

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 13

МАЙ, 1977

ВЫПУСК 2

ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ В КВАЗИИЗОТРОПНОМ ТОЛМЕНОВСКОМ РЕШЕНИИ

А. Г. ПОЛНАРЕВ

Поступила 16 июля 1976

В рамках общего квазиизотропного толменовского решения получено частное непрерывное решение, описывающее процесс образования черной дыры во фридмановской Вселенной и дальнейшую аккрецию на нее пылевого вещества.

1. *Постановка задачи.* На ранних стадиях расширения Вселенной могли существовать сильные локальные возмущения метрики, которые приводили бы к возникновению первичных (реликтовых) черных дыр. В отличие от черных дыр, возникающих в результате эволюции звезд, масса первичных черных дыр может лежать в широких пределах, начиная от 10^{-5} г и кончая гигантскими черными дырами в ядрах галактик и в квазарах.

В последнее время появился ряд работ, в которых обсуждается возможный спектр масс черных дыр [1] и наблюдательные ограничения на их число [2].

Представляет особый интерес количественное исследование процесса образования черных дыр.

Если допустить, что на ранних стадиях расширения Вселенной уравнение состояния вещества $P = \varepsilon/3$, то необходимо при расчете принимать во внимание сильные градиенты давления. По этой причине расчет образования черных дыр требует привлечения сложных машинных расчетов. Возможность автомодельных решений исследовалась Хоукингом и Карром [3].

Задача существенно упрощается, если рассматривать ситуацию, когда уравнение состояния $P=0$. Решение такой задачи для пыли представляет собой методический интерес, позволяя выявить важные количественные и качественные закономерности образования черных дыр. Ограничимся рассмотрением сферически-симметричного случая. Тогда можно воспользо-

ваться известным общим решением Толмена (см., например, [4]). Построив решение, соответствующее образованию черной дыры в рамках идеализированного толменовского решения, мы сможем в дальнейшем глубже понять более реалистичный случай $P = \varepsilon/3$. Кроме того, следует отметить, что уравнение состояния $P = 0$ в принципе может иметь место на ранних стадиях расширения Вселенной. Такую возможность предсказывает теория Хагедорна [5]. Особый интерес при анализе образования черной дыры представляет квазиизотропное решение (см. [4], а также [5]). Как отмечается в [5], кажется заманчивой картина Вселенной, различные части которой вблизи сингулярности имеют различную кривизну, но тем не менее расширяются подобно модели Фридмана. Квазиизотропное решение не противоречит современному состоянию Вселенной и дает полное описание развития возмущений, начиная от самой сингулярности. При этом возмущения метрики не обязательно предполагать малыми. К достоинствам квазиизотропного решения следует добавить следующие обстоятельства.

1. Квазиизотропное решение совместимо с весьма красивой гипотезой о равномерном распределении (см. [5]).

2. Оно согласуется с теорией рождения частиц вблизи космологической сингулярности [6, 7]. Если бы даже решение было первоначально не квазиизотропным, то рождение частиц быстро вывело бы его на квазиизотропный режим, поскольку родившиеся частицы стремятся уничтожить локальную анизотропию расширения.

2. *Непрерывное толменовское квазиизотропное решение, описывающее образование черной дыры.* Общее толменовское решение (см. [4]) имеет вид ($c = 1$):

$$ds^2 = dt^2 - e^{\lambda} dR^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (1)$$

Здесь r — эйлеров радиус, R — лагранжев радиус.

$$e^{\lambda} = \frac{r'^2}{1 + f(R)}, \quad (2)$$

$$\varepsilon = \frac{F'}{8\pi G r^2 r'}, \quad (3)$$

$F(R) = r_g(R)$, т. е. функция F равна гравитационному радиусу вещества, заключенного внутри лагранжева R ; $f(R)$ имеет смысл полной энергии элемента вещества:

$$r = \frac{F}{2|f|} (1 - \cos \tau), \quad t - t_0(R) = \frac{F}{2|f|^{3/2}} (\tau - \sin \tau), \quad (4)$$

если $f < 0$;

$$r = \left(\frac{9F}{4}\right)^{1/3} [t - t_0(R)]^{2/3}, \quad (5)$$

если $f = 0$

и, наконец,

$$r = \frac{F}{2f} (\operatorname{ch} \gamma_1 - 1), \quad t - t_0(R) = \frac{F}{2f^{3/2}} (\operatorname{sh} \gamma_1 - \gamma_1), \quad (6)$$

если $f > 0$.

Квазиизотропное решение получается отсюда, если положить $t_0(R) \equiv \text{const}$. Не теряя общности, положим $t_0(R) \equiv 0$. В асимптотике малых t имеем:

$$r \approx (9F/4)^{1/3} t^{2/3}, \quad (7)$$

$$e^{\gamma} \approx (2/3)^{2/3} \frac{F^{1/2} t^{4/3}}{3F^{4/3} (1+f)}. \quad (8)$$

Тот факт, что e^{γ} и r^2 меняются со временем по одному и тому же закону $\sim t^{4/3}$ и означает, что решение квазиизотропное. При этом в первом приближении плотность $\varepsilon \approx (6\pi G t^2)^{-1}$ не зависит от радиуса R , т. е. в пределе распределение вещества однородно.

Поскольку, как уже отмечалось, функция $f(R)$ имеет смысл полной энергии данного элемента вещества, то сжатие сменит расширение в том и только том случае, если $f(R) < 0$. Поскольку мы рассматриваем пыль $P=0$, то, начав сжиматься, вещество будет продолжать сжиматься до бесконечной плотности, поскольку нет сил давления, препятствующих коллапсу. Следовательно, все вещество, для которого $f(R) < 0$, превратится в черную дыру (подробнее этот вопрос изложен в следующем разделе).

Рассмотрим гладкую шивку участка замкнутого мира внутри с плоским (или открытым) миром снаружи.

Важно подчеркнуть, что после выбора квазиизотропного решения путем задания $t_0(R) = \text{const}$, остается физически произвольной лишь одна функция, являющаяся некоторой комбинацией f и F . Наличие же формально двух произвольных функций f и F означает возможность произвольного выбора масштаба $R^* = R^*(R)$, не меняя при этом физических свойств решения.

Поскольку $g_{11} = e^{\gamma}$ не имеет непосредственного физического смысла, потребуем лишь непрерывности ε и r . Ограничимся пока случаем $f \leq 0$. Запишем r в виде:

$$r = (9F/4)^{1/3} t^{2/3} \Psi^{1/3}(\eta), \quad (9)$$

где

$$\Psi = \frac{2}{9} \frac{(1 - \cos \eta)^3}{(\eta - \sin \eta)^2}, \quad (10)$$

$\lim_{\eta \rightarrow 0} \Psi(\eta) = 1$. При такой записи Ψ является множителем, показывающим отличие замкнутого мира от плоского. Тогда

$$\frac{r'}{r} = \frac{1}{3} \frac{F'}{F} + \left(\frac{\sin \eta}{1 - \cos \eta} - \frac{2}{3} \frac{1 - \cos \eta}{\eta - \sin \eta} \right) \eta', \quad (11)$$

$$\frac{|f|^{3,2}}{F} \left(\frac{F}{|f|^{3/2}} \right)' (\eta - \sin \eta) + (1 - \cos \eta) \eta' = 0. \quad (12)$$

Из (11) и (12) имеем:

$$\frac{r'}{r} = \frac{1}{3} \frac{F'}{F} \left[1 - \frac{\Phi(R) \Pi(\eta)}{f} \right] = \frac{1}{3} \frac{F'}{F} \Omega, \quad (13)$$

где

$$\Phi(R) = 3 \left(f - \frac{3}{2} \frac{f'}{F'} F \right), \quad (14)$$

$$\Pi(\eta) = \frac{\sin \eta (\eta - \sin \eta)}{(1 - \cos \eta)^2} - \frac{2}{3}, \quad (15)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\Pi(\eta)}{f} = \text{const}, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \Omega = 1,$$

$\Omega \equiv 1$, в случае любого однородного мира (открытого, плоского, замкнутого). Поэтому Ω является поправочным множителем, учитывающим отличие неоднородного решения от однородного. Тогда из (3) имеем:

$$6\pi G \varepsilon t^2 = \Psi/\Omega. \quad (16)$$

Отсюда видно, что для непрерывности решения достаточно, чтобы были непрерывными функции f , F и Φ .

Пусть слева при $R < R_-$ имеется замкнутый фридмановский мир (4). (5), тогда:

$$\left. \begin{aligned} f &= -\sin^2 R \\ \bar{F} &= \sin R \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{при } R < R_- \\ &\text{где } \bar{F} = F^{1/3}. \end{aligned}$$

Пусть далее справа при $R > R_+$ имеется плоский фридмановский мир:

$$\left. \begin{aligned} f &= 0 \\ \bar{F} &= C \cdot R \end{aligned} \right\} \text{ при } R > R_+.$$

Константу C найдем из условия:

$$C = \frac{\sin R_0}{R_0}, \text{ где } R_0 = \frac{R_+ + R_-}{2}.$$

Введем переменную $x = \frac{R - R_-}{R_+ - R_-} \equiv \frac{R - R_-}{\Delta}$ и зададим f и F в переходной области (R_-, R_+) следующим образом:

$$\begin{aligned} f &= f_- + x(f_+ - f_-) + x(1-x)(a + bx), \\ \bar{F} &= \bar{F}_- + x(\bar{F}_+ - \bar{F}_-), \\ \Phi &= 3x(1-x)(A + Bx), \\ \bar{F}_+ &= CR_+, \quad f_+ = 0, \\ \bar{F}_- &= \sin R_-, \quad f_- = -\sin^2 R_-. \end{aligned}$$

Аналогичную процедуру можно легко проделать и для открытого мира справа. Коэффициенты a, b, A и B находим из условия, чтобы и справа, и слева $\Phi(R) = 0$. Следовательно:

$$\left. \begin{aligned} f_- - \frac{1}{2} \frac{\bar{F}_-}{\bar{F}_+ + \bar{F}_-} (-f_- + a) &= 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\bar{F}_+}{\bar{F}_+ - \bar{F}_-} (-f_- - b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Отсюда легко найти A и B . Окончательно

$$\begin{aligned} f &= f_- (1-x)^2 (1 + 2\bar{F}_+/\bar{F}_- x) \\ \Phi &= 3f_- x (1-x) \bar{F}_+/\bar{F}_- \left(1 + \frac{3\bar{F}_-}{\Delta} + x \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Далее процедура счета будет такова: фиксируем R (или лучше x), задаем время t , вычисляем соответствующее η , затем находим r и ε . Результаты расчетов приведены в разделе 4.

3. Критерий образования черной дыры и аккреция на черную дыру. Критерием образования черной дыры (возникновение горизонта видимости, см., например, [8]) является то обстоятельство, что любые геодезические линии сходятся. Уравнение нулевой геодезической $ds = 0$. Отсюда

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \pm e^{-\lambda/2},$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{\pm} = \dot{r} + r' \frac{\partial R}{\partial t} = \dot{r} \pm \left[\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{F}{r}\right) \right]^{1/2}.$$

Если $F/r < 1$, то

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{+} > 0, \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)_{-} < 0 \quad \text{при} \quad \dot{r} > 0$$

и

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{+} < 0, \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)_{-} > 0 \quad \text{при} \quad \dot{r} < 0,$$

т. е. одна нулевая геодезическая сходится, а другая расходится.

Ситуация в корне иная, если $F/r > 1$, тогда

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{\pm} > 0, \quad \text{если} \quad \dot{r} > 0$$

и

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{\pm} < 0, \quad \text{если} \quad \dot{r} < 0.$$

Следовательно критерием образования черной дыры является одновременное выполнение неравенств:

$$F/r > 1, \quad \dot{r} < 0.$$

Пользуясь (4), критерий образования черной дыры можно переписать в виде:

$$\cos \eta_1 > 1 + 2f, \quad \pi < \eta_1 < 2\pi, \quad (19)$$

тогда момент достижения горизонтом черной дыры лагранжева радиуса R равен:

$$t_{\text{ч. д.}} = \frac{F}{2|f|^{3/2}} [2\pi - \arccos(1 + 2f) + 2\sqrt{-f^2 + |f|}],$$

$$M_{\text{ч. д.}} = \frac{F}{2G}. \quad (20)$$

(20) дает параметрическую зависимость массы черной дыры от времени. При $t \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \text{const}$, определяемой положением нуля функции f . После первоначального возникновения горизонта происходит аккреция вещества на черную дыру.

4. *Результаты и выводы.* Ниже приводятся рисунки, соответствующие примеру решения со следующими параметрами:

$$R_0 = \pi/2, \quad R_- = 3\pi/8, \quad R_+ = 5\pi/8, \quad \Delta = \pi/4.$$

На рис. 1 приводится зависимость плотности от времени для различных лагранжевых радиусов. Видно, что чем больше R , тем больше момент времени, когда начинается сжатие.

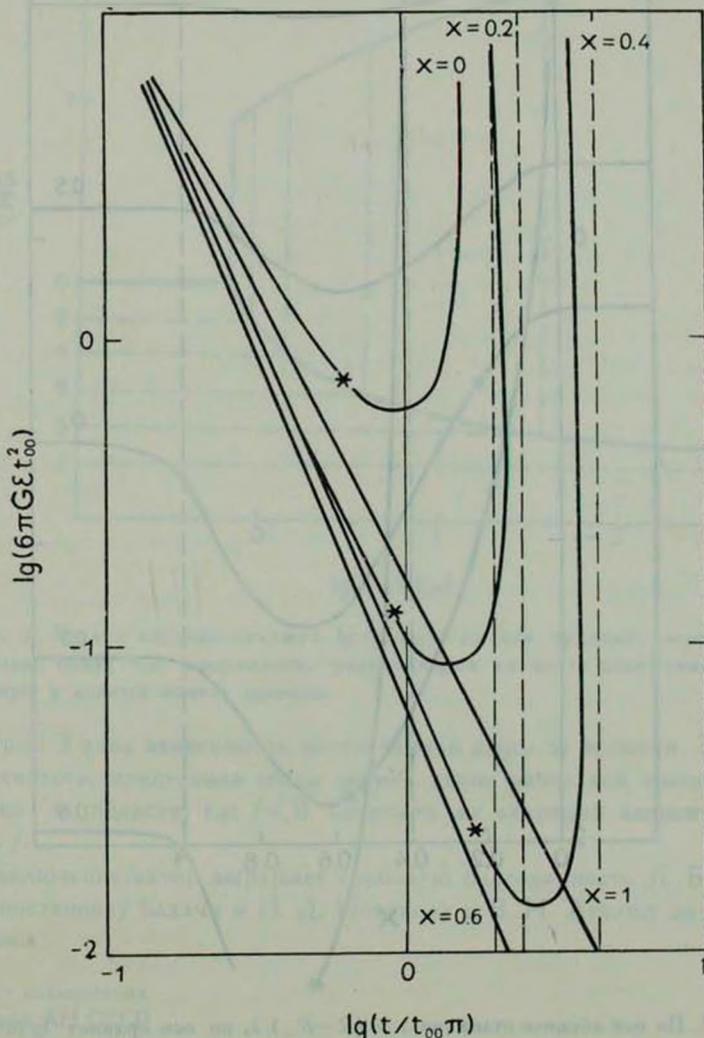


Рис. 1. По оси абсцисс отложен $\lg(t/t_{00}\pi)$, по оси ординат $\lg(6\pi G\epsilon t_{00}^2)$, где $t_{00} = = F_-(2|f_-|)^{3/2}$. Звездочки на кривых указывают момент достижения горизонта черной дыры данного радиуса. Звездочка на кривой $x = 0$ указывает момент образования черной дыры.

На рис. 2 показана картина распределения плотности по радиусу в различные моменты времени. Здесь хорошо видна область разрежения, возникающая в результате того, что часть вещества уходит на бесконеч-

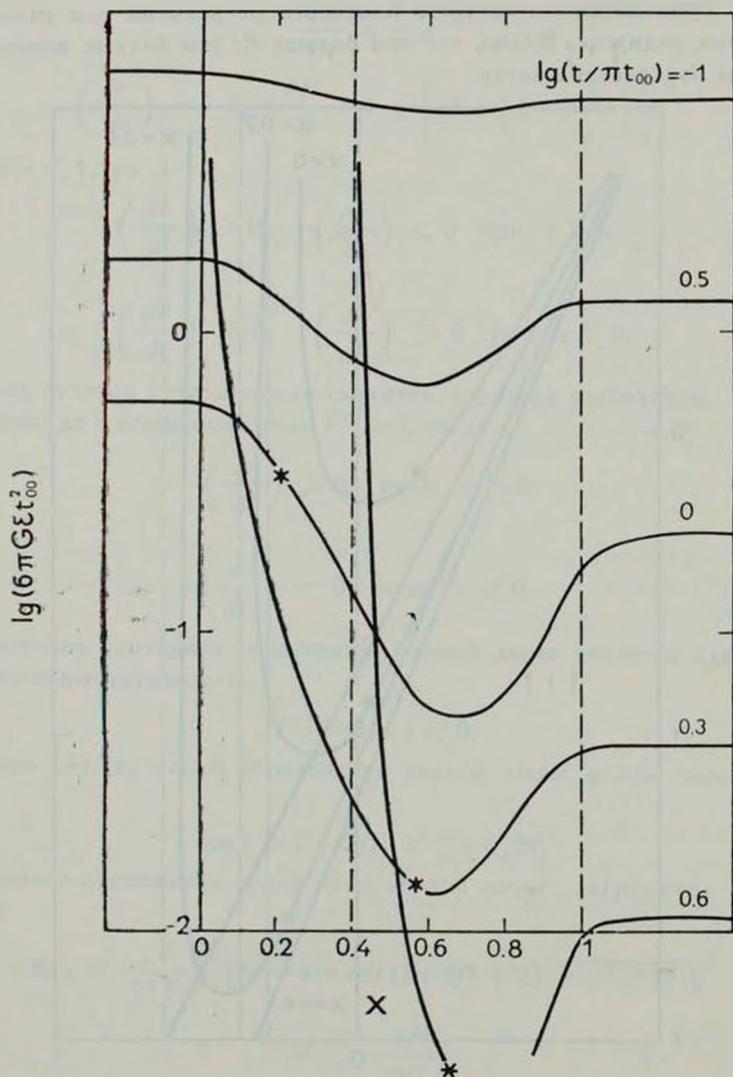


Рис. 2. По оси абсцисс отложено $x = (R - R_-)/\Delta$, по оси ординат $\lg(6\pi G\epsilon t_0^2)$. Звездочки указывают расположение горизонта черной дыры в данный момент времени. Отсутствие звездочки на кривой говорит о том, что в этот момент черная дыра еще не образовалась. Момент $\lg(t/\pi t_{00}) = 0$ соответствует началу сжатия.

ность, а часть падает в черную дыру. Разрежение в плотности описывается множителем Ω в формуле (16).

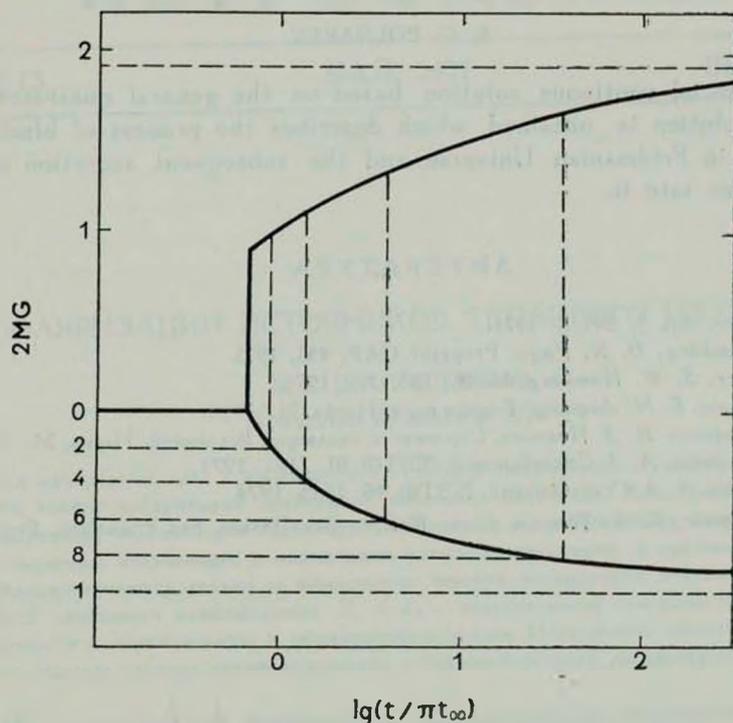


Рис. 3. По оси абсцисс отложено $\lg(t/\pi t_{00})$, по оси ординат: сверху — масса черной дыры, снизу — x , координата, указывающая на место положения горизонта черной дыры в данный момент времени.

На рис. 3 дана зависимость массы черной дыры от времени. Здесь, как уже отмечалось, предельная масса черной дыры равна той массе, которая заключена в области, где $f < 0$. Скорость же аккреции зависит от вида функции f .

В заключение автор выражает глубокую благодарность Я. Б. Зельдовичу за постановку задачи и И. Д. Новикову и В. Н. Лукашу за полезные дискуссии.

Институт космических исследований АН СССР

BLACK HOLES IN THE QUASI-ISOTROPIC
TOLMAN SOLUTION

A. G. POLNAREV

A special continuous solution based on the general quasi-isotropic Tolman solution is obtained which describes the process of black-hole formation in Friedmannian Universe and the subsequent accretion of the dust matter into it.

ЛИТЕРАТУРА

1. *B. J. Carr*, *Ap. J.*, 201, 1, 1975.
2. *S. W. Hawking, D. N. Page*, Preprint OAP, 433, 1975.
3. *B. J. Carr, S. W. Hawking*, *M. N.*, 168, 399, 1974.
4. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Теория поля, Наука, М., 1973.
5. *Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, Строение и эволюция Вселенной, Наука, М., 1975.
6. *Я. Б. Зельдович, А. А. Старобинский*, *ЖЭТФ*, 61, 2161, 1971.
7. *В. Н. Лукаш, А. А. Старобинский*, *ЖЭТФ*, 66, 1515, 1974.
8. *C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Willer*, *Gravitation*, San Francisco, Freeman, 1973.