words: the stability of an elastic rectangular plate, the divergence, the localized divergence, flutter, supersonic gas flow

Բելուբեկյան Մ.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ռ.

Ուղղանկյուն սալի ֆլատերի մի խնդրի մասին, որի ազատ եզրին գերձայնային գազի հոսքը վրավազք է կատարում

Դիտարկված է գերձայնային գազի հոսքում ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդիր: Հոսքը ուղղված է ազատ եզրից դեպի հակադիր հոդակապորեն ամրակցված եզրը զուգահեռ մյուս երկու հոդակապորեն ամրակցված եզրերին: Ցույց է տրված դիվերգենցիայի և ֆլատերի առաջացման հնարավորությունը:
Գտնված են գազի հոսքի կրիտիկական արագության արժեքները:

Belubekyan M.V., Martirosyan S.R.

On the problem of the flutter of an elastic rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edge

The linear problem of the dynamic stability of an elastic rectangular plate in a supersonic flow of gas is investigated. The flow is in a direction from the free edge to on the contrary hinge joint supported edge, and at the other two edges parallel to the flow are hinge joint supported. Its solution shows that the divergence or the localized divergence and the flutter are possible.

В линейной постановке исследуется динамическое поведение возмущённого движения вблизи границ области устойчивости тонкой упругой прямоугольной пластинки постоянной толщины с одним свободным и тремя шарнирно закреплёнными краями, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа в направлении от свободного края к противоположному шарнирно закреплённому краю, в предположении, что вдоль свободного края приложены сосредоточенные инерционные массы и моменты.
Установлена связь между характеристиками собственных колебаний пластинки и скоростью обтекающего её невозмущённого потока газа, позволяющая делать некоторые выводы об устойчивости возмущённого движения пластинки. Показана возможность потери статической и динамической устойчивости в зависимости от значений параметров: в пространстве «характерных» параметров задачи выделены области, при значениях параметров, из которых имеет место либо статическая потеря устойчивости – дивергенция или локализованная дивергенция, либо динамическая потеря устойчивости – флаттер пластинки. Найдены соответствующие критические скорости потока, превышение которых приводит к потере устойчивости возмущённого движения пластинки.
Результаты работы могут быть использованы при обработке экспериментальных исследований дивергенции и флаттера обшивок сверхзвуковых летательных аппаратов.

Рассмотрение задач устойчивости тонких упругих пластинок, в которых поведение пластинки жёстко связано с воздействием обтекающего её сверхзвукового потока газа, имеет важное прикладное и теоретическое значение. Вопрос об упругой устойчивости панелей обшивки летательных аппаратов, представляющих собой плоские пластинки или пологие оболочки, неизбежно возникает на этапе проектирования и конструирования любого летательного аппарата для обеспечения безопасности полета. Теоретические исследования этих задач позволяют выявить различные виды потери устойчивости, обусловленные характером деформаций, а именно: статическую и динамическую неустойчивости или, в соответствии с новой терминологией, дивергентную и флаттерную неустойчивости соответственно. Деформации, возникающие при флаттере, более опасны для конструкции, так как быстро приводят к потере прочности и развитию усталостных трещин [1, стр. 175]. Изучению дивергентной и флаттерной неустойчивости пластинок и оболочек посвящено огромное количество работ. Монография [2] содержит всеобщий обзор, посвящённый данному вопросу.

В 1947 г. А.А. Ильюшиным был открыт закон «плоских сечений» в аэродинамике сверхзвуковых скоростей [3], который пространственную задачу удлинённого тела или тонкого профиля сводит к двумерной. Одно из следствий этого закона – локальная формула поршневой теории для давления аэродинамического взаимодействия колеблющейся пластинки с потоком газа. Если зависимость от времени выделить сомножителем $\exp(\lambda t)$, то задача о флаттере пластины сводится к задаче на собственные значения для несамосопряжённого оператора. Первые фундаментальные теоретические результаты в такой постановке получил А.А. Мовчан [4] при исследовании задачи о флаттере прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Эти результаты послужили основой для подавляющего числа исследований в последующие сорок с лишним лет.

Далее, В.В. Болотин [5], А.А. Ильюшин и И.А. Кийко [2] сформулировали в рамках закона «плоских сечений» новые постановки задачи о флаттере пластин, решены классы новых задач и обнаружены новые механические эффекты.

Примерно в это же время Ю.К. Коненковым [6] при исследовании изгибных колебаний тонкой полубесконечной пластины была обнаружена изгибная волна, локализованная в окрестности её свободного края, обладающая свойствами «рэлеевской волны» в полубесконечном пространстве – изгибная волна рэлеевского типа. Как оказалось, изгибная рэлеевская волна обладает наименьшей скоростью распространения по сравнению с остальными видами волн в тонкой пластинке [6]. В работе [7], по аналогии с изгибными локализованными колебаниями, исследован эффект локализованной неустойчивости полубесконечной пластинки-полосы в окрестности её свободного края, сжатой по полубесконечным шарнирно закреплённым кромкам. В работах [8–10] исследуется последующая аналогия – локализованная дивергенция, возникающая в окрестности свободного края полубесконечной пластины-полосы [8], а также, прямоугольной пластинки [9,10], при обтекании сверхзвуковым потоком газа, набегающим на свободный край, соответственно, пластинки-полосы и прямоугольной пластинки.

В предлагаемой работе исследуется динамическое поведение возмущённого движения вблизи границ устойчивости тонкой упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой с одной стороны сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край, в предположении, что вдоль свободного края пластинки приложены сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота [5 (с. 27, 101), 11]. Поток газа направлен от свободного края пластики к шарнирно закреплённому краю параллельно остальным двум шарнирно закреплённым краям. Получена зависимость, связывающая характеристики собственных колебаний пластинки со скоростью обтекающего её потока газа, позволяющая делать некоторые выводы об устойчивости возмущённого движения пластинки. С помощью аналитических методов анализа в пространстве «характерных» параметров задачи выделены области, при значениях параметров из которых возмущённое движение пластинки теряет статическую, либо динамическую устойчивость: имеет место дивергенция либо локализованная дивергенция в окрестности свободного края пластинки, либо флаттер пластинки. Найдены соответствующие критические скорости потока газа, при превышении которых имеет место потеря устойчивости в дивергентной и флаттерной формах.

Показана существенная зависимость критической скорости дивергенции от коэффициента Пуассона и от относительной длины и ширины пластинки, в то время, как критическая скорость дивергенции не зависит от сосредоточенных инерционных моментов поворота и масс, приложенных вдоль свободного края пластинки.

Установлено, что в случае, в котором ширина пластинки превосходит её длину более чем в два раза, наблюдается только лишь явление локализованной дивергентной неустойчивости в окрестности свободного края пластинки, аналогичное явлению локализованной дивергенции, возникающей при обтекании полубесконечной пластины-полосы сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край [8]. А в случае, в котором отношение ширины пластинки к её длине примерно порядка одной тысячной и меньше, можно полагать, что поведение прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа аналогично поведению обтекаемой удлинённой пластинки: имеют место явления дивергенции и флаттера, которые при изменении скорости потока газа либо чередуются, либо флаттер возникает в зоне дивергентной неустойчивости.

Потеря устойчивости возмущённого движения пластинки наиболее ярко проявляется при умеренных значениях отношения ширины пластинки к её длине, при которых имеет место как дивергентная, так и флаттерная неустойчивости. Как правило, критические скорости дивергенции меньше критических скоростей флаттера. В этом случае, также зоны дивергентной и флаттерной неустойчивости при изменении скорости потока газа либо чередуются, либо, при определённых значениях параметров задачи, флаттерная неустойчивость возникает в зоне дивергентной неустойчивости.

Найдены опасные границы области устойчивости в смысле терминологии работы Н.Н.Баутина [12], при переходе через которых происходит потеря прочности и возникновение усталостных трещин в материале пластинки [1].

1. Постановка задачи. Рассматривается прямоугольная тонкая упругая пластинка, которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна к пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V. Течение газа будем считать плоским и потенциальным. А также будем считать, что пластинка не подвержена действию усилий в срединной плоскости.

Пусть кромка $x = 0$ пластинки свободна, а кромки $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ шарнирно закреплены. Предполагается, что шарниры идеальны. Вдоль края $x = 0$ приложены сосредоточенные инерционные массы $m_с$ и моменты поворота $I_с$ одновременно [5 (с.101), 11].

Под влиянием каких-либо причин невозмущённое состояние равновесия пластинки может быть нарушено и пластинка начнёт совершать возмущённое движение с прогибом $w = (x, y, t)$. Прогиб w вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» [3]:

$\Delta p = -a_0 \rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$, a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа. Будем полагать, что прогибы w малы относительно толщины пластинки $2h$.

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия пластинки, когда изгиб пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками Δp и приложенными вдоль свободного края пластинки $x = 0$ сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами поворота I_c. При этом, влиянием распределённой массы пластинки и сил сопротивления можно пренебречь согласно примечанию 1.

Малые изгибные колебания точек срединной поверхности прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [3] описываются дифференциальным уравнением [4, 5 (с. 245)]

$$D\Delta^2 w + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \tag{1.1}$$

где $\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δw – оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки имеют вид [5, 11]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = D^{-1} I_\text{c} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D^{-1} m_\text{c} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad x = 0;$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad x = a; \tag{1.2}$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0 \text{ и } y = b, \tag{1.3}$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти наименьшее значение скорости потока газа – критическую скорость V_cr, приводящую к неустойчивости: при $V \geq V_\text{cr}$ устойчивое возмущённое движение пластинки становится неустойчивым. Иными словами, требуется определить значения параметра V, при которых возможны нетривиальные решения дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2), (1.3).

Примечание 1. Как известно, методы исследования неконсервативных задач упругой устойчивости могут быть разбиты на две группы. К первой группе принадлежат методы, основанные на непосредственном анализе дифференциальных уравнений, описывающих движение упругого тела – «точные методы». К другой группе относятся приближённые методы, суть которых сводится к замене упругого тела некоторой эквивалентной системой с конечным числом степеней свободы с последующим анализом этой эквивалентной системы [5 (с. 27, 101)]. В данной работе, с целью получения возможности аналитического исследования в рассматриваемой задаче устойчивости, распределённая масса пластинки условно заменена сосредоточенными инерционными массами и моментами поворота, приложенными вдоль свободного края пластинки [5 (с. 101), 11]. Такая замена вовсе не приводит к искажению динамической картины явления, быть может, с точностью до численных значений критических скоростей потока газа: значения критических скоростей являются несколько завышенными.

Примечание 2. Решение задачи в линейной постановке позволяет находить критическую скорость потока, при которой невозмущённая скорость пластинки перестаёт быть устойчивой по отношению к малым возмущениям и позволяет оценить лишь тенденцию колебаний. Но при этом не удаётся предсказать дальнейшее развитие процессов, в то время как нелинейная теория позволяет определить характеристики переходного процесса [1,5,13,14]. Несмотря на это, рассмотрение задачи в линейной постановке, допускающей аналитическое исследование, имеет смысл: её результаты ценны, так как предвосхищают результаты исследования задачи в нелинейной постановке.

2. Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости пластинки (1.1) – (1.3) сведем её к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения.

Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2), (1.3), будем искать в виде гармонических колебаний

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\cdot\sin(\mu_n y)\cdot\exp(\lambda t),\ \mu_n=\pi n b^{-1}, \tag{2.1}$$

n – число полуволн вдоль стороны пластинки b.

Тогда, в соответствии с выражением (2.1), рассматриваемая задача о флаттере пластинки (1.1) – (1.3) сводится к следующей краевой задаче на собственные значения λ несамосопряжённого оператора для обыкновенного дифференциального уравнения относительно форм колебаний $f_n(x)$:

$$f_n^{IV}(x)-2\mu_n^2 f_n^{II}(x)+a_0\rho_0 V D^{-1} f_n^{I}(x)+\mu_n^4 f_n(x)=0, \tag{2.2}$$

$$f_n^{II}-\mu_n^2\nu f_n(x)=I_c D^{-1}\lambda^2 f_n^{I}(x),$$

$$f_n^{III}-\mu_n^2(2-\nu) f_n^{I}(x)=-m_c D^{-1}\lambda^2 f_n(x),\quad x=0; \tag{2.3}$$

$$f_n(x)=0,\quad f_n^{II}(x)=0,\ x=a.$$

Система «пластинка–поток», описываемая соотношениями (1.1) – (1.3), асимптотически устойчива, если все собственные значения λ краевой задачи (2.2), (2.3) для обыкновенного дифференциального уравнения имеют отрицательные вещественные части ($\mathrm{Re}\,\lambda<0$), и неустойчива, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\mathrm{Re}\,\lambda>0$). Критическая скорость потока V_{cr}, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости возмущённого движения пластинки, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\mathrm{Re}\,\lambda=0$).

Частное решение дифференциального уравнения (2.2) примем в виде

$$f_n(x)=C_n\exp(\mu_n p x),\quad \mu_n=\pi n b^{-1}, \tag{2.4}$$

C_n – произвольные постоянные.

Подставляя решение (2.4) в дифференциальное уравнение (2.2), получаем характеристическое уравнение, являющееся алгебраическим уравнением четвёртой степени

$$p^4-2p^2+\alpha_n^3 p+1=0,\quad \alpha_n^3=a_0\rho_0 V D^{-1}\mu_n^{-3},\ \mu_n=\pi n b^{-1},\ \alpha_n^3>0,$$

или

$$(p^2-1)^2+\alpha_n^3 p=0\,,\quad \alpha_n^3=a_0\rho_0 VD^{-1}\mu_n^{-3}\,,\ \mu_n=\pi nb^{-1}\,,\ \alpha_n^3>0\,. \qquad (2.5)$$

Очевидно, что характеристическое уравнение (2.5) имеет два отрицательных действительных корня $p_1<0$, $p_2<0$ и пару комплексно-сопряжённых корней $p_{3,4}=\alpha\pm i\beta$ с положительной вещественной частью $\alpha>0$. Следовательно, общее решение уравнения (2.2), в соответствии с выражением (2.4), запишется в виде суммы

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{4}C_{nk}\exp(\mu_n p_k x)\,,\ \mu_n=\pi nb^{-1}, \qquad (2.6)$$

C_{nk} – произвольные постоянные.

В работе [8] подробно излагается решение характеристического уравнения (2.5) с помощью алгоритма Феррари [15], в соответствии с которым алгебраическое уравнение четвёртой степени сводится к эквивалентной системе двух квадратных уравнений. При этом корни характеристического уравнения (2.5) определяются следующими выражениями [8]:

$$p_{1,2}=-\frac{\sqrt{2(q+1)}}{2}\pm\sqrt{\sqrt{q^2-1}-\frac{q-1}{2}}\,,\quad p_1<0\,,\quad p_2<0\,; \qquad (2.7)$$

$$p_{3,4}=\frac{\sqrt{2(q+1)}}{2}\pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1}+\frac{q-1}{2}}\ ; \qquad (2.8)$$

$$q>1\,; \qquad (2.9)$$

q – единственный действительный корень кубического уравнения [8]

$$8\cdot(1+q)^2(q-1)=\alpha_n^6,\quad \alpha_n^3=a_0\rho_0 VD^{-1}\mu_n^{-3}\,,\quad \mu_n=\pi nb^{-1}. \qquad (2.10)$$

Отметим, что из соотношений (2.10) и положительности дискриминанта $Q=\alpha_n^6(\frac{1}{27}+\frac{\alpha_n^6}{256})$ кубического уравнения очевидно, что кубическое уравнение (2.10) при условии $\alpha_n^3>0$ имеет один действительный корень q ($q>1$) и пару комплексно-сопряжённых корней.

Из соотношений (2.10) легко можно получить выражение зависимости скорости потока газа V от параметров системы

$$V=2\sqrt{2(q-1)}\cdot(q+1)\cdot\pi^3 n^3\gamma^3 D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}, \qquad (2.11)$$

или

$$V=2\sqrt{2(q-1)}\cdot(q+1)\cdot\pi^3 n^3 D(a_0\rho_0 b^3)^{-1}\ , \qquad (2.12)$$

где через γ обозначено отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b:

$$\gamma=ab^{-1}. \qquad (2.13)$$

В соответствии с соотношением (2.6), корням (2.7), (2.8) соответствует следующее общее решение дифференциального уравнения (2.2) при граничных условиях (2.3):

$$f_n(x)=C_{n1}\exp(-0.5\sqrt{2(q+1)}-\sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1)})\pi nb^{-1}x+ \qquad (2.14)$$

$$+C_{n2}\exp(-0.5\sqrt{2(q+1)}+\sqrt{\sqrt{(q^2-1)}-0.5(q-1)})\pi nb^{-1}x+$$

$$+\exp(0.5\sqrt{2(q+1)})\pi nb^{-1}x\cdot\left(C_{n3}\cos(\sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1)})\cdot\pi nb^{-1}x)+\right.$$

$$\left.+C_{n4}\sin(\sqrt{\sqrt{(q^2-1)}+0.5(q-1)})\pi nb^{-1}x\right),$$

где q – единственный действительный корень кубического уравнения (2.10); C_{nk}, $k=\overline{1,4}$ – произвольные постоянные.

Подставляя общее решение (2.14) дифференциального уравнения (2.2) в граничные условия (2.3), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Для того, чтобы $\sum_{k=1}^{4}C_{nk}^2\neq 0$, что соответствует условию существования нетривиального решения $f_n(x)\neq 0$, необходимо, чтобы равнялся нулю определитель, составленный из коэффициентов этой системы уравнений. Раскрывая определитель и приравнивая его к нулю, после несложных преобразований получаем дисперсионное уравнение в безразмерных переменных относительно собственного значения λ краевой задачи (2.2), (2.3) в виде биквадратного уравнения

$$\chi_n\delta_n A_0\lambda^4+(\chi_n A_1+\delta_n A_2)\lambda^2+A_3=0. \qquad (2.15)$$

Здесь

$$\chi_n=I_{\text{c}}D^{-1}b(\pi n)^{-1},\quad \delta_n=m_{\text{c}}D^{-1}b^3(\pi n)^{-3}, \qquad (2.16)$$

– приведённые значения сосредоточенных инерционных масс m_{c} и моментов поворота I_{c} соответственно, приложенных вдоль свободного края пластинки $x=0$;

$$A_0=A_0(q,n,\gamma)= \qquad (2.17)$$

$$=(1-\exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)\cdot B_1B_2+\exp(-\sqrt{2(q+1)}\cdot\pi n\gamma)\cdot$$

$$\cdot\Big[(\sqrt{2(q-1)}-\sqrt{2(q+1)})\cdot B_1\cdot\operatorname{ch}(\pi n\gamma B_1)\cdot\sin(\pi n\gamma B_2)-$$

$$-(\sqrt{2(q-1)}+\sqrt{2(q+1)})\cdot B_2\operatorname{sh}(\pi n\gamma B_1)\cdot\cos(\pi n\gamma B_2)\Big];$$

$$A_1=A_1(q,n,\gamma)=\sqrt{2(q+1)}\Big\{(q-\sqrt{(q^2-1)})B_1B_2+ \qquad (2.18)$$

$$+(q+\sqrt{(q^2-1)})B_1B_2\exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)+$$

$$+\Big[\sqrt{(q^2-1)}\cdot(\sqrt{2(q-1)}+\sqrt{2(q+1)})\operatorname{sh}(\pi n\gamma B_1)+$$

$$+2(2q-1)B_1\operatorname{ch}(\pi n\gamma B_1)\Big]B_2\cos(\pi n\gamma B_2)\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1)}\cdot\pi n\gamma)+$$

$$+\Big[(q-1)\operatorname{sh}(\pi n\gamma B_1)+\sqrt{(q^2-1)}\cdot(\sqrt{2(q+1)}-\sqrt{2(q-1)})B_1\operatorname{ch}(\pi n\gamma B_1)\Big]\cdot$$

$$\cdot\sin(\pi n\gamma B_2)\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1)}\cdot\pi n\gamma)\Big\};$$

$$A_2=A_2(q,n,\gamma)=\sqrt{2(q+1)}\Big[(1+\exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)\cdot B_1B_2- \qquad (2.19)$$

$$-2B_1B_2\operatorname{ch}(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2)\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1)}\cdot\pi n\gamma)+$$

$$+3(q-1)\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2)\cdot\exp(-\sqrt{2(q+1)}\cdot\pi n\gamma)\Big];$$

$$A_3 = A_3(q,n,\gamma,\nu) = \Big[2(q+1)(q-\sqrt{q^2-1}-\nu)-(1-\nu)^2\Big]B_1B_2 - \tag{2.20}$$
$$-\Big[2(q+1)(q+\sqrt{q^2-1}-\nu)-(1-\nu)^2\Big]B_1B_2\exp(-2\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)+$$
$$+\Big\{\big[(4q^2+2q-1)\sqrt{2(q-1)}-(2q^2-4q+1)\sqrt{2(q+1)}-$$
$$-2((2q-1)\sqrt{2(q+1)}-q\sqrt{2(q-1)})\nu+$$
$$+(\sqrt{2(q+1)}+\sqrt{2(q-1)})\nu^2\big]\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)+$$
$$+4(q+1)\sqrt{q^2-1}\cdot B_1\,\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\Big\}B_2\cos(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma)+$$
$$+\big[-B_1\cdot\big((4q^2+2q-1)\sqrt{2(q-1)}+(2q^2-4q+1)\sqrt{2(q+1)}+$$
$$+2((2q-1)\sqrt{2(q+1)}+q\sqrt{2(q-1)})\nu-$$
$$-(\sqrt{2(q+1)}-\sqrt{2(q-1)})\nu^2\big)\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)-$$
$$-6(q^2-1)\sqrt{(q^2-1)}\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\big]\sin(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1)}\pi n\gamma);$$

$$B_1(q)=\sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1)},\ B_2(q)=\sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1)}, \tag{2.21}$$

q ($q>1$) – единственный действительный корень кубического уравнения (2.10); γ – отношение сторон пластинки, определяемое выражением (2.13); ν – коэффициент Пуассона.

Учитывая условие (2.9), из выражений (2.21) имеем

$$B_1(q)>0,\ B_2(q)>0 \text{ для всех } q>1. \tag{2.22}$$

В силу условий (2.22), из соотношений (2.17) и (2.19) следует, что

$$A_0 = A_0(q,n,\gamma)>0,\quad A_2 = A_2(q,n,\gamma)>0 \tag{2.23}$$

для всех $q>1$, $n\ge 1$ и $\gamma>0$.

Ясно, что дисперсионное уравнение (2.15), устанавливаюшее зависимость собственного значения λ от «характерных» параметров a, b, n, ν, m_{c}, I_{c}, q (или V в соответствии с (2.11), (2.12)), не что иное, как характеристическое уравнение системы (2.2), (2.3). Поэтому, для выяснения свойств возмущённого движения системы «пластинка–поток» (2.2), (2.3), необходимо изучить характер влияния её параметров на собственные значения λ – корни характеристического уравнения (2.15): система (2.2), (2.3) устойчива, если все собственные значения λ находятся в левой части комплексной плоскости ($\mathrm{Re}\,\lambda\le 0$).

Следует отметить, что среди параметров исходной задачи устойчивости прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа (1.1)–(1.3), наиболее существенное влияние на её динамическое поведение оказывают следующие параметры: $\gamma = ab^{-1}$ – отношение ширины пластинки к её длине; $k_n = \chi_n\cdot\delta_n^{-1}$ – отношение коэффициентов, характеризующих влияние сосредоточенных инерционных моментов поворота и масс соответственно, приложенных вдоль свободного края пластинки; ν – коэффициент Пуассона;

q ($q > 1$) – единственный действительный корень кубического уравнения (2.10), характеризующий, в соответствии с выражениями (2.11) или (2.12), скорость V обтекающего пластинку потока газа; n – число полуволн вдоль стороны b. Значения остальных параметров («нехарактерных») примем фиксированными.

Таким образом, анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия прямоугольной пластинки в потенциальном сверхзвуковом потоке газа при наличии сосредоточенных инерционных масс m_{c} и моментов поворота I_{c}, приложенных вдоль свободного края $x = 0$ пластинки, сводится к исследованию поведения корней характеристического уравнения (2.15) системы (2.2), (2.3), определяющих собственные движения пластинки, в зависимости от «характерных» параметров исходной задачи устойчивости (1.1)-(1.3).

3. Исследуем характеристическое уравнение (2.15) при условии

$$\gamma \in \left(0, \infty\right), \chi_n > 0,\ \delta_n > 0, \tag{3.1}$$

где γ, χ_n, δ_n определены выражениями (2.13) и (2.16) соответственно.

Вводя обозначение

$$k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1}, \tag{3.2}$$

характеристическое уравнение (2.15), в соответствии с условиями (2.23) и (3.1), перепишем в виде

$$\lambda^4 + (k_n A_1 + A_2)\chi_n^{-1} A_0^{-1} \lambda^2 + \chi_n^{-1} \delta_n^{-1} A_0^{-1} A_3 = 0, \tag{3.3}$$

где χ_n, δ_n, A_0, A_1, A_2, A_3 определены, соответственно, выражениями (2.16)–(2.20).

Введём в рассмотрение области M_0, M_1, M_2 и M_3 в пространстве «характерных» параметров M рассматриваемой динамической системы «пластинка–поток», при значениях параметров, из которых, соответственно, либо все корни характеристического уравнения (3.3) находятся в левой части комплексной плоскости $\left(\operatorname{Re}\lambda \le 0\right)\left(M_0\right)$, либо среди корней имеется один положительный корень $\left(M_1\right)$, либо имеются два положительных корня $\left(M_2\right)$, либо имеется пара комплексно-сопряжённых корней с положительной вещественной частью $\left(M_3\right)$. Следовательно, возмущённое движение пластинки при значениях параметров из области M_0 устойчиво, а при значениях параметров из областей M_1, M_2 и M_3 – неустойчиво.

Область устойчивости возмущённого движения пластинки $M_0 \in M$ рассматриваемой динамической системы определяется соотношениями

$$k_n A_1 + A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \quad \Delta > 0. \tag{3.4}$$

Здесь Δ – дискриминант характеристического уравнения (3.3):

$$\Delta = \Delta(n, \gamma, \nu, k_n) = (k_n A_1 + A_2)^2 - 4 k_n A_0 A_3. \tag{3.5}$$

Очевидно, что при условиях (3.4) уравнение (3.3) имеет две пары чисто мнимых корней: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$. При этом прямоугольная пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого равновесного состояния.

Границами области устойчивости M_0 возмущённого движения прямоугольной пластинки в пространстве её параметров M при условии

$$k_n A_1 + A_2 > 0 \qquad (3.6)$$

являются гиперповерхности [12]

$$A_3 = 0, \qquad (3.7)$$

$$\Delta = 0. \qquad (3.8)$$

На гиперповерхности (3.7) характеристическое уравнение (3.3) имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2; а на гиперповерхности (3.8) характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$.

Из способа разбиения пространства параметров M задачи на области устойчивости и неустойчивости возмущённого движения пластинки, очевидно, что области неустойчивости M_1, M_2, M_3 определяются, соответственно, соотношениями:

$$A_3 < 0, \quad \Delta > 0; \qquad (3.9)$$

$$A_3 > 0, \quad \Delta > 0, \quad k_n A_1 + A_2 < 0; \qquad (3.10)$$

$$A_3 > 0, \quad \Delta < 0. \qquad (3.11)$$

На границе области устойчивости M_0

$$\Delta > 0, \quad k_n A_1 + A_2 > 0, \quad A_3 = 0 \qquad (3.12)$$

возмущённое движение теряет статическую устойчивость: имеет место дивергенция. Критические скорости $V_{\text{cr.div}}^{(1)}$, соответствующие первому корню $q_0^{(1)} = q_0^{(1)}(n, \gamma, \nu)$ уравнения (3.7), и подсчитанные по формуле (2.11), разграничивают области устойчивости M_0 и статической (дивергентной) неустойчивости M_1 возмущённого движения прямоугольной пластинки. Очевидно, что

$$V_{\text{cr.div}}^{(1)} = V_{\text{cr.div}}^{(1)}(n, \gamma, \nu). \qquad (3.13)$$

С увеличением скорости потока газа при скоростях $V \geq V_{\text{cr.div}}^{(1)}$ происходит «мягкий» переход через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ задачи (2.2), (2.3), вызывающий плавное изменение характера возмущённого движения от устойчивости к дивергентной неустойчивости. Это приводит к соответствующему изменению динамического поведения пластинки: в пластинке, совершающей гармонические колебания, возникают напряжения, приводящие к изменению формы – пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания». Так как монотонное «выпучивание» пластинки не имеет колебательного характера, то может рассматриваться как квазистатический процесс – дивергенция.

Уравнение (3.7), в точности такое же, какое дисперсионное уравнение, полученное в работе [9] при исследовании задачи устойчивости прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа, направленным от свободного края пластинки к шарнирно закреплённому краю вдоль остальных двух шарнирно закреплённых краёв, в статической постановке ($m_\text{c} = 0$, $I_\text{c} = 0$). Следовательно, при исследовании исходной задачи устойчивости (1.1)–(1.3) можно учитывать результаты, полученные в работе [9], в которой найдены значения $V_{\text{cr.div}}^{(1)}$ для различных значений n, γ и ν. При этом показано, что в случае, в котором $\gamma < 2$, имеет место дивергентная устойчивость (пластинка вся «выпучивается»), а в случае, в котором $\gamma \geq 2$, с некоторым допущением можно принять, что имеет место локализованная дивергентная неустойчивость в окрестности свободного края пластинки $x = 0$ (пластинка «выпучивается» только лишь вдоль окрестности свободного края $x = 0$) [8,9]; критическая скорость потока $V_{\text{cr.div}}^{(1)}$ меньше в пластинках из материалов с бо́льшим коэффициентом Пуассона ν; наименьшее значение $V_{\text{cr.div}}^{(1)}$ достигается при $n = 1$ [8,9].

Область M_1 состоит из двух подобластей M_{11} и M_{12}, которые определяются соотношениями $A_3 < 0$, $\Delta > 0$, $k_n A_1 + A_2 > 0$ и $A_3 < 0$, $\Delta > 0$, $k_n A_1 + A_2 < 0$ соответственно. Уравнение

$$k_n A_1 + A_2 = 0 \qquad (3.14)$$

разграничивает область M_1 на подобласти M_{11} и M_{12}. В обеих подобластях характеристическое уравнение (2.15) имеет два действительных корня: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ и два чисто мнимых (из двух собственных движений пластинки, соответствующих собственным значениям λ_1 и λ_2, одно затухает, а другое неограниченно отклоняется по экспоненциальному закону), прогибы будут возрастать во времени по экспоненциальному закону. При скоростях потока газа $V \geq V_{\text{cr.div}}^{(1)}$ попадаем в подобласть M_{11}, в которой $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, а при дальнейшем увеличении скорости потока газа попадаем в подобласть M_{12}, в которой $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Это означает, что в случае попадания в подобласть M_{12} интенсивность возрастания прогибов повышается. Второму корню $q_0^{(2)}$ уравнения (3.7) соответствует значение $V_{\text{cr.div}}^{(2)}$, подсчитанное по формуле (2.11). Очевидно, что $V_{\text{cr.div}}^{(2)} > V_{\text{cr.div}}^{(1)}$. Если это состояние прямоугольной пластинки удастся каким-либо способом перейти, то при дальнейшем увеличении скорости потока газа V из области дивергентной неустойчивости M_1 попадаем в область M_2, определяемую условиями (3.10), в которой явление дивергенции более ярко выражено. В области M_2 характеристическое уравнение (2.15) имеет четыре действительных корня λ_i, среди которых два корня положительные ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$), а два корня отрицательные ($\lambda_3 > 0$, $\lambda_4 > 0$): из четырёх собственных движений пластинки два затухают, а остальные два неограниченно отклоняются по экспоненциальному закону. При дальнейшем увеличении скорости потока газа V из области дивергентной неустойчивости M_2 попадаем либо в область устойчивости M_0, либо в область флаттерной неустойчивости M_3. В области M_3 характеристическое уравнение (2.15) имеет, по крайней мере, два комплексно-сопряжённых корня с положительной вещественной частью. При переходе из области M_2 в область M_3 проявляется явление панельного флаттера, имеющее характер колебаний по нарастающей амплитуде, наряду с дивергенцией – монотонным выпучиванием пластинки.

На границе области устойчивости M_0

$$k_n A_1 + A_2 > 0\,,\quad A_3 > 0\,,\quad \Delta = 0 \tag{3.15}$$

и на границе области статической неустойчивости M_2

$$k_n A_1 + A_2 < 0\,,\quad A_3 > 0\,,\quad \Delta = 0 \tag{3.16}$$

возмущённое движение пластинки теряет динамическую устойчивость – пластинка совершает флаттерные колебания.

Критические скорости $V_{\text{cr.f1}}^{(1)}$ потока газа, соответствующие первому корню $q_{1\text{f1}}^{(1)} = q_{\text{cr.f1}}^{(1)}(n,\gamma,\nu,k_n)$ уравнения (3.8) и подсчитанные по формуле (2.11), разграничивают либо область устойчивости M_0 от области динамической неустойчивости M_3, определяемых соотношениями (3.4), (3.11) соответственно, либо область статической неустойчивости M_2 от области динамической неустойчивости M_3, определяемых соотношениями (3.10), (3.11) соответственно, в зависимости от значений параметров γ и k_n, определяемых соответственно выражениями (2.13), (3.2). В обоих случаях при значениях скоростей потока газа $V \ge V_{\text{cr.f1}}^{(1)}$ происходит «мягкий» (плавный) переход к колебаниям по нарастающей амплитуде – к флаттерным колебаниям.

Таким образом, критические скорости дивергентной неустойчивости $V_{\text{cr.div}}^{(1)}(n,\gamma,\nu)$ и флаттерной неустойчивости $V_{\text{cr.f1}}^{(1)}(n,\gamma,\nu,k_n)$ возмущённого движения прямоугольной пластинки, соответствующие, соответственно, первым корням $q_0^{(1)} = q_0^{(1)}(n,\gamma,\nu)$ и $q_{1\text{f1}}^{(1)} = q_{\text{cr.f1}}^{(1)}(n,\gamma,\nu,k_n)$ уравнений (3.7) и (3.8), определяются по формулам (2.11) и (2.12) с достаточной точностью. При этом, в соответствии с соотношениями (2.23), (3.1), происходит «мягкий» переход возмущённого движения пластинки от устойчивости к неустойчивости как в дивергентной, так и во флаттерной формах.

4. В данной работе с помощью методов графо-аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n,\gamma,\nu,k_n)\}$, параметризованных надлежащим образом. Размер статьи не позволяет привести полученные результаты полностью. Поэтому ограничимся иллюстрациями типичных случаев, выделяя наиболее представительные из семейства кривых $\{q(n,\gamma,\nu,k_n)\}$ в многопараметрическом пространстве M .

С помощью численных методов анализа найдены первые и вторые корни, соответственно $q_{\text{cr}}^{(1)}$ и $q_{\text{cr}}^{(2)}$, уравнений (3.7), (3.8) и (3.14), соответствующие различным значениям параметров $\gamma = ab^{-1}$, $k_n = \chi_n \delta_n^{-1}$, n, ν в предположении $\gamma \ne 0$, $\chi_n \ne 0$, $\delta_n \ne 0$. Подставляя полученные значения $q_{\text{cr}}^{(1)}$ в выражение (2.11) или (2.12), получаем соответствующие значения критических скоростей потока газа V_{cr}, разграничивающие области устойчивости M_0 и неустойчивости M_1, M_2 и M_3 в пространстве «характерных» параметров исходной задачи устойчивости (1.1)–(1.4). При этом, численные расчёты, проведённые для различных n, показали, что при фиксированных значениях остальных параметров наименьшее значение $V_{cr.div}^{(1)}(n,\gamma,\nu)$ и $V_{cr.fl}^{(1)}(n,\gamma,\nu,k_n)$ достигается при $n = 1$:

$$V_{\text{cr.div.}}(\gamma,\nu)=V^{(1)}_{\text{cr.div.}}(1,\gamma,\nu)=\min_n V^{(1)}_{\text{cr.div}}(n,\gamma,\nu)\,, \tag{4.1}$$

$$V_{\text{cr.}fl.}(\gamma,\nu,k_1)=V^{(1)}_{\text{cr.fl.}}(1,\gamma,\nu,k_1)=\min_n V^{(1)}_{\text{cr.}fl}(n,\gamma,\nu,k_n)\,. \tag{4.2}$$

Из уравнений (3.7) и (3.8), в силу соотношений (2.12), (2.17)–(2.20) и (3.5), очевидно, что, начиная с $\gamma \geq 2$, критическая скорость дивергенции (4.1) зависит только от коэффициента Пуассона ν, а в случае динамической неустойчивости влияние коэффициента Пуассона ν на значение критической скорости флаттера (4.2) незначительно, в особенности, при значениях $\gamma \leq 0.3$, что хорошо согласуется с результатами численного анализа.

Легко показать, что уравнение (3.7) в предельном случае, когда $\gamma \to 0$ ($b \to \infty$) при всех $q > 1$ и ν, обращается в тождество, а в случае, когда $\gamma \geq 2$, приводится к уравнению

$$2(q+1)\cdot(q-\sqrt{q^2-1}-\nu)-(1-\nu)^2=0\,,\ \ \gamma\in[2,\infty)\,, \tag{4.3}$$

которое в точности совпадает с дисперсионным уравнением, полученным в работе [8] при изучении явления локализованной дивергентной неустойчивости, возникающей в окрестности свободного края ($x=0$) упругой полубесконечной пластины-полосы ($0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq b$), обтекаемой сверхзвуковым потоком газа вдоль полубесконечных шарнирно закреплённых краёв в направлении от свободного края $x=0$ к закреплённому краю $x=a$. Отсюда, очевидно, следует, что в предельном случае $\gamma \to 0$ ($b \to \infty$) невозмущённая форма равновесия пластинки является статически неустойчивой, а при $\gamma \geq 2$ можно сказать, что при $q = q^*_{\text{div}}$ (q^*_{div} – решение уравнения (4.3)) имеет место явление локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x=0$ рассматриваемой прямоугольной пластинки. При этом, как следует из уравнения (4.3), его решение q^*_{div} и соответствующее значение приведённой критической скорости дивергенции $V^*_{div}\cdot D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, найдённой по формуле (2.11), зависят только от коэффициента Пуассона ν, что согласуется с полученными численными результатами.

В табл. 1–4 представлены численные результаты решения исходной задачи устойчивости прямоугольной пластинки (1.1)–(1.3), характеризующие наиболее представительные случаи зависимости критической скорости потока газа $V_{\text{cr.div}}$ и $V_{\text{cr.}fl}$ от параметров задачи.

В результате расчёта было установлено следующее.

При всех $\gamma \in (0,2)$ значение критической скорости дивергенции $V_{\text{cr. div}}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ зависит от коэффициента Пуассона ν и параметра $\gamma = ab^{-1}$ – отношения сторон прямоугольника: $V_{\text{cr. div}}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ меньше в пластинах из материалов с бóльшим коэффициентом Пуассона ν, а с возрастанием γ критическая скорость дивергенции растёт (табл. 1).

В случае достаточно длинных пластинок $\left(\gamma = ab^{-1} \leq 0.0001\right)$ значение критической скорости дивергенции, примерно, порядка $V_{\text{cr. div}}\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3) \approx 10^{-7}$, а с уменьшением γ стремится к нулю [11]: $V_{\text{cr.div.}} \to 0$ при $\gamma \to 0$. Это означает, что при значениях $\gamma \le 0.0001$ поведение обтекаемой в сверхзвуковом потоке газа прямоугольной пластинки, примерно, такое же, как и у удлинённой пластинки $\gamma \to 0$ $(b \to \infty)$: в обоих случаях невозмущённая форма равновесия пластинки, являясь изначально до обтекания статически неустойчивой, остается такой же и при обтекании её потоком газа.

Таблица 1

γ \ ν	0.125	0.25	0.375	0.5
$1\cdot 10^{-4}$	$0.365\cdot 10^{-6}$	$0.332\cdot 10^{-6}$	$0.294\cdot 10^{-6}$	$0.265\cdot 10^{-6}$
$1\cdot 10^{-2}$	$0.365\cdot 10^{-2}$	$0.332\cdot 10^{-2}$	$0.294\cdot 10^{-2}$	$0.265\cdot 10^{-2}$
$1\cdot 10^{-1}$	0.365	0.332	0.294	0.265
$5\cdot 10^{-1}$	14.95	13.51	10.78	9.06
$8\cdot 10^{-1}$	80.47	60.09	46.75	35.95
1.0	323.52	157.17	101.04	70.21
1.2	613.53	320.01	194.87	133.24
1.5	980.85	595.82	388.36	269.25
1.8	1695.90	992.19	695.13	440.55
2.0	2598.09	1382.02	953.54	604.31

Далее, начиная с $\gamma = 2$, найденные в данной работе для различных значений коэффициента Пуассона ν значения $q^{(1)}_{\text{cr.div}}$ и приведённой критической скорости дивергенции $V_{cr\,div} \cdot D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, пересчитанной по формуле (2.12) $V_{cr\,div} \cdot D^{-1}\left(a_0\rho_0 b^3\right)$, примерно равны (с точностью порядка 10^{-4}) соответствующим значениям $\tilde{q}_{div}$ и приведённой критической скорости локализованной дивергенции $\tilde{V}_{loc.div} \cdot D^{-1}\left(a_0\rho_0 b^3\right)$, полученных в работе [8] при исследовании задачи локализованной дивергенции в окрестности свободного края полубесконечной пластины–полосы (табл. 2).

Таблица 2

ν	0	0.125	0.25	0.375	0.5
$V_{loc.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$	2453.012	537.191	173.371	120.741	77.398

Следовательно, при значениях $\gamma \ge 2$ прямоугольная пластинка в потоке газа теряет статическую устойчивость при скоростях потока $V \ge V_{cr\,div} \cdot D^{-1}\left(a_0\rho_0 b^3\right) \approx V^*_{loc.div} \cdot D^{-1}\left(a_0\rho_0 b^3\right)$ (табл. 2), при которых наблюдается явление локализованной дивергенции в окрестности свободного края

$x = 0$ полубесконечной пластины–полосы [8]. При этом, критическая скорость локализованной дивергенции прямоугольной пластинки $V_{\text{loc.div.}} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ зависит только от коэффициента Пуассона ν: она меньше в пластинах из материалов с бóльшим коэффициентом Пуассона ν [8]. Так как в этом предельном случае $q^{(1)}_{\text{cr.div}}$ определяется из простого выражения (4.3.), то можно сказать, что для значений $\gamma \ge 2$ найдено приближённое выражение (4.3), позволяющее легко найти критическую скорость дивергенции $V_{cr\,div} \cdot D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ (табл.1) или $V_{\text{loc.div.}} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ (табл.2), подставляя полученные значения $q^{(1)}_{\text{cr.div}}$ в выражение (2.11) или (2.12) соответственно.

В табл. 3 представлены значения приведённой критической скорости $V^{(1)}_{cr.\,fl.} D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ потока газа, соответствующие различным значениям параметров $\gamma \in [0.2, 0.72]$, $k_1 \in [0.1, 10]$, определяемых соответственно выражениями (2.13), (3.2), и коэффициента Пуассона ν, которые разграничивают область устойчивости M_0 от области динамической неустойчивости M_3, определяемых соотношениями (3.12), (3.11). При скоростях потока газа $V \ge V^{(1)}_{\text{cr.f}1}$ происходит плавный переход из области M_0 в область M_3: возмущённое движение пластинки от гармонических колебаний «мягко» переходит к колебаниям по нарастающей амплитуде – к флаттерным колебаниям.

Переход из области M_0 в область M_3 имеет место только при значениях $\gamma \in [0.2, 0.72]$ и $k_1 \in [0.1, 200]$. При этом, зависимость приведённой критической скорости флаттера $V^{(1)}_{\text{cr.fl.}} D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ от параметров k_1, γ и ν сложная (табл.3). При значениях $k_1 \in [0.1;10)$ критическая скорость $V^{(1)}_{\text{cr.fl.}} D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ зависит от параметров γ и ν: при фиксированных значениях параметров k и ν приведённая критическая скорость флаттера $V^{(1)}_{\text{cr.fl.}} D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ возрастает с увеличением γ, а при фиксированных значениях параметров k_1 и γ – больше в пластинах из материалов с бóльшим коэффициентом Пуассона ν. При $k_1 \in (10; 200]$ потеря динамической устойчивости имеет место только при значениях $\gamma = 0.72$ и $\nu = 0.125$. При этом, приведённая критическая скорость флаттера не зависит от k_1 и равна $V^{(1)}_{\text{cr.fl.}} D^{-1}(a_0\rho_0 a^3) \approx 147.05$ для всех $k_1 \in (10; 200]$.

В табл. 4 представлены значения критической скорости флаттера $\tilde{V}^{(1)}_{\text{cr.fl.}} D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$, разграничивающие область статической неустойчивости M_2 от области динамической неустойчивости M_3, определяемых соотношениями (3.10), (3.11) соответственно. При этом, переход из области M_2 в область M_3 – потеря динамической устойчивости – возможен только при значениях $\gamma \in [0.0001, 0.6]$ и $k_1 \in [0.001, 10]$. В этом случае при скоростях потока газа $V \ge \tilde{V}^{(1)}_{\text{cr.f}1}$ наряду с монотонным «выпучиванием» пластинки, не имеющего колебательного характера, происходит плавный переход к колебаниям по нарастающей амплитуде – к флаттерным колебаниям.

Таблица 3

γ \ k	0.1	0.5	1	5	10
0.2	$\begin{Bmatrix} 81.40 \\ 82.16 \\ 82.68 \\ 83.46 \end{Bmatrix}$	∞	∞	∞	∞
0.3	$\begin{Bmatrix} 108.22 \\ 109.49 \\ 112.06 \\ 114.64 \end{Bmatrix}$	∞	∞	∞	∞
0.4	∞	$\begin{Bmatrix} 98.56 \\ 102.33 \\ 106.39 \\ 109.78 \end{Bmatrix}$	∞	∞	∞
0.5	∞	$\begin{Bmatrix} 123.73 \\ 135.17 \\ 139.05 \\ 142.97 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 110.78 \\ 118.50 \\ 126.75 \\ 137.11 \end{Bmatrix}$	∞	∞
0.6	∞	∞	$\begin{Bmatrix} 140.27 \\ 151.89 \\ 163.77 \\ 174.91 \end{Bmatrix}$	∞	∞
0.65	∞	∞	∞	132.62	∞
0.68	∞	∞	∞	$\begin{Bmatrix} 135.13 \\ 195.83 \\ \infty \\ \infty \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 128.72 \\ 142.87 \\ \infty \\ \infty \end{Bmatrix}$
0.72	∞	∞	∞	147.05	147.05

В табл. 3 и 4 значения критической скорости флаттера, взятые в фигурные скобки, соответствуют, соответственно, следующим значениям коэффициента Пуассона ν: 0.125; 0.25; 0.375 и 0.5.

Таблица 4

k / γ	0.1	0.5	1	5	10
0.0001	160.84	160.84	160.84	160.84	160.84
0.001	157.67	157.67	157.67	157.67	157.67
0.1	93.32	121.90	133.30	146.27	152.89
0.2	∞	100.01	114.04	128.69	140.82
0.3	∞	95.75	101.92	119.86	127.84
0.4	∞	∞	96.35	112.43	121.80
0.5	∞	∞	∞	123.73	131.35
0.6	∞	∞	∞	$\begin{Bmatrix}128.90\\140.26\\151.89\\163.77\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}140.26\\146.04\\157.80\\169.81\end{Bmatrix}$

Приведённая критическая скорость флаттера $\tilde{V}^{(1)}_{\text{cr.fl.}} D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ при значениях $\gamma \in [0.0001; 0.1)$ зависит только от γ: критическая скорость уменьшается с увеличением γ (табл.4). При значениях $\gamma \in [0.1; 0.5]$ критическая скорость $\tilde{V}^{(1)}_{\text{cr.fl.}} D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ зависит от k_1, γ и не зависит от коэффициента Пуассона ν: с увеличением k_1 возрастает при фиксированном γ, а с увеличением γ убывает при фиксированном k_1. Начиная с $\gamma = 0.5$, критическая скорость флаттера $\tilde{V}^{(1)}_{\text{cr.fl.}} D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ с увеличением γ и k_1 возрастает. При значениях $\gamma \in (0.5; 0.6]$ критическая скорость флаттера зависит от всех трёх параметров k_1, γ, ν: с увеличением k_1, γ и ν – возрастает. При значениях $k_1 \le 10^{-3}$ и $\gamma \le 10^{-4}$ флаттер отсутствует: $\tilde{V}^{(1)}_{cr.fl.} D^{-1}(a_0\rho_0 a^3) \approx \infty$.

Из численных результатов, приведённых в табл. 3 и 4, следует, что критическая скорость флаттера достигает наименьшего значения при $\gamma \in [0.1; 0.4]$ и $k_1 \in [0.1, 1]$. Это означает, что «опасной» границей области устойчивости M_0 в смысле терминологии, применённой Н.Н. Баутиным в работе [12], является граница перехода из области устойчивости M_0 в область флаттерной неустойчивости M_3, определяемая соотношением (3.15): $k_n A_1 + A_2 > 0$, $A_3 > 0$, $\Delta = 0$. При этом происходит быстрая потеря прочности и появление усталостных трещин в материале пластинки, приводящее к разрушению пластинки [1]. Подсчитывая коэффициенты Ляпунова, по их знаку нетрудно подтвердить полученный численный результат более строго [12].

Рассмотрим частные случаи.

5.1. Пусть $k_n = 0$ ($\chi_n = 0$, $\delta_n > 0$): вдоль свободной кромки $x = 0$ приложены сосредоточенные инерционные массы $m_\text{с}$, а инерционные моменты $I_\text{с}$ отсутствуют. В этом случае характеристическое уравнение (2.15) запишется в виде

$$\delta_n A_2 \lambda^2 + A_3 = 0, \qquad (5.1)$$

где A_2, A_3 определены выражениями (2.19), (2.20) соответственно; δ_n – выражением (2.16): $\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3}$.

Корни уравнения (5.1) равны

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-A_3 \cdot \left(\delta_n \cdot A_2\right)^{-1}}. \qquad (5.2)$$

Область устойчивости возмущённого движения пластинки $M_0 \in M$ рассматриваемой динамической системы определяется соотношениями

$$A_2 > 0, \quad A_3 > 0. \qquad (5.3)$$

Очевидно, что при условиях (5.3) уравнение (5.1) имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. При этом, прямоугольная пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого равновесного состояния.

Границами области устойчивости M_0 возмущённого движения прямоугольной пластинки в пространстве её параметров M при условиях (2.16) и (2.23)

$$\delta_n > 0, \quad A_2 > 0 \qquad (5.4)$$

является гиперповерхность [12]

$$A_3 = 0. \qquad (5.5)$$

На гиперповерхности (5.5) характеристическое уравнение (5.1) имеет нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2.

В силу условий (5.4), область неустойчивости M_1 определяется соотношением

$$A_3 < 0. \qquad (5.6)$$

Отсюда, очевидно, следует, что при значениях параметров из области неустойчивости M_1 характеристическое уравнение имеет два действительных корня, один из которых положительный: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$. Это означает, что одно из двух собственных движений пластинки является возрастающим по экспоненциальному закону.

На границе области устойчивости M_0

$$A_3 = 0 \qquad (5.7)$$

возмущённое движение теряет статическую устойчивость: имеет место дивергенция. Критические скорости дивергенции $V_\text{cr.div}$ разграничивают области устойчивости M_0 и дивергентной неустойчивости возмущённого движения прямоугольной пластинки M_2. В силу тождественности условий (3.7) и (5.7), критические скорости дивергенции $V_\text{cr.div}$, найденные подстановкой значений первого корня $q_0^{(1)} = q_0^{(1)}(n, \gamma, \nu)$ уравнения (5.7) в выражение (2.11), равны значениям критических скоростей дивергенции $V_\text{cr.div}^{(1)}$ (табл.1 и 2), соответствующим случаям, в которых $m_c = 0$ и $I_c = 0$ [9], $m_c \neq 0$ и $I_c \neq 0$ (раздел 4). Следовательно, наличие m_c не влияет на значения критической скорости дивергенции $V_{cr.div}$, приведённых в табл. 1 и 2 для $\gamma < 2$ и $\gamma \geq 2$ соответственно. Ясно, что и в этом случае $V_{cr.div}$ достигает наименьшего значения при $n = 1$, которому соответствует $k_1 = 1$.

С увеличением скорости потока газа при значениях скорости потока газа $V \geq V_{cr.div}$ происходит «мягкий» переход через нуль – точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ задачи (2.2), (2.3), вызывающий плавное изменение характера возмущённого движения от устойчивости к дивергентной неустойчивости. При этом, как следует из выражений (2.16) и (5.2), при фиксированных значениях остальных параметров с увеличением m_c корни $\lambda_{1,2}$ по модулю уменьшаются. А это означает, что при скоростях $V \geq V_{cr.div}$ с увеличением m_c интенсивность возрастания прогибов пластинки снижается.

Из выражения (5.2), очевидно, следует, что в рассматриваемом случае панельный флаттер отсутствует.

Таким образом, в случае, в котором $m_c \neq 0$, $I_c = 0$, имеет место только дивергентная неустойчивость возмущённого движения пластинки: флаттерная неустойчивость отсутствует. При этом при скоростях потока газа $V \geq V^{(1)}_{cr.div}$ для значений $\gamma < 2$ имеет место явление дивергенции, сопровождающееся «выпучиванием» всей пластинки, а для значений $\gamma \geq 2$ имеет место локализованная дивергенция в окрестности свободного края $x = 0$ прямоугольной пластинки – «выпучивается» только часть пластинки-полосы вдоль окрестности свободного края. Наличие инерционной массы m_c не влияет на значение $V^{(1)}_{cr.div}$ (табл.1, 2), а влияет только на интенсивность возрастания прогибов пластинки: с увеличением m_c снижается интенсивность возрастания прогибов пластинки при потере статической устойчивости.

5.2. Пусть $k_n = \infty$ ($\chi_n > 0$, $\delta_n = 0$): вдоль свободной кромки $x = 0$ приложены только сосредоточенные инерционные моменты I_c, а инерционные массы m_c отсутствуют. Характеристическое уравнение (2.15) запишется в виде

$$\chi_n A_1 \lambda^2 + A_3 = 0, \tag{5.8}$$

где A_1 и A_3 определяются, соответственно, выражениями (2.18) и (2.20) , а χ_n – выражением (2.16): $\chi_n = I_c\, b \cdot (\pi n D)^{-1}$.

Корни уравнения (5.8) равны

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-A_3 \cdot \left(\chi_n \cdot A_1\right)^{-1}}\ . \tag{5.9}$$

Область устойчивости возмущённого движения пластинки $M_0 \in M$ в рассматриваемом случае определяется соотношением

$$A_1 \cdot A_3 > 0\,. \tag{5.10}$$

Очевидно, что при условии (5.10) уравнение (5.8) имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. При этом прямоугольная пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого равновесного состояния.

Границами области устойчивости M_0 возмущённого движения прямоугольной пластинки в пространстве её параметров M при условии $\chi_n > 0$ являются гиперповерхности [12]

$$A_3 = 0, \tag{5.11}$$

$$A_1 = 0. \tag{5.12}$$

На гиперповерхности (5.11) характеристическое уравнение (5.8) имеет нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2, а на гиперповерхности (5.12) – пару мнимых корней $\lambda_{1,2}^2 = \pm\infty$.

В силу условия (5.10), области неустойчивости M_1 и M_2, соответственно, определяются следующими соотношениями:

$$A_1 > 0,\ A_3 < 0, \tag{5.13}$$

$$A_1 < 0,\ A_3 > 0, \tag{5.14}$$

откуда следует, что в областях неустойчивости M_1 и M_2 характеристическое уравнение (5.8) имеет два действительных корня: $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 > 0$. Это означает, что прогибы пластинки будут монотонно возрастать по экспоненциальному закону.

На границе области устойчивости M_0

$$A_1 > 0,\ A_3 = 0 \tag{5.15}$$

возмущённое движение пластинки теряет статическую устойчивость: имеет место дивергенция. Критические скорости $V_{\text{cr.div}}$, найденные подстановкой значений первого корня $q_0^{(1)} = q_0^{(1)}(n, \gamma, \nu)$ уравнения (5.15) в формулу (2.11), разграничивают области устойчивости M_0 и дивергентной неустойчивости M_1 возмущённого движения пластинки.

В силу совпадения уравнений (3.7), (5.7) и (5.15), $V_{\text{cr.div}}$ равны значениям критических скоростей дивергенции $V_{\text{cr.div}}^{(1)}$, приведённым для $\gamma < 2$ и $\gamma \geq 2$, соответственно, в табл. 1 и 2, соответствующим случаям, в которых $m_\text{c} = 0$ и $I_\text{c} = 0$ [11], $m_\text{c} \neq 0$ и $I_\text{c} \neq 0$ (разд. 4), $m_\text{c} \neq 0$ и $I_\text{c} = 0$ (разд. 5.1). Следовательно, наличие I_c не влияет на критическую скорость дивергенции $V_{\text{cr.div}}^{(1)}$ (табл. 1, 2). С увеличением скорости потока газа при значениях $V \geq V_{\text{cr.div}}^{(1)}$ происходит «мягкий» переход через нуль – точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ задачи (2.2), (2.3), вызывающий плавное изменение характера возмущённого движения от устойчивости (пластинка совершает гармонические колебания) к дивергентной неустойчивости (пластинка меняет форму: при всех $\gamma < 2$ «выпучивается» вся поверхность пластинки с ограниченной скоростью «выпучивания»; при всех $\gamma \geq 2$ «выпучивается» только окрестность вдоль свободного края $x = 0$ пластинки, а остальная часть поверхности пластинки остаётся почти плоской – локализованная дивергенция в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки).

Из выражений (2.16) и (5.9) следует, что с увеличением I_c, при фиксированных значениях остальных параметров, корни $\lambda_{1,2}$ по модулю уменьшаются. А стало быть, при скоростях $V \geq V_{\text{cr.div}}$ с увеличением I_c интенсивность возрастания прогибов пластинки снижается.

На границе области устойчивости M_0

$$A_1 = 0\,, \quad A_3 > 0 \tag{5.16}$$

возмущённое движение также теряет статическую устойчивость. Критические скорости $\tilde{V}_{\text{cr.div.}}$, разграничивающие области устойчивости M_0 и неустойчивости M_2, легко определяются подстановкой первого корня $q^{(1)}$ уравнения $A_1 = 0$ в выражение (2.11). Однако переход через границу областей M_0 и M_2 вызывает не плавное, а скачкообразное (мгновенное) изменение характера движения от устойчивых движений с $\lambda^2 = -\infty$ к неустойчивым движениям с $\lambda^2 = \infty$ с бесконечной скоростью «выпучивания» – перескок. Такой переход обычно сопровождается разрушением пластинки.

В соответствии с соотношениями (2.11) и (2.18), очевидно, что приведённая скорость $\tilde{V}_{\text{cr.div.}} D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ не зависит от ν и k_n, а зависит только от n и γ.

Численные расчёты показали, что уравнение $A_1 = 0$ имеет решение только при значениях $\gamma \leq 0.9$; при $\gamma > 0.9$ имеем $A_1 > 0$. Тогда, в соответствии с соотношениями (5.10), (5.15) и (5.16), следует, что переход из области M_0 в область M_2 возможен только для значений $\gamma \leq 0.9$, а для значений $\gamma > 0.9$ имеет место только переход из области M_0 в область M_1, сопровождающийся «мягкой» потерей статической устойчивости при скоростях $V \geq V_{\text{cr.div}}$ (табл. 1, 2).

В этом случае, также для всех $\gamma \leq 0.9$ критическая скорость $\tilde{V}_{\text{cr.div}} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ достигает наименьшего значения при $n = 1$.

Значения критических скоростей $\tilde{V}_{\text{cr.div.}} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$, соответствующие переходу из области M_0 в область M_2, приведены в табл.5.

Таблица 5

γ	0.01	0.1	0.5	0.6	0.9
$\tilde{V}_{cr.div} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$	6.36	6.86	28.49	45.04	1250.97

Из сопоставления значений критических скоростей $V_{\text{cr.div.}} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ (табл. 1) и $\tilde{V}_{\text{cr.div.}} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ (табл.5) очевидно, что $V_{\text{cr.div.}} \leq \tilde{V}_{\text{cr.div.}}$

В соответствии с выражением (5.9), в рассматриваемом случае динамическая потеря устойчивости невозможна.

Таким образом, в случае, в котором $k_n = \infty$ ($\chi_n > 0$, $\delta_n = 0$), имеет место только статическая потеря устойчивости, а динамическая потеря устойчивости невозможна. При скоростях потока газа $V \geq V_{\text{cr.div.}}$ имеет место «мягкая» потеря статической устойчивости: дивергенция при всех $\gamma < 2$ и локализованная дивергенция в окрестности свободного края пластинки при всех $\gamma \geq 2$. При этом, критическая скорость дивергенции $V_{\text{cr.div.}}$ зависит от параметров γ и ν (табл.1,2). При скоростях потока газа $V \geq \tilde{V}_{\text{cr.div.}}$ для всех $\gamma \leq 0.9$ имеет место «мгновенная» потеря статической устойчивости – «перескок», приводящая к разрушению пластинки. Критическая скорость дивергенции $\tilde{V}_{\text{cr.div.}}$ зависит только от параметра γ (табл.5).

Из сопоставления значений $V_{\text{cr.div.}}$ и $\tilde{V}_{\text{cr.div.}}$ при равных значениях параметра γ, приведённых в табл.1, 2 и 5, соответственно, очевидно, что $V_{\text{cr.div.}} < \tilde{V}_{\text{cr.div.}}$.

Наличие сосредоточенного инерционного момента поворота I_{c} ($\chi_n > 0$), приложенного вдоль свободной кромки пластинки, влияет на интенсивность нарастания прогиба при монотонном «выпучивании»: с увеличением χ_n интенсивность уменьшается.

5.3. Рассмотрим случай, в котором $a \gg b$.

Легко показать, что в этом случае характеристическое уравнение (2.15) преобразуется к виду

$$\chi_n \delta_n \lambda^4 + (a_{11}\chi_n + a_{21}\delta_n)\lambda^2 + a_{31} = 0\,, \tag{5.17}$$

где

$$a_{11} = \sqrt{2(q+1)} \cdot \left(q - \sqrt{q^2 - 1}\right); \quad a_{21} = \sqrt{2(q+1)}\,; \tag{5.18}$$

$$a_{31} = 2(q+1)\left(q - \sqrt{q^2 - 1} - \nu\right) - (1-\nu)^2\,;$$

$$\chi_n = I_c\, b \cdot (\pi n D)^{-1}\,,\ \delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3}\,,\ \chi_n > 0\,, \quad \delta_n > 0\,; \tag{5.19}$$

ν – коэффициент Пуассона.

В силу условий (5.19), очевидно, что для всех $q > 1$

$$a_{11}\chi_n + a_{21}\delta_n > 0\,. \tag{5.20}$$

Область устойчивости D_0 в соответствии с условием (5.20) определяется соотношениями

$$a_{31} > 0\,, \quad \Delta > 0\,. \tag{5.21}$$

Здесь

$$\mathit{\Delta} = (a_{11}\chi_n + a_{21}\delta_n)^2 - 4\chi_n \delta_n a_{31} \tag{5.22}$$

– дискриминант биквадратного уравнения (5.17).

Непосредственной подстановкой выражения (5.18) в соотношение (5.22) можно убедиться, что

$$\mathit{\Delta} > 0 \tag{5.23}$$

при всех $q > 1$, $\chi_n > 0$, $\delta_n > 0$.

В самом деле, подставляя выражения (5.18) в соотношение (5.22), после несложных преобразований получаем очевидное неравенство:

$$\Delta = 2(q+1)\left((q-\sqrt{q^2-1})\chi_n - \delta_n\right)^2 + 8(q+1)\chi_n\delta_n\nu + (1-\nu)^2\chi_n\delta_n > 0,$$

поэтому, границей области устойчивости M_0 в рассматриваемом случае, в котором $a \gg b$, является только гиперповерхность

$$a_{31} = 0, \tag{5.24}$$

на которой характеристическое уравнение (5.17) имеет нулевой корень $\lambda_{1,2} = \lambda_0 = 0$ кратности 2 и пару чисто мнимых корней $\lambda_{3,4} = \pm i\omega$.

Условие (5.24) определяет потерю устойчивости возмущённого движения пластинки дивергентного вида (наличие нулевого корня $\lambda_0 = 0$) при переходе из области устойчивости M_0 в область дивергенции M_1.

В силу условий (5.20), (5.21) и (5.23) область неустойчивости M_1 определяется соотношением

$$a_{31} < 0, \tag{5.25}$$

откуда следует, что в области неустойчивости M_1 характеристическое уравнение (5.17) имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ и два действительных корня $\lambda_3 < 0$, $\lambda_4 > 0$ (из двух собственных движений пластинки одно затухает, а другое неограниченно отклоняется по экспоненциальному закону): пластинка монотонно «выпучивается».

На границе области устойчивости M_0

$$a_{11}\chi_n + a_{21}\delta_n > 0,\ \ \Delta > 0,\ \ a_{31} = 0 \tag{5.26}$$

возмущённое движение пластинки теряет статическую устойчивость: имеет место дивергенция. Критические скорости $\tilde{V}_{\text{cr.div}}$, разграничивающие области устойчивости M_0 и дивергентной неустойчивости M_1 возмущённого движения пластинки, находятся подстановкой в формулу (2.12) значений первого корня $q_0^{(1)} = q_0^{(1)}(\nu)$ уравнения (5.24): $a_{31} = 0$ или уравнения

$$2(q+1)\left(q-\sqrt{q^2-1}-\nu\right) - (1-\nu)^2 = 0 \tag{5.27}$$

в соответствии с соотношением (5.18).

В рассматриваемом случае, как показывают проведённые численные результаты, приведённая критическая скорость $\tilde{V}_{\text{cr.div}} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ достигает наименьшего значения при $n = 1$, которому соответствует $k_n = k_1 = \chi_1 \cdot \delta_1^{-1}$.

В соответствии с соотношениями (2.12) и (5.27), очевидно, что $\tilde{V}_{\text{cr.div}} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ не зависит от коэффициентов χ_1 и δ_1, а зависит только от коэффициента Пуассона ν: коэффициенты χ_1 и δ_1 влияют на интенсивность нарастания «выпучивания».

При скоростях потока $V \geq \tilde{V}_{\text{cr.div}}$ происходит «мягкий» переход через нуль – точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ задачи (2.2), (2.3), вызывающий плавное изменение характера возмущённого движения от устойчивости (пластинка совершает гармонические колебания) к дивергентной неустойчивости (пластинка меняет форму – «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания»).

В силу совпадения уравнений (4.3) и (5.27), а также дисперсионного уравнения, полученного в работе [8] при исследовании задачи устойчивости обтекаемой сверхзвуковым потоком газа пластины-полосы $(a \to \infty, \gamma \to \infty)$, в рассматриваемом случае ($a \gg b$) критические скорости дивергенции $\tilde{V}_{\text{cr.div}}$ равны значениям критических скоростей дивергенции $V_{\text{cr.div}}$ (табл. 2), соответствующим случаям, в которых $m_{\text{c}} \neq 0$, $I_{\text{c}} \neq 0$, $\gamma \geq 2$ (разд.4) и $m_{\text{c}} = 0$, $I_{\text{c}} = 0$, $a \to \infty (\gamma \to \infty)$ [8] соответственно. Отсюда следует, что при скоростях $V \geq \tilde{V}_{\text{cr.div}}$ имеет место локализованная дивергентная неустойчивость в окрестности свободного края $x = 0$ прямоугольной пластинки: «выпучивается» только окрестность вдоль свободного края $x = 0$ пластинки, а остальная часть поверхности пластинки остаётся почти плоской. При этом, критическая скорость $\tilde{V}_{\text{cr.div}} \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ зависит только от коэффициента Пуассона ν: она меньше в пластинках из материалов с бóльшим коэффициентом Пуассона ν (табл. 2).

Таким образом, в случае $a \gg b$ прямоугольная пластинка теряет устойчивость только в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$ при скоростях потока $V \geq \tilde{V}_{\text{cr.div}}$: $\tilde{V}_{\text{cr.div}} = V_{\text{cr.div}}$ (табл. 2). Критическая скорость локализованной дивергенции $\tilde{V}_{\text{cr.div}}$ зависит только от коэффициента Пуассона ν: $\tilde{V}_{\text{cr.div}}$ меньше в пластинках из материалов с бóльшим коэффициентом Пуассона ν. Коэффициенты χ_1 и δ_1, характеризующие сосредоточенные инерционные моменты I_{c} и массы m_{c}, соответственно, влияют на показатель экспоненты собственного движения пластинки, которым определяется интенсивность нарастания «выпучивания».

5.4. Рассмотрим случай, в котором $a \ll b$. Проведённые численные исследования характеристического уравнения (2.15) показали, что её решения, соответствующие этому случаю, удовлетворяют условию

$$q \gg 1. \tag{5.28}$$

Учитывая условие (5.28), характеристическое уравнение (2.15) для всех $r > 0$ можно преобразовать к виду

$$a_{02}\tilde{\chi}_n\tilde{\delta}_n\lambda^4 + (a_{12}\tilde{\chi}_n + a_{22}\tilde{\delta}_n)\lambda^2 + a_{32} = 0\,, \tag{5.29}$$

где

$$a_{02} = (1 - \exp(-r)) \cdot (0.5 + 0.5\exp(-r) - \exp(-0.5r)\cos(0.5\sqrt{3}r))\,; \tag{5.30}$$

$$a_{12} = \exp(-0.5r) \cdot (0.5\exp(-1.5r) + \cos(0.5\sqrt{3}r))\,; \tag{5.31}$$

$$a_{22} = 0.5(1+\exp(-2r)) - \exp(-0.5r)\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}r\right) - \qquad (5.32)$$

$$-\exp(-1.5r)\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}r\right);$$

$$a_{32} = \exp(-0.5r)\cdot\left(-0.5\exp(-1.5r) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)\right). \qquad (5.33)$$

Здесь

$$r = \sqrt{2q}\cdot\pi n\gamma\,,\ \ r > 0\,;\ \gamma = ab^{-1};\ \tilde{\chi}_n = I_c a(Dr)^{-1};\ \tilde{\delta}_n = I_\text{c} a^3 (Dr^3)^{-1}. \qquad (5.34)$$

В соответствии с условием (5.28) и обозначением (5.34), выражение (2.11) преобразуется к виду

$$V = r^3 D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}. \qquad (5.35)$$

Можно показать, что

$$a_{02} > 0\,,\ a_{22} > 0 \ \text{ при всех } r > 0\,. \qquad (5.36)$$

Характеристическое уравнение (2.15) для $r = 0$ описывается соотношением

$$\tilde{\tilde{\chi}}\cdot\tilde{\tilde{\delta}}\cdot\lambda^4 + 3\cdot(\tilde{\tilde{\chi}} + \tilde{\tilde{\delta}})\cdot\lambda^2 = 0\,,\ \tilde{\tilde{\chi}} = I_\text{c} aD^{-1},\ \ \tilde{\tilde{\delta}} = m_\text{c} a^3 D^{-1}. \qquad (5.37)$$

Откуда очевидно, что характеристическое уравнение, соответствующее случаю, в котором $V = V_0 = 0$ (или $r = 0$) – необтекаемая пластинка, имеет нулевой корень кратности 2. Это означает, что первое значение критической скорости дивергенции равно нулю: $V^{(1)}_{\text{cr.div}} = V_0 = 0$, откуда следует, что при скоростях потока $V \ge V^{(1)}_{\text{cr.div}}$ (или $V \ge V_0 = 0$) возмущённое движение пластинки является статически неустойчивым при значениях параметров из области статической неустойчивости M_1.

Характеристическое уравнение (5.29) и выражение (5.35) такие же, как, соответственно, дисперсионное уравнение и формула для подсчёта скорости потока в задаче устойчивости обтекаемой сверхзвуковым потоком газа удлинённой пластинки ($0 \le x \le a, 0 \le y < \infty$), набегающим на её свободный край $x = 0$ в предположении, что вдоль свободного края пластинки приложены сосредоточенные инерционные моменты поворота I_c и массы m_c. Следовательно, картина поведения возмущённого движения прямоугольной пластинки в рассматриваемом случае, в котором $a \ll b$, примерно такая же, как и в случае удлинённой пластинки ($b \to \infty$, $\gamma = ab^{-1} = 0$).

Область устойчивости M_0, в соответствии с условиями (5.36), определяется соотношениями

$$a_{12}\tilde{\chi}_n + a_{22}\tilde{\delta}_n > 0\,,\ \ a_{32} > 0\,,\ \ \Delta > 0\,, \qquad (5.38)$$

где

$$\Delta = (a_{12}\tilde{\chi}_n + a_{22}\tilde{\delta}_n)^2 - 4\tilde{\chi}_n\tilde{\delta}_n a_{02}a_{32} \qquad (5.39)$$

– дискриминант биквадратного уравнения (5.29).

Границами области устойчивости M_0 при условии

$$a_{12}\tilde{\chi}_n + a_{22}\tilde{\tilde{\delta}}_n > 0 \qquad (5.40)$$
являются гиперповерхности
$$a_{32} = 0\,, \qquad (5.41)$$
$$\Delta = 0\,. \qquad (5.42)$$
На гиперповерхности (5.41) характеристическое уравнение (5.29) имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2; а на гиперповерхности (5.42) характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$.

Учитывая условие $a_{02} > 0$, области неустойчивости M_1, M_2, M_3 для всех $r > 0$ определяются, соответственно, соотношениями
$$a_{32} < 0\,, \quad \Delta > 0\,; \qquad (5.43)$$
$$a_{12}\tilde{\chi}_n + a_{22}\tilde{\tilde{\delta}}_n < 0\,, \quad a_{32} > 0\,, \quad \Delta > 0\,, \qquad (5.44)$$
$$a_{32} > 0\,, \quad \Delta < 0\,. \qquad (5.45)$$
На границе области устойчивости M_0
$$a_{12}\tilde{\chi}_n + a_{22}\tilde{\tilde{\delta}}_n > 0\,, \quad \Delta > 0\,, \quad a_{32} = 0 \qquad (5.46)$$
возмущённое движение пластинки теряет статическую устойчивость.

На границе области неустойчивости M_1
$$a_{12}\tilde{\chi}_n + a_{22}\tilde{\tilde{\delta}}_n < 0\,, \quad \Delta > 0\,, \quad a_{32} = 0 \qquad (5.47)$$
возмущённое движение прямоугольной пластинки в рассматриваемом случае, в котором $a \ll b$, становится более статически неустойчивым: при скоростях потока $V \geq V_{\text{cr.div}}$ из области дивергентной неустойчивости M_1 попадаем в область M_2, определяемую условиями (5.44), в которой явление дивергенции более ярко выражено. В области M_2 характеристическое уравнение имеет четыре действительных корня λ_i, среди которых два корня положительные ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$).

Из соотношений (5.38), (5.43), (5.44), (5.46) и (5.47) очевидно следует, что в зависимости от значения $k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1}$ критические скорости дивергенции $V_{\text{cr.div}}$ разграничивают либо области M_0, M_1, либо области M_1, M_2 соответственно. При этом, в обоих случаях критические скорости $V_{\text{cr.div}}$ определяются по формуле (5.35) подстановкой в неё корней уравнения (5.41) или
$$\left(-0.5\exp(-1.5r) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)\right) = 0 \qquad (5.48)$$
в соответствии с обозначением (5.33), и не зависят от $k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1}$ и коэффициента Пуассона ν.

Подставляя первые три корня $r^{(1)}$, $r^{(2)}$, $r^{(3)}$ уравнения (5.48) в формулу (5.35), получаем соответствующие значения критической скорости дивергенции:
$$V_{\text{cr.div}}^{(1)} = 0\,,\ V_{\text{cr.div}}^{(2)} = 74.09\,D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}\,,\ V_{\text{cr.div}}^{(3)} = 474.55\,D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}\,. \qquad (5.49)$$

Отсюда, очевидно, следует, что возмущённое движение обтекаемой пластинки при скоростях потока газа $V < V_{\text{cr.div}}^{(2)}$ является статически неустойчивым.

В соответствии с условиями (5.43)–(5.45), при обтекании пластинки потоком газа и достижении скорости потока значений $V \geq V_{\text{cr.div}}^{(2)}$ в зависимости от значений $k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1}$ происходит плавный переход возмущённого движения пластинки либо из области статической неустойчивости M_1 в область устойчивости M_0, либо в область M_2 – область более ярко выраженной статической неустойчивости.

На границе области устойчивости M_0

$$a_{12}\tilde{\chi}_n + a_{22}\tilde{\delta}_n > 0\,, \quad a_{32} > 0\,, \quad \Delta = 0 \tag{5.50}$$

и на границе области статической неустойчивости M_2

$$a_{12}\tilde{\chi}_n + a_{22}\tilde{\delta}_n < 0\,, \quad a_{32} > 0\,, \quad \Delta = 0 \tag{5.51}$$

возмущённое движение пластинки теряет динамическую устойчивость: переходит в область флаттерной неустойчивости M_3.

Из соотношений (5.50) и (5.51) очевидно следует, что при динамической потере устойчивости приведённые критические скорости $V_{\text{cr.fl}} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ и $\tilde{V}_{\text{cr.fl}} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$, соответствующие переходам из области M_0 в область M_3, либо из области M_2 в область M_3 соответственно, зависят только от $k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1}$.

Можно показать, что, примерно, при значениях $k_n \in [2,10]$ и скоростях потока $V \geq V_{\text{cr.div}}^{(2)}$ происходит «мягкий» переход из области M_1 в область M_0. А при дальнейшем увеличении скорости – при скоростях потока $V \geq V_{\text{cr.}fl}$ происходит «мягкий» переход из области M_0 в область M_3, при котором гармонические колебания пластинки плавно переходят во флаттерные колебания – колебания по нарастающей амплитуде.

При значениях $k_n \in (10,\infty)$ и скоростях потока $V \geq V_{\text{cr.div}}^{(2)}$ происходит «мягкий» переход из области M_1 в область M_2. А при дальнейшем увеличении скорости – при скоростях потока газа $V \geq \tilde{V}_{\text{cr.}fl}$ происходит «мягкий» переход из области M_2 в область M_3, при котором наряду с монотонным «выпучиванием» пластинки, не имеющего колебательного характера, происходит плавный переход к флаттерным колебаниям. При $k_n \gg 1$ переход из области M_2 в область M_3 невозможен ($V_{\text{cr.}fl} = \infty$), что подтверждается численными расчётами.

Проведённые численные исследования показали следующее.

В рассматриваемом случае ($a \ll b$) критические скорости дивергенции $V_{\text{cr.div}}$ и флаттера $V_{\text{cr.fl}}$, также, как и в остальных случаях, достигают наименьшего значения при $n = 1$ и, соответственно, при $k_n = k_1$.

При значениях $k_1 < 2$ возможна только лишь потеря статической устойчивости возмущённого движения прямоугольной пластинки. В соответствии с выражениями

(5.49), при скоростях $V \geq V_{\text{cr.div}}^{(2)}$ происходит переход из области статической неустойчивости M_1 в область статической устойчивости M_0. При увеличении скорости потока газа – при скоростях $V \geq V_{\text{cr.div}}^{(3)}$ – из области M_0 переходим в область M_1. При дальнейшем увеличении скорости потока газа переходы из области M_0 в область M_1 и обратно чередуются.

При значениях $k_1 \in [2,10]$ и скоростях потока $V \geq V_{\text{cr.div}}^{(2)}$ из области статической неустойчивости M_1 происходит «мягкий» переход в область устойчивости M_0, а при дальнейшем увеличении скорости потока газа – при скоростях $V \geq V_{\text{cr.}fl}$ происходит «мягкий» переход из области M_0 в область динамической неустойчивости M_3 (гармонические колебания пластинки плавно переходят в автоколебания – флаттерные колебания).

При значениях $k_1 > 10$ и скоростях потока $V \geq V_{\text{cr.div}}^{(2)}$ из области статической неустойчивости M_1 происходит «мягкий» переход в область M_2 – область, в которой статическая неустойчивость более ярко выражена, а при дальнейшем увеличении скорости потока газа – при скоростях $V \geq \tilde{V}_{\text{cr.}fl}$ – происходит «мягкий» переход из области M_2 в область динамической неустойчивости M_3 (наряду с монотонным «выпучиванием» пластинки происходит плавный переход к колебаниям по нарастающей амплитуде – к флаттерным колебаниям).

В табл. 6 и 7 представлены значения приведённых критических скоростей флаттера $V_{\text{cr.}fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ и $\tilde{V}_{\text{cr.}fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ с точностью до 10^{-3}, соответствующие некоторым значениям $k_1 \in [2,10]$ и $k_1 > 10$ соответственно.

Таблица 6

k_1	2	3	5	7	10
$V_{\text{cr.fl}} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$	91.12	75.67	76.49	76.94	78.57

Таблица 7

k_1	15	30	50	100	300
$\tilde{V}_{\text{cr.div}} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$	85.18	91.13	103.82	125.04	132.65

Из сопоставления значений критических скоростей флаттера (табл. 1 и 2) видно, что $V_{\text{cr.}fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ и $\tilde{V}_{\text{cr.}fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ одного порядка. При этом, приведённая критическая скорость флаттера достигает наименьшего значения при $k_1 = 3$.

Таким образом, в случае, в котором $a \ll b$, поведение возмущённого движения прямоугольной пластинки аналогично поведению возмущённого движения удлинённой пластинки ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y < \infty$): при отсутствии обтекания

($V = V_0 = 0$) возмущённое движение является статически неустойчивым. При обтекании поведение возмущённого движения пластинки зависит от значения k_1 – коэффициента отношения относительных величин сосредоточенных инерционных моментов I_c и масс m_c, приложенных вдоль свободного края $x = 0$ пластинки, соответствующего одной полуволне ($n = 1$). При скоростях потока $V \geq V^{(2)}_{\text{cr.div}} \approx 74.09\, D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}$ возмущённое движение пластинки становится либо устойчивым ($k_1 \leq 10$), либо более ярко выраженным статически неустойчивым ($k_1 > 10$).

При дальнейшем увеличении скорости потока газа для всех $k_1 < 2$ при скоростях потока газа $V \geq V^{(3)}_{\text{cr.div}} \approx 474.55\, D(a_0\rho_0 a^3)$ возмущённое движение пластинки из области устойчивости переходит в область статической неустойчивости. При дальнейшем увеличении скорости потока газа переходы из области M_0 в область M_1 чередуются. При скоростях потока $V \geq V_{\text{cr.}fl}$ для всех $k_1 \in [2,10]$ происходит «мягкий» переход из области M_0 в область динамической неустойчивости M_3 (гармонические колебания пластинки плавно переходят в автоколебания – флаттерные колебания). При скоростях потока $V \geq \tilde{V}_{\text{cr.fl}}$ для всех $k_1 > 10$ происходит «мягкий» переход из области M_2 в область динамической неустойчивости M_3 (наряду с монотонным «выпучиванием» пластинки происходит плавный переход к колебаниям по нарастающей амплитуде – к флаттерным колебаниям).

6. Основные результаты.

С помощью графо-аналитических и численных методов исследования исходной задачи устойчивости прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, в предположении, что вдоль свободного края пластинки имеются сосредоточенные инерционные моменты и массы, описываемой соотношениями (1.1)–(1.3), получены следующие основные результаты.

Найдены интервалы изменения значений $k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1}$ и $\gamma = ab^{-1}$ – отношения коэффициентов, характеризующих сосредоточенные инерционные моменты поворота и массы, приложенные вдоль свободного края пластинки, и отношение ширины пластинки к её длине соответственно, при которых имеет место потеря устойчивости возмущённого движения прямоугольной пластинки относительно невозмущённой формы равновесия.

Установлено, что для всех $\gamma \in (0,\infty)$ имеет место статическая потеря устойчивости – явление дивергенции, приводящее к монотонному «выпучиванию» поверхности пластинки, критическая скорость которой достигает наименьшего значения при $n = 1$ (при одной полуволне). При этом, для всех $\gamma \in (0,2)$ критическая скорость дивергенции не зависит от $k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1}$, а зависит от $\gamma = ab^{-1}$ – отношения сторон пластинки и от коэффициента Пуассона ν: $V_{\text{cr.div}}$ меньше в пластинках из материалов с бóльшим коэффициентом Пуассона ν, а с возрастанием γ критическая скорость дивергенции растёт (табл.1). Для всех $\gamma \geq 2$ имеет место явление локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки, критическая скорость которой $V_{\text{loc.div}}$ зависит только от коэффициента Пуассона ν: она меньше в пластинках из материалов с бóльшим коэффициентом Пуассона ν (табл.2).

Для всех $\gamma \in [0.0001, 0.72]$ и $k_n \geq 0.001$ при скоростях потока газа $V \geq V_{\text{cr.}fl}$ и $V \geq \tilde{V}_{\text{cr.}fl}$ имеет место динамическая потеря устойчивости – явление флаттера, приводящее к возникновению колебаний по нарастающей амплитуде – автоколебаний флаттерного типа в системе «пластинка – поток». Значения критических скоростей флаттера для некоторых значений параметров представлены в табл. 3 и 4. Следует отметить, что критические скорости флаттера достигают наименьшего значения при $n=1$, которому соответствует $k_n = k_1$. При этом, для всех значений $\gamma \in [0.2, 0.72]$, $k_1 \in [0.1, 200]$ и коэффициента Пуассона ν при скоростях потока газа $V \geq V_{\text{cr.}fl}$ (табл. 3) происходит плавный переход от гармонических колебаний пластинки к флаттерным колебаниям; для всех значений $\gamma \in [0.0001, 0.6]$, $k_1 \in [0.001, 10]$ и ν при $V \geq \tilde{V}_{\text{cr.}fl}$ (табл.4) наряду с монотонным «выпучиванием» пластинки, не имеющего колебательного характера, происходит плавный переход к флаттерным колебаниям.

Из сопоставления значений критических скоростей флаттера (табл. 3, 4) видно, что $V_{\text{cr.}fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ и $\tilde{V}_{\text{cr.}fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$, примерно, одного порядка. При этом, когда $k_1 = 0.1$, приведённая критическая скорость флаттера $V_{\text{cr.}fl} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$ достигает наименьшего значения. Следовательно, граница перехода из области устойчивости M_0 в область динамической неустойчивости M_3 является «опасной» в смысле Н.Н. Баутина [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432с.
2. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247с.
3. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. //ПММ. 1956. Т.20. № 6. С.733–755.
4. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе.// Изв. АН СССР. ПММ. 1956. Т.20. № 2. С.211–222.
5. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961. 329с.
6. Коненков Ю.К. Об изгибной волне «релеевского» типа. // Акустический журнал. 1960. Т.6. № 1. С.124–126.
7. Белубекян М.В. Задачи локализованной неустойчивости пластинки. // В сб.: «Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности». Ереван: Изд-во ЕГУ, 1997. С. 95–99.
8. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip Streamlined by Supersonic Gas Flow. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. №1. С.29–34.
9. Мартиросян С.Р. Об устойчивости прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа.// Тр. III Международной научной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посвящённой

100-летию со дня рождения академика НАН РА Н.Х. Арутюняна; 8-12 октября, Цахкадзор –2012 (Армения), Т. 2, с. 29–34.
10. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Об одной задаче устойчивости прямоугольной пластинки с двумя свободными краями в сверхзвуковом потоке газа, набегающим на её свободный край.// Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. № 4. С.55–64.
11. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагружённый следящей силой. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1985. Т.38. № 5. С.33–44.
12. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176с.
13. Багдасарян Г.Е. Об устойчивости пологих оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. //Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. Т.1. № 1. С.92–98.
14. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О., Марзока П. Влияние сверхзвукового потока на характер амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний гибкой пластинки. // Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. № 3. С.24-38.
15. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1978. 832с.

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – кандидат физ-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 521503, (+374 10) 580096
E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 14.10.2013