АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 13 МАЙ, 1977 ВЫПУСК 2

АНИЗОТРОПНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ С КВАДРАТИЧНЫМИ ИНВАРИАНТАМИ

А. А. РУЗМАЙКИН

Поступила 2 августа 1976

Диктуемая квантовой теорией модификация уравнений ОТО вблизи космологической сингулярности может быть частично реализована путем добавления к лагранжиану гравитационного поля членов, квадратичных по тензору кривизны. В такой теории в общем анизотропном случае имеются решения, обладающие регулярным минимумом в $t=0$. Однако, как показывает анализ простейшей анизотропной метрики, они не обладают степенной асимптотикой при больших t. Учет логарифмических членов $R_2 \ln R$ по крайней мере в изотропном случае, мало меняет ситуацию. Для решения вопроса о возможности устранения космологической сингулярности с переходом на степенную асимптотику необходим самосогласованный учет эффекта рождения частиц и, возможно, нелокальных членов.

1. *Введение*. Как известно [1, 2], самое общее космологическое решение уравнений общей теории относительности (ОТО) ведет к сингулярности. Поэтому избавиться от сингулярности, т. е. получить теорию, не приводящую к расходимости физических величин, можно лишь путем выхода за рамки ОТО. Модификация ОТО по существу необходима лишь вблизи сингулярности и, по-видимому, связана с квантовой теорией [3]. В ходе расширения должен совершаться переход к классической ОТО.

Простейший подход к проблеме связан с обобщением классического лагранжиана гравитационного поля вблизи сингулярности [4—10]. С физической точки зрения естественно рассматривать не любые добавки к лагранжиану, а те, которые следуют из рассмотрения физических процессов вблизи космологической сингулярности. Определенные добавки к лагранжиану могут быть получены, в частности, из рассмотрения процесса рождения частиц и поляризации вакуума сильным переменным гравитационным полем вблизи сингулярности [3, 11]. Однако здесь же выявляется и ограниченность простейшего лагранжева подхода, поскольку, во-первых, появляются нелокальные члены, а, во-вторых, сам процесс рождения частиц эквивалентен наличию первой вязкости, описание которой, как известно, требует привлечения понятия диссипативной функции. Тем не менее задача остается актуальной, поскольку квадратичные добавки к лагранжиану корректно описывают локальную часть, связанную с поляризацией вакуума. С точностью до логарифмических членов эти добавки можно построить из квадратичных инвариантов тензора кривизны. Квадратичные добавки в изотропном мире вблизи сингулярности уже исследовались в цитированных выше работах [5, 8, 9]. Однако с точки зрения теории рождения частиц и поляризации вакуума наибольший интерес представляет анизотропный случай (в изотропном случае безмассовые частицы не рождаются, массовые дают малый вклад). Кроме того, ОТО предсказывает анизотропное поведение космологических решений вблизи сингулярности.

В настоящей работе исследована роль квадратичных по тензору кривизны добавок к лагранжиану в простейшем случае анизотропного однородного решения I типа. Ввиду громоздкости возникающих уравнений проведено численное интегрирование на ЭВМ для специально выбранных случаев, правильно отражающих качественные особенности системы. В разделе 5 рассмотрена логарифмическая поправка $R_1 \ln R$ в изотропном случае и проведено приближенное рассмотрение влияния усредненных плотности энергии и давления, получающихся из квантовой теории, на поведение метрики путем непосредственного изменения уравнений Эйнштейна, без обращения к функции Лагранжа. Выводы можно найти в Заключении.

2. *Модифицированный лагранжиан и основные уравнения гравитационного поля.* Необходимый для вывода уравнений поля лагранжиан с учетом квадратичных по тензору кривизны членов имеет вид [5, 9]

$$L = L_m + L(0) + A\,(R + BR^2 + CR^{ik}R_{ik}). \qquad (1)$$

Здесь L_m — лагранжиан материи, $L(0)$ связан с космологической постоянной и в дальнейшем для простоты будет опущен. Константа $A = -(2\varkappa)^{-1}$ ($\varkappa$ — эйнштейновская гравитационная постоянная), скорость света считается повсюду равной единице, константы B, C имеют размерность квадрата длины и, как естественно предполагать, характеризуют те масштабы и времена, на которых становятся существенным изменения эйнштейновского лагранжиана AR. Отметим, что изо всех алгебраических независимых квадратичных инвариантов, конструируемых из тензора кривизны, в (1) выписаны лишь те, которые необходимы для вывода уравнений поля. Остальные квадратичные инварианты сводятся к выписанным и (или) дивергентным членам, исчезающим при варьировании [5, 12]. Вместо инвариантов R^2 и $R^{ik}R_{ik}$ можно использовать (что эквивалентно) и другие пары, например,

R^2 и $C^{iklm}C_{iklm}$, где C_{iklm} — тензор конформной кривизны, играющий существенную роль в теории рождения частиц и поляризации вакуума переменным гравитационным полем.

Уравнения гравитационного поля, соответствующие лагранжиану (1), выводятся из принципа наименьшего действия

$$\delta\int L\sqrt{-g}\,d\Omega = 0$$

и имеют вид [5]

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R - B\left[2RR_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R^2 + 2(\delta_i^k g^{lm} - \delta_i^m g^{kl})R_{,l;m}\right] -$$

$$- C\left[2R_{il}R^{lk} - \frac{1}{2}\delta_i^k R^{lm}R_{lm} + g^{lm}R^k_{i;l;m} + \frac{1}{2}\delta_i^k g^{lm}R_{,l;m} - \right. \tag{2}$$

$$\left. - 2g^{km}R^l_{i;m;l}\right] = \varkappa T_i^k.$$

Как и эйнштейновские уравнения поля они содержат в себе уравнения движения [5—7, 9]

$$T^k_{i;k} = 0. \tag{3}$$

Выпишем также свертку уравнений (1)

$$R + \alpha g^{lm}R_{,l;m} = -\varkappa T, \tag{4}$$

где $\alpha = 6B + 2C$. Заметим, что α — единственная константа, которая присутствует в изотропном случае. В общем анизотропном случае надо рассматривать обе постоянные B и C.

3. *Уравнения поля (1) в простейшей анизотропной метрике.* Рассмотрим однородную анизотропную метрику I типа

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\,dX^2 - b^2(t)\,dY^2 - c^2(t)\,dZ^2. \tag{5}$$

Сразу предположим, что

$$T^\alpha_\beta = 0, \quad T_0^0 = \varepsilon, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p, \quad \alpha \neq \beta. \tag{6}$$

Поэтому ε и p, как это следует из (3), связаны уравнением

$$\frac{\dot\varepsilon}{\varepsilon + p} + \left(\frac{\dot a}{a} + \frac{\dot b}{b} + \frac{\dot c}{c}\right) = 0, \tag{7}$$

где точка означает дифференцирование по времени. В наиболее интересном вблизи сингулярности случае $p = \varepsilon/3$ из (7) имеем $\varepsilon \propto (abc)^{-4/3}$.

Вынесем необходимые формулы для Γ^l_{ik}, R и т. п. в Приложение I и введем обозначения для «постоянных Хаббла»

$$x = \frac{\dot a}{a}, \qquad y = \frac{\dot b}{b}, \qquad z = \frac{\dot c}{c}. \tag{8}$$

Тогда получим для $\binom{0}{0}$ компоненты (1):

$$\begin{gathered}
x(y+z) + yz + 2B[2(x+y+z)(\ddot x + \ddot y + \ddot z) - (\dot x + \dot y + \dot z)^2 + \\
+ 2(x^2 + 3xy + 3xz + 2yz)\dot x + 2(y^2 + 2xz + 3xy + 3yz)\dot y + \\
+ 2(z^2 + 2xy + 3xz + 3yz)\dot z - (x^4 + y^4 + z^4) - (y - z)^2 x^2 + \\
+ 2(y^2 z + yz^2)x - y^2 z^2] + C[(2x + y + z)\ddot x + (x + 2y + z)\ddot y + \\
+ (x + y + 2z)\ddot z - (\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2 + \dot x\dot y + \dot x\dot z + \dot y\dot z) + \\
+ 2(x^2 + 2xy + 2xz + yz)\dot x + 2(y^2 + 2xy + xz + 2yz)\dot y + \\
+ 2(z^2 + xy + 2xz + 2yz)\dot z - (x^4 + y^4 + z^4) + (y + z)x^3 - \\
- (2y^2 + 2z^2 - yz)x^2 + (y^3 + z^3 + y^2 z + yz^2)x + \\
+ y^3 z + yz^3 - 2y^2 z^2] = \varkappa\varepsilon
\end{gathered} \tag{9}$$

для $\binom{1}{1}$ компоненты:

$$\begin{gathered}
\dot y + \dot z + y^2 + z^2 + yz + 2B[2(\dddot x + \dddot y + \dddot z) + 4(x + y + z)\ddot x + \\
+ 2(x + 3y + 2z)\ddot y + 2(x + 2y + 3z)\ddot z + 3\dot x^2 + 5(\dot y^2 + \dot z^2) + \\
+ 4\dot x(\dot y + \dot z) + 6\dot y\dot z + 2(-x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + 2yz)\dot x + \\
+ 2(3y^2 + 2z^2 + xy + xz + 4yz)\dot y + 2(2y^3 + 3z^2 + xy + xz + \\
+ 4yz)\dot z - x^4 + y^4 + z^4 - 2(y + z)x^3 - (y + z)^2 x^2 + \\
+ 2yz(y^2 + z^2) + 3y^2 z^2] + C[2\dddot x + \dddot y + \dddot z + 4(x + y + z)\ddot x + \\
+ (x + 3y + 2z)\ddot y + (x + 2y + 3z)\ddot z + \\
+ 3(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2 + \dot x\dot y + \dot x\dot z + \dot y\dot z) + (-2x^2 + y^2 + z^2 + 5xy + \\
+ 5xz + 4yz)\dot x + (x^2 + 4y^2 + 2z^2 - xy + xz + 4yz)\dot y + \\
+ (x^2 + 2y^2 + 4z^2 + xy + 4yz - xz)\dot z - x^4 + y^4 + z^4 - (y + z)x^3 + \\
+ yzx^2 - (y^3 + z^3 + y^2 z + yz^2)x + y^3 z + yz^3 + 2y^2 z^2] = -\varkappa p,
\end{gathered} \tag{10}$$

Уравнения для $\binom{2}{2}$ и $\binom{3}{3}$ компонент получаются из $\binom{1}{1}$ компоненты путем циклической перестановки величин x, y, z, поэтому в целях упрощения выписываться не будут. Легко убедиться, что в изотропном случае ($x = y = z$) вместо двух постоянных B и C получим одну $\alpha = 6B + 2C$ и вместо уравнений (9)—(10) одно уравнение

$$x^2 + \alpha(2x\ddot{x} - \dot{x}^2 + 6x^2\dot{x}) = \frac{\varkappa}{3}\varepsilon, \tag{11}$$

которое было исследовано в [5]. Заметим, что при $p = \varepsilon/3$ уравнению (11) точно удовлетворяет фридмановское решение $x = (2t)^{-1}$. Аналогично, метрика Казнера есть точное решение системы (9)—(10) в вакууме (p, $\varepsilon \to 0$). Как и уравнение (11), система (9)—(10) характеризуется важнейшим свойством: ей удовлетворяют решения, обладающие регулярным минимумом в $t = 0$. Докажем это, разлагая решение в ряд вблизи $t = 0$.

$$a(t) = a_0 + \frac{a_2}{2}t^2 + \frac{a_3}{6}t^3 + \frac{a_4}{24}t^4 + \cdots \tag{12}$$

и аналогично для b и c. Для простоты предположим, что минимумы a, b и c достигаются в одной точке $t = 0$, хотя это, разумеется, не обязательное требование. Тогда из уравнения (9) получим

$$-2B(a_2 + b_2 + c_2)^2 - C(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + a_2b_2 + a_2c_2 + b_2c_2) = \varkappa\varepsilon_0, \tag{13}$$

где ε_0 — значение плотности энергии в $t = 0$ и очевидно $\varkappa\varepsilon_0 \geqslant 0$. Если B и C порядка квадрата планковской длины, то, как легко видеть, $\varepsilon_0 \approx \hbar t_p^{-4}$, т. е. как раз то значение плотности энергии, которое фигурирует в теории рождения частиц [3, 11]. Уравнения типа (10), содержащие высшие производные, дадут условия для определения a_4, b_4 и c_4.

4. *Исследование условия регулярного минимума.* Уже беглый взгляд на условие (13) показывает, что решения с регулярным минимумом в $t = 0$ возможны. В частном изотропном случае это приводит к жесткому условию на знак постоянной α ($\alpha < 0$), что не позволяет при $t \to \infty$ сшить регулярное решение с фридмановским [5]. В анизотропном случае мы имеем две постоянные B и C и можно надеяться преодолеть эту трудность. Однако ответ на вопрос о выходе регулярного решения на фридмановское можно дать лишь после исследования условия (13) и численного решения системы (9)—(10), описывающей эволюцию со временем $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $\varepsilon(t)$.

Исследуем условие регулярного минимума (13). Для его выполнения необходимо, очевидно, чтобы

$$-2B(a_2+b_2+c_2)^2-C(a_2^2+b_2^2+c_2^2+a_2b_2+a_2c_2+b_2c_2)>0. \quad (14)$$

Потребуем, чтобы это условие выполнялось для любых положительных a_2, b_2, c_2. Тогда в плоскости (B, C) выделяется определенная область значений B, C, при которых справедливо выписанное неравенство. Поскольку рассматриваемая форма однородна, т. е. от изменения a_2, b_2, c_2 в одинаковое число раз неравенство не меняется, то можно потребовать, чтобы $a_2+b_2+c_2=1$. Тогда неравенство примет вид

$$-4B>C(a_2^2+b_2^2+c_2^2+1),$$

откуда имеем

$$\begin{aligned} C>0 \qquad & -\frac{4B}{C}\geqslant \sup(a_2^2+b_2^2+c_2^2+1)=2, \\ C<0 \qquad & -\frac{4B}{C}\leqslant \inf(a_2^2+b_2^2+c_2^2+1)=4/3. \end{aligned} \quad (15)$$

Поэтому искомая область выделяется неравенствами:

$$2B+C\leqslant 0, \qquad C>0,$$
$$\alpha/2=3B+C\leqslant 0, \qquad C<0,$$

откуда следует, что регулярный минимум возможен только при $\alpha\leqslant 0$, причем случай $\alpha=0$ реализуется только при $B>0$, $C<0$.

Таким образом, условие существования регулярного минимума в этом случае (любые положительные a_2, b_2, c_2) практически адэкватно изотропному ($\alpha<0$). Это подтверждает и численное решение уравнений (9)—(10) для $\alpha<0$ [13], решение изотропизуется и асимптотически $t\to\infty$ ведет себя как $\exp(\tau^2/12)$ (см. (19)) [5]. Случай $\alpha=0$ рассматривается в следующем разделе.

Как показало исследование изотропного случая, для асимптотического выхода на фридмановское решение необходимо $\alpha>0$. Найдем поэтому такую область положительных значений a_2, b_2, c_2, удовлетворяющих неравенству (13), для которой $\alpha>0$ или в нормированном виде $\alpha=(\equiv 2B+2C)=1$, т. е. $C=1/2-2B$. Тогда неравенство (14) можно переписать в виде

$$(2B-1)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)-(2B+1)(a_2b_2+a_2c_2+b_2c_2)>0, \quad (16)$$

откуда сразу ясно, что $B>1/2$ и при очень больших B неравенство справедливо практически для любых a_2, b_2, c_2. Переходя к новым переменным

$$
\begin{gathered}
a_2 = \zeta + \xi, \quad b_2 = \zeta - \xi, \quad c_2 = \eta + p\xi, \\
p = \frac{2B+1}{2B-1}, \qquad 1 < p < \infty, \qquad \zeta > 0,
\end{gathered} \tag{17}
$$

получим, что искомая область представляет собой внешнюю часть конуса с вершиной в точке $\zeta = \xi = \eta = 0$, направляющей в виде эллипса с полуосями $(2+p)^{-1/2}$, 1, удаленного от начала на расстояние $[2(p-1)]^{-1/2}$

$$
(2+p)\,\xi^2 + \eta^2 - 2\,(p-1)\,\zeta^2 = 0. \tag{18}
$$

Задавшись далее определенными значениями a_2, b_2 и c_2 из найденной области (при фиксированном B), можно путем численного интегрирования системы (9)—(10) на ЭВМ проследить эволюцию $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $\varepsilon(t)$ со временем. Собственно, главный вопрос теперь заключается в следующем: имеют ли эти решения асимптотики определенного вида (казнеровские в пустоте, фридмановскую с веществом)?

5. *Результаты численного интегрирования модифицированных уравнений поля.* Для численного интегрирования необходимо, во-первых, перейти к безразмерным переменным. Поскольку B и C имеют размерность квадрата длины, то удобно обозначить

$$
\tau = t/l, \qquad B = \beta l^2, \qquad C = \gamma l^2, \tag{19}
$$

где l — некоторая характерная длина, на которой становится существенным изменение лагранжиана: β, γ — безразмерные числа порядка единицы. Кроме того, всегда можно выбрать масштабные множители метрических коэффициентов таким образом, чтобы

$$
\frac{\varkappa}{2}\,\rho = (abc)^{-4/3}, \qquad p = \varepsilon/3. \tag{20}
$$

Во-вторых, от системы (9)—(10) перейти к системе уравнений 1-го порядка для величин a, x, $\dot{x} = x_1$, $\ddot{x} = x_2$ и т. д.

При задании начальных условий для численного интегрирования рассматривались две постановки. В первой изучался ход решений, начинающихся от регулярного минимума в $\tau_0 = 0$

$$
\begin{gathered}
a(0) = b(0) = c(0) = 1, \\
x(0) = y(0) = z(0) = 0, \\
x_1(0) = a_2, \quad y_1(0) = b_2, \quad z_1(0) = c_2, \\
x_2(0) = y_2(0) = z_2(0) = 0, \qquad \frac{\varkappa}{2}\,\rho = (abc)^{-4/3}.
\end{gathered} \tag{21}
$$

Во второй постановке рассматривался обратный ($\tau \to 0$) ход решений от казнеровского решения с показателями $(-1/3,\ 2/3,\ 2/3)$, заданного в $\tau_1 = 10$ и „возмущенного“ на $\delta \simeq 10^{-3}$ ($x = x_{\text{казн}}(1+\delta)$ и т. д.).

$$
\begin{gathered}
a(\tau_1) = \tau_1^{-1/3}, \quad b(\tau_1) = c(\tau_1) = \tau_1^{2/3}, \\
x(\tau_1) = -(3\tau_1)^{-1}, \quad y(\tau_1) = z(\tau_1) = 2(3\tau_1)^{-1}, \\
x_1(\tau_1) = (3\tau_1^2)^{-1}, \quad y_1(\tau_1) = z_1(\tau_1) = -2(3\tau_1^2)^{-1} \\
x_2(\tau_1) = -2(3\tau_1^3)^{-1}, \quad y_2(\tau_1) = z_2(\tau_1) = 4(3\tau_1^3)^{-1}, \quad p = 0.
\end{gathered}
\tag{22}
$$

Рассмотрим прежде всего случай $\alpha = 0$ для любых положительных a_2, b_2, c_2. Для численного расчета можно положить тогда*)

$$
\beta = 1, \quad \gamma = -3. \tag{23}
$$

Это особый случай, не имеющий аналога в изотропной ситуации**). Дело в том, что при $\alpha = 0$ отличен от нуля только квадратичный инвариант тензора конформной кривизны, обращающийся в нуль в изотропном пространстве [5, 14]

$$
C^{iklm} C_{iklm} = R^{iklm} R_{iklm} - 2R^{ik} R_{ik} + \frac{1}{3} R^2. \tag{24}
$$

Вариация его равна

$$
\delta \int C^{iklm} C_{iklm} \sqrt{-g}\, d\Omega = \delta \int 2\left(R^{ik} R_{ik} - \frac{1}{3} R^2\right) \sqrt{-g}\, d\Omega. \tag{25}
$$

Любопытно отметить, что свернутое уравнение поля (4) при $\alpha = 0$ совпадает с эйнштейновским уравнением.

Переходя к новым переменным

$$
x, \quad u = x - y, \quad v = x - z, \tag{26}
$$

взяв линейную комбинацию уравнений (10) $\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right]$, $\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\right]$ и уравнение $R = 0$, получим систему из 10 уравнений

*) В работе [13] рассчитан также вариант $\beta = -1$, $\gamma = 3$, ($\alpha = 0$), когда регулярный минимум отсутствует.

**) Другим вырожденным случаем является $C = 0$, когда добавка к лагранжиану сводится к $B R^2$.

$$\dot a = ax, \quad \dot x = \frac{1}{3}\left[u_1 + v_1 - 6x^2 + 4x(u+v) - u^2 - v^2 - uv\right],$$

$$\dot b = b(x-u), \qquad \dot u = u_1, \quad \dot u_1 = u_2,$$

$$\begin{aligned}\dot u_2 = \frac{1}{3}\big[&(-11x^2 + 9u^2 + 3v^2 + 6xu + 8xv - 9uv - 1)u_1 + \\ &+ (x^2 - 3u^2 - xv + 6uv)v_1 + 6(u+v-3x)u_2 + 2(x^4 - y^4) - \\ &- 2x^3(2y+z) - 2x^2(z^2+2yz) + 2x(2y^3+z^3) + 6xy^2z + \\ &+ 2(y^3z - yz^3) + 2y^2z^2 - 3xu + u^2 + uv + (x^2 + u^2 - 3xu - \\ &- xv + uv)\cdot(-6x^2 + 4xu + 4xv - u^2 - v^2 - uv)\big]\end{aligned} \qquad (27)$$

и аналогичные 4 уравнения с заменой $b \to c$ и $u \rightleftarrows v$.

Задача была просчитана с начальными условиями (21) и (22). При выходе из регулярного минимума решение начинает монотонно и резко расти так, что уже при $\tau = 3.2$, $x = \dot a/a = 7.7$, $u = v = 16.0$ (рис. 1), и счет был прекращен. Таким образом, выхода на степенные асимптотики нет.

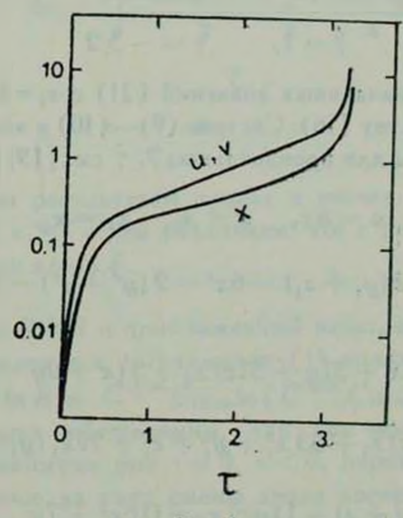

Рис. 1.

При обратном ходе от $\tau_1 = 10$ к $\tau = 0$ постоянная Хаббла $x = \dot a/a$ и разности $u = \dot a/a - \dot b/b$, $v = \dot a/a - \dot c/c$ убывают монотонно и при $\tau = 0$

$$x = -0.28, \qquad u = -3.0, \qquad v = -0.55.$$

Таким образом, решение сингулярно не при $\tau = 0$*, причем закон подхода к

* Решение с минимумом типа $a = a_0 - |a_1|\tau + 1/2\,(a_2\tau^2) + \cdots$ требует обращения x в нуль при $\tau = (|a_1|/a_2) > 0$.

сингулярности сильнее, чем казнеровский, хотя характер подобен (по оси X расширение, по осям Y, Z — сжатие), т. е. происходит сжатие в «нить» (рис. 2).

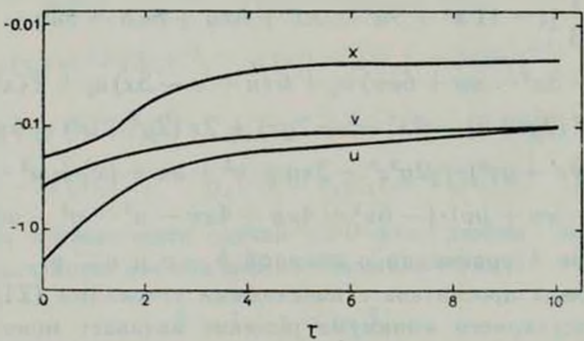

Рис. 2.

Рассмотрим теперь случай $\alpha = 1$, положив

$$\beta = 1, \qquad \gamma = -5/2 \tag{28}$$

и выбрав в качестве начальных значений (21) с $a_2 = 1$, $b_2 = c_2 = 0.1$, удовлетворяющими неравенству (16). Системе (9)—(10) в этом случае можно придать вид (вид системы для произвольных β, γ см. [13])

$$\dot{a} = ax, \quad \dot{x} = x_1, \quad \dot{x}_1 = x_2,$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 = {} & \frac{1}{10}[-6x_1 - 2(y_1 + z_1) - 6x^2 - 2(y^2 + z^2) - 3x(y + z) + yz] - \\ & - \frac{1}{20}[(58x + 31y + 31z)x_2 + 3(x + 2y - 3z)y_2 + \\ & + 3(x - 3y + 2z)z_2 + 33x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 29x_1(y_1 + z_1) - 3y_1z_1] - \\ & - \frac{1}{10}[(11x^2 + 46x(y + z) + 11yz)x_1 + (16x^2 + 7y^2 - 6z^2 - 14xy - \\ & - 3xz - 12yz)y_1 + (16x^2 - 6y^2 + 7z^2 - 3xy - 14xz - 12yz)z_1] - \\ & - \frac{1}{20}[-7x^4 + y^4 + z^4 + 27x^3(y + z) - x^2(2y^2 + 2z^2 - 43yz) - \\ & - (5y^3 + 5z^3 + 29(y^2z + yz^2))x + 3yz(y^2 + z^2) - 26y^2z^2] - p.\end{aligned} \tag{29}$$

Остальные уравнения получаются отсюда круговой перестановкой.

Вид решения для начальных условий (21) с $a_2=1$, $b_2=c_2=0.1$ показан на рис. 3. С ростом τ постоянные Хаббла x, y, z растут и происходит сжатие в «нить», ориентированную вдоль оси X. Выхода на степенные асимптотики нет. При больших τ решение ведет себя резче, чем $\exp(\mathrm{const}\times\tau^2)$, т. е. имеется неустойчивость «взрывного» типа.

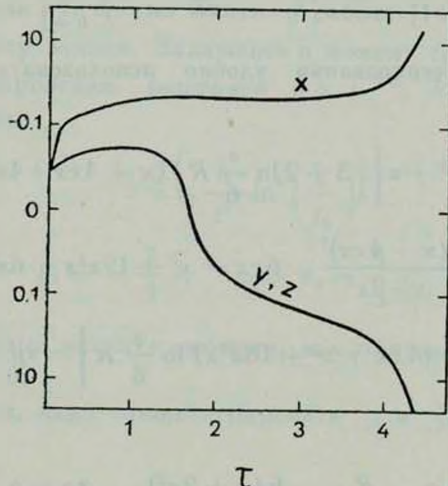

Рис. 3.

К аналогичным результатам привел и расчет с начальными условиями (21) $a_2=b_2=1$, $c_2=7$ с тем различием, что с ростом τ происходит коллапс в «нить» с осью вдоль Z.

6. *Лагранжиан $R^2\ln R$ и приближенный нелагранжев подход.* В квантовой теории в дополнение к лагранжиану (1) появляются и члены с логарифмами вида $R^2\ln R$ и $C^{iklm}C_{iklm}\ln(C^{iklm}C_{iklm})$. Введение такого рода членов выглядит обещающим, так как можно надеяться, выходя из регулярного минимума при $\tau=0$, $\alpha<0$, перейти при $\tau\to\infty$ к фридмановскому решению за счет смены знака логарифма, что эффективно соответствует смене знака α. Во избежание громоздких расчетов мы рассмотрим изотропный случай с лагранжианом

$$L=-\frac{1}{2\varkappa}\left(R+\frac{\alpha}{6}R^2\ln\frac{\alpha}{6}R\right). \tag{30}$$

Уравнения поля в этом случае имеют вид:

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R - \frac{\alpha}{6}\left[\left(1+2\ln\frac{\alpha}{6}R\right)RR_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R^2 \ln\frac{\alpha}{6}R + \right.$$
$$\left. + (\delta_i^k g^{lm} - \delta_i^l g^{km})\left(\frac{\partial R^2 \ln\frac{\alpha}{6}R}{\partial R}\right)_{;l;m}\right] = \varkappa T_i^k. \qquad (31)$$

Для численного интегрирования удобно использовать $\binom{1}{1}$ компоненту этих уравнений

$$2\dot{x} + 3x^2 + \alpha\left|\left(3+2\ln\frac{\alpha}{6}R\right)(\dddot{x} + 4x\ddot{x} + 4\dot{x}^2) + \right.$$
$$+ 2\frac{(\ddot{x}+4x\dot{x})^2}{\dot{x}+2x^2} - 6x\ddot{x} - \dot{x}^2 + 19x^2\dot{x} - 6x^4 + \qquad (32)$$
$$\left. + (4x\ddot{x} + \dot{x}^2 + 18x^2\dot{x})\ln\frac{\alpha}{6}R\right| = \varkappa p,$$

где

$$x = \dot{a}/a, \qquad R = -6(\dot{x} + 2x^2), \qquad \varkappa p = a^{-4}.$$

Уравнение (32) было просчитано с начальными данными, соответствующими регулярному минимуму

$$\tau_0 = 0, \quad a(0) = 1, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad \ddot{x}(0) = 0;\ 1. \qquad (33)$$

Решение монотонно нарастает и асимптотически при больших τ не дает степенной зависимости $a(t)$. Конкретно, при $\tau = 10$

$$\ddot{x}(0) = 0: \quad a = 1.1\cdot 10^9, \quad \frac{\dot{a}}{a} = 5.67, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = 34.0, \quad \frac{\dddot{a}}{a} = 208,$$

$$\ddot{x}(0) = 1: \quad a = 4.93\cdot 10^{11}, \quad \frac{\dot{a}}{a} = 8.24, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = 71.4, \quad \frac{\dddot{a}}{a} = 2.3\cdot 10^3.$$

Заметим, что для степенной асимптотики $x = \dot{a}/a \sim \tau^{-1}$ должен убывать и $x = \mathrm{const}$ для экспоненциальной асимптотики $a \sim e^{\tau}$. Получающееся решение ведет себя еще резче. Таким образом, выхода на фридмановское решение не происходит.

Рассмотрим здесь же и другой подход к модификации уравнений Эйнштейна вблизи космологической сингулярности. Как уже отмечалось, квадратичные добавки к лагранжиану с точки зрения квантовой теории учитывают лишь поляризацию вакуума, но не рождение частиц. Можно приближенно учесть и вклад рождения частиц, отказавшись от лагранжевой формулировки и прямо добавляя в правые части уравнений Эйнштейна усредненные $\langle T_i^k \rangle$, получающиеся из квантовой теории. Усредненные локализованные $\varepsilon = \langle T_0^0 \rangle$ и $p_\alpha = -\langle T_\alpha^\alpha \rangle$ для простейшей анизотропной метрики (5) можно найти в работе [14]. Рассмотрим следующую постановку задачи. Задавшись в момент $t_0 = 10\,t_p$ $(t_p = \sqrt{G\hbar})$ простейшим казнеровским решением $a \propto t^{-1/3}$, $b = c \propto t^{2/3}$, включаем квантовые добавки

$$\varepsilon = \varphi_0 \frac{\hbar}{t^4} \ln^\delta \left(\frac{t}{t_0} \right),$$
$$p_1 = -\frac{7}{3}\varepsilon, \qquad p_2 = p_3 = \frac{5}{3}\varepsilon \tag{34}$$

(φ_0, δ — безразмерные числа) и смотрим, как они изменят казнеровское решение при $t \to 0$.

Таким образом, надо проинтегрировать $\binom{1}{1}$ и $\binom{2}{2}$ уравнения Эйнштейна

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = \varkappa p_1,$$
$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = \varkappa p_2 \tag{35}$$

и, кроме того, можно вычислить получающуюся плотность энергии, используя $\binom{0}{0}$ компоненту

$$\tilde{\varepsilon} = -\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\ddot{b}}{b} \right). \tag{36}$$

Расчеты были проведены для

$$\varphi_1 = \frac{7}{3} 8\pi\varphi_0 = 1 \; (\tau = t/t_p),$$

при $\delta = 0$ и $\delta = 1$. Результаты представлены на рис. 4, 5. Особенно интересен случай $\varphi_1 = 1$, $\delta = 0$. В области $\tau \simeq 1 \div 2$, где начинают сказываться добавки, расширение по оси X сменяется на сжатие, а сжатие по осям Y, Z на расширение, но так, что $\tilde{\varepsilon}$ начинает убывать. Дальнейшее рассмотрение ($\tilde{\varepsilon} < 0$), конечно, бессмысленно. При $\delta = 1$ смены расширения на сжатие (ч наоборот) не происходит, однако, $\tilde{\varepsilon}$ также меняет рост на убывание. При таком приближенном подходе, разумеется, невозможно делать какие-либо выводы об устранении сингулярности и т. п., хотя следует отметить в случае $\delta = 1$ отсутствие тенденции к изотропизации решения при $\tau \to 0$.

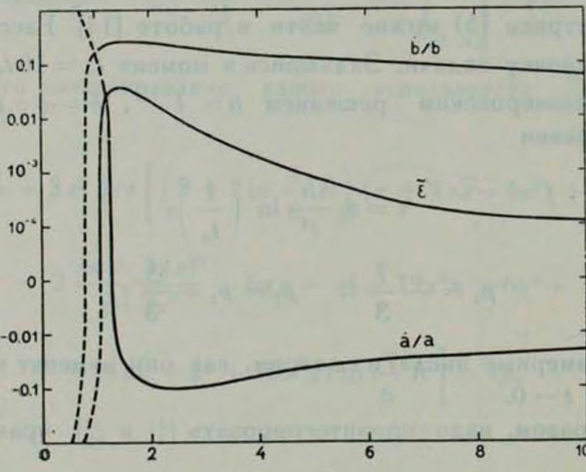

Рис. 4.

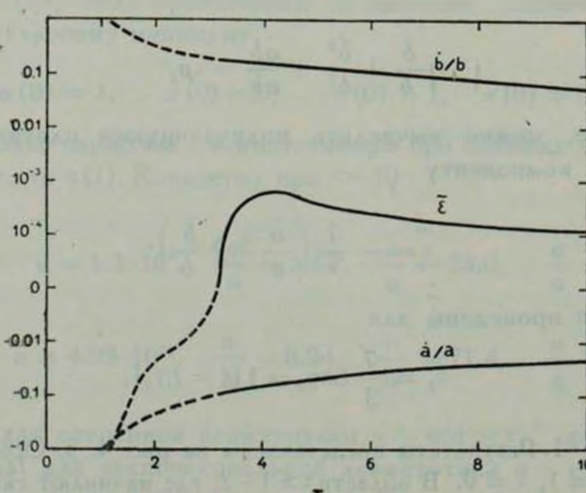

Рис. 5.

6. *Заключение.* Проведенное рассмотрение показывает, что лагранжиан с квадратичными добавками не дает решений, обладающих регулярным минимумом вблизи $t=0$ для всех $a(0)$, $\dot{b}(0)$, $c(0)$ и имеющих степенные асимп-

тотики при $t \to \infty$. Ситуация в этом смысле полностью подобна изотропному случаю, хотя в анизотропном варианте мы имеем большие возможности (2 постоянных B и C вместо одной α в изотропном). Однако, как уже отмечалось, квадратичные добавки к лагранжиану гравитационного поля (с учетом и логарифмических членов) это лишь часть той модификации ОТО, которая диктуется квантовой теорией. Они представляют локальные члены, следующие из рассмотрения поляризации вакуума. Остаются неучтенными нелокальные члены и описание эффекта рождения частиц, соответствующего первой вязкости. При этом важно заметить, что включение только вязкости, как показали В. А. Белинский и И. М. Халатников [15], не способно устранить сингулярность и лишь изотропизует сжимающийся мир.

Проведенное в разделе 5 приближенное нелагранжево рассмотрение обратного влияния добавок, усредненным образом учитывающих эффекты рождения частиц и поляризации вакуума, с необходимостью поднимает вопрос о самосогласованном рассмотрении квантовых эффектов и их обратного влияния на метрику вблизи $t=0$.

Благодарю Я. Б. Зельдовича и А. А. Старобинского за полезные замечания и В. И. Турчанинова за консультации.

Приложение 1

Ниже приведены формулы для величин, необходимых при написании уравнений (9)—(10).

$$\Gamma^0_{00}=\Gamma^0_{0\alpha}=\Gamma^\alpha_{00}=\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}=0 \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma=1,\ 2,\ 3),$$

$$\Gamma^1_{01}=x, \quad \Gamma^2_{02}=y, \quad \Gamma^3_{03}=z,$$

$$P_{\alpha\beta}=0, \quad R_{0\alpha}=0, \quad -R^0_0=\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}+x^2+y^2+z^2,$$

$$-R^1_1=\dot{x}+x^2+x(y+z), \quad -R^2_2=\dot{y}+y^2+y(x+z),$$

$$-R^3_3=\dot{z}+z^2+z(x+y),$$

$$R=-2(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}+x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz),$$

$$g^{lm}R_{;l;m}=\ddot{R}+(x+y+z)\dot{R},$$

$$g^{lm}R^0_{0;l;m}=\ddot{R}^0_0+(x+y+z)\dot{R}^0_0-2(x^2+y^2+z^2)R^0_0+$$
$$+2(x^2R^1_1+y^2R^2_2+z^2R^3_3),$$

$$g^{lm}R^1_{1;lm}=\ddot{R}^1_1+(x+y+z)\dot{R}^1_1+2x^2(R^0_0-R^1_1),$$

$$g^{lm}R^l_{1;m;l}=x\dot{R}^0_0+(\dot{x}+2x^2+xy+xz)(R^0_0-R^1_1).$$

Институт прикладной
математики АН СССР

ANISOTROPIC COSMOLOGICAL SOLUTIONS IN THE THEORY WITH QUADRATIC INVARIANTS

A. A. RUZMAIKIN

The modification of GR near the cosmological singularity dictated by the quantum theory can be realized in part by means of the addition of terms quadratic on the curvature tensor to the gravitational field Lagrangian. In such a theory solutions with a regular minimum at $t=0$ are possible for the common anisotropic case. However, the analysis of the simplest anisotropic metric shows that they have no power asymptotics at large times. Taking into account the logarithmic terms ($R^2 \ln R$) does not change this situation in the isotropic case at least. To solve the question on the possiblity of removing the cosmological singularity with the passage to power asymptotics it is necessary to take into account also the effect of particle creation and possibly non-local terms in a self-consistent manner.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. *W. Hawking, R. Penrouse*, Proc. Roy. Soc. London, A314, 538, 1970.
2. *В. А. Белинский, Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников*, ЖЭТФ, 62, 1606, 1972.
3. *Я .Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, Строение и эволюция Вселенной, Наука, М., 1975.
4. *А. Д. Сахаров*, ДАН СССР, 117, 1, 1967.
5. *Т. В. Рузмайкина, А. А. Рузмайкин*, ЖЭТФ, 57, 680, 1969.
6. *Б. Н. Брейзман, В. Ц. Гурович, В. П. Соколов*, ЖЭТФ, 59, 288, 1970.
7. *В. Ц. Гурович*, ДАН СССР, 195, 1300, 1970.
8. *В. Л. Гинзбург, Д. А. Киржниц, А. А. Любушин*, ЖЭТФ, 60, 451, 1971.
9. *H. Nariat, K. Tomita*, Progr. Theor. Phys., 46, 776, 1971.
10. *H. Nariai*, Progr. Theor. Phys., 51, 613, 1974.
11. *Я. Б. Зельдович. А. А. Старобинский*, ЖЭТФ, 61, 2161, 1971.
12. *C. Lancozos*, Ann. Math., 39, 842, 1938.
13. *А. А. Рузмайкин*, Препринт ИПМ АН СССР, № 19, 1976.
14. *Я. Б. Зельдович, А. А. Старобинский*, сб. «Проблемы ядерной физики и физики элементарных частиц», Наука, М., 1975, стр. 141.
15. *В. А. Белинский, И. М. Халатников*, ЖЭТФ, 69, 401, 1975.