АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 13 МАЙ, 1977 ВЫПУСК 2

ВРАЩАЮЩИЕСЯ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПОЛИТРОПЫ

А. В. САРКИСЯН, Э. В. ЧУБАРЯН

Поступила 20 июля 1976

Получены уравнения Эйнштейна в случае аксиально-симметрического распределения масс на основе тетрадной формулировки общей теории относительности. Уравнения численно решены в квадратичном по угловой скорости приближении для конфигураций, состояние вещества в которых описывается политропным уравнением. Рассчитаны интегральные характеристики и внутренняя структура конфигураций с политропным индексом $n=1$; 1.5; 2; 2.5 и 3 для различных значений релятивистского параметра α.

1. Вопрос вращающихся звездных конфигураций, состояние вещества в которых описывается однопараметрическим уравнением, исследовался во многих работах. В ряде работ ([1—5] и др.) задача рассматривалась в рамках теории тяготения Ньютона, в работах [6—9] рассматривалось общее решение уравнений Эйнштейна в квадратичном по угловой скорости приближении. Это приближение позволяет учесть несферичность конфигурации, наличие центробежных сил и квадрупольных моментов.

В настоящей работе методом Картана [10] получены уравнения Эйнштейна в случае вращения. Этот метод существенно упрощает расчеты и приводит к сравнительно более простым уравнениям. Затем для политропных конфигураций численно решена внутренняя задача в приближении Ω^2 (Ω — угловая скорость вращения), найдены важнейшие интегральные параметры и внутренние характеристики конфигураций.

При решении задачи предполагалось:

1) Наличие аксиальной симметрии и симметрии относительно экваториальной плоскости.

2) Твердотельное вращение. В [11] было показано, что твердотельное вращение ($\Omega=\text{const}$) является частным решением обобщенного уравнения гидродинамики для вращающихся релятивистских конфигураций.

3) Конфигурация находится в состоянии гидродинамического равновесия и истечение вещества отсутствует.

4) Вещество конфигурации находится в состоянии конвективного равновесия.

5) Угловые скорости малы, что является физическим следствием того, что гравитационная потенциальная энергия звезды во много раз превышает энергию вращения,

$$\beta = \frac{\Omega^2}{8\pi G\rho_c} \ll 1.$$

При вращении распределение масс и созданное ими гравитационное поле аксиально-симметрическое, т. е.

$$g_{ik} = g_{ik}(R,\ \theta,\ \Omega). \tag{1.1}$$

Ниже используются обозначения $x^0 = t$, $x^1 = R$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$ и полагается $G = c = 1$. Пусть наблюдатель находится в неподвижной системе отсчета и вращение происходит по часовой стрелке

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{1.2}$$

Используя свойства инвариантности интервала, надлежащими преобразованиями координат его можно записать в виде [9]

$$-ds^2 = e^{2\nu}dt^2 - e^{2\lambda}dR^2 - e^{2\mu}d\theta^2 - e^{2\psi}\sin^2\theta\,(d\varphi + \omega dt)^2, \tag{1.3}$$

где λ, μ, ν, ω — функции от R, θ и Ω. Отметим, что ν, μ и λ должны быть четными функциями от Ω, а ω — нечетной.

2. Для упрощения расчетов выберем базисные тетрады $\theta^{(\alpha)} = e^{(\alpha)}_{\beta}dx^{\beta}$ так, чтобы коэффициенты метрического тензора $g_{(\alpha)(\beta)}$ в выражении $ds^2 = q_{(\alpha)(\beta)}\,\theta^{(\alpha)}\theta^{(\beta)}$ были постоянными величинами

$$\theta^{(0)} = e^{\nu}dt,\quad \theta^{(1)} = e^{\lambda}dR,\quad \theta^{(2)} = e^{\mu}d\theta,\quad \theta^{(3)} = e^{\psi}\sin\theta\,(d\varphi + \omega dt), \tag{2.1}$$

тогда

$$-ds^2 = \theta^{(0)2} - \theta^{(1)2} - \theta^{(2)2} - \theta^{(3)2} \tag{2.2}$$

и внешние дифференциалы равны

$$
\begin{gathered}
d\theta^{(0)} = \nu_1 e^{-\lambda}\theta^{(1)} \wedge \theta^{(2)} + \nu_2 e^{-\mu}\theta^{(2)} \wedge \theta^{(3)}, \\
d\theta^{(1)} = \lambda_2 e^{-\mu}\theta^{(2)} \wedge \theta^{(1)}, \quad d\theta^{(2)} = \mu_1 e^{-\lambda}\theta^{(1)} \wedge \theta^{(2)}, \\
d\theta^{(3)} = \mu_1 e^{-\lambda}\theta^{(1)} \wedge \theta^{(3)} + e^{-\mu}(\mu_2 + \operatorname{ctg}\theta)\,\theta^{(2)} \wedge \theta^{(3)} + \\
+ e^{\mu-\lambda-\nu}\sin\theta\,\omega_1\theta^{(1)} \wedge \theta^{(0)} + e^{-\nu}\sin\theta\,\omega_2\theta^{(2)} \wedge \theta^{(3)}.
\end{gathered} \tag{2.3}
$$

Согласно I уравнениям структуры Картана

$$
d\theta^{(\alpha)} = -\,\omega^{(\alpha)}_{(\beta)} \wedge \theta^{(\beta)},
$$

имеем

$$
\begin{aligned}
-\,d\theta^{(0)} &= \omega^{(0)}_{(1)} \wedge \theta^{(1)} + \omega^{(0)}_{(2)} \wedge \theta^{(2)} + \omega^{(0)}_{(3)} \wedge \theta^{(3)}, \\
-\,d\theta^{(1)} &= \omega^{(1)}_{(0)} \wedge \theta^{(0)} + \omega^{(1)}_{(2)} \wedge \theta^{(2)} + \omega^{(1)}_{(3)} \wedge \theta^{(3)}, \\
-\,d\theta^{(2)} &= \omega^{(2)}_{(0)} \wedge \theta^{(0)} + \omega^{(2)}_{(1)} \wedge \theta^{(1)} + \omega^{(2)}_{(3)} \wedge \theta^{(3)}, \\
-\,d\theta^{(3)} &= \omega^{(3)}_{(0)} \wedge \theta^{(0)} + \omega^{(3)}_{(1)} \wedge \theta^{(1)} + \omega^{(3)}_{(2)} \wedge \theta^{(2)}.
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

Здесь учтено, что $\omega_{ab} = -\,\omega_{ba}$. Сравнивая (2.3) с (2.4), находим

$$
\begin{aligned}
\omega^{(0)}_{(1)} &= \omega^{(1)}_{(0)} = -\,\nu_1 e^{-\lambda}\theta^{(0)} + \frac{1}{2}e^{\mu-\lambda-\nu}\sin\theta\,\omega_1\theta^{(3)}, \\
\omega^{(0)}_{(2)} &= \omega^{(2)}_{(0)} = -\,\nu_2 e^{-\mu}\theta^{(0)} + \frac{1}{2}e^{-\nu}\sin\theta\,\omega_2\theta^{(3)}, \\
\omega^{(0)}_{(3)} &= \omega^{(3)}_{(0)} = \frac{1}{2}e^{\mu-\lambda-\nu}\sin\theta\,\omega_1\theta^{(1)} + \frac{1}{2}e^{-\nu}\sin\theta\,\omega_2\theta^{(2)}, \\
\omega^{(1)}_{(3)} &= -\,\omega^{(3)}_{(1)} = \mu_1 e^{-\lambda}\theta^{(3)} + \frac{1}{2}e^{\mu-\lambda-\nu}\sin\theta\,\omega_1\theta^{(0)}, \\
\omega^{(1)}_{(2)} &= -\,\omega^{(2)}_{(1)} = \mu_1 e^{-\lambda}\theta^{(2)} - \lambda_2 e^{-\mu}\theta^{(1)}.
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Используя далее II уравнения структуры Картана

$$
\Omega^{(\alpha)}_{(\beta)} = d\omega^{(\alpha)}_{(\beta)} + \omega^{(\alpha)}_{(\gamma)} \wedge \omega^{(\gamma)}_{(\beta)}, \tag{2.6}
$$

а также соотношение

$$
\Omega^{(\alpha)}_{(\beta)} = \frac{1}{2}R^{(\alpha)}_{\gamma\beta\delta}\,\theta^{(\gamma)} \wedge \theta^{(\delta)}, \tag{2.7}
$$

определим отличные от нуля компоненты тензора Римана. Для смешанных компонент тензора Риччи $R^{(\alpha)}_{(\beta)} = g^{(\alpha)(\beta)}R^{(\delta)}_{(\gamma)(\delta)(\beta)}$ и скалярной кривизны R имеем

$$R_0^0 = \left(\nu_{11} - \nu_1\lambda_1 + \nu_1^2 + 2\mu_1\nu_1 - \frac{1}{2}\omega_1^2 e^{2(\mu-\nu)} \sin\theta\right) e^{-2\lambda} +$$

$$+ \left(\nu_{22} + \nu_2^2 + \nu_2 \operatorname{ctg}\theta - \frac{1}{2}\omega_2^2 e^{2(\mu-\nu)} \sin^2\theta\right) e^{-2\mu},$$

$$R_1^1 = \left(\nu_{11} - \nu_1\lambda_1 + \nu_1^2 + 2\mu_{11} + 2\mu_1\lambda_1 + 2\mu_1^2 - \frac{1}{2}\omega_1^2 e^{2(\mu-\nu)} \sin^2\theta\right) e^{-2\lambda} +$$

$$+ (\nu_2\lambda_2 + \lambda_{22} + \lambda_2^2 + \lambda_2 \operatorname{ctg}\theta)\, e^{-2\mu},$$

$$R_2^2 = (\nu_1\mu_1 + \mu_{11} - \lambda_1\mu_1 + 2\mu_1^2)\, e^{-2\lambda} + \left(\nu_{22} - \nu_2\mu_2 + \nu_2^2 + \lambda_{22} - \lambda_2\mu_2 + \lambda_2^2 +\right.$$

$$\left. + \mu_{22} + \mu_2 \operatorname{ctg}\theta - \frac{1}{2} e^{2(\mu-\nu)} \omega_2^2 \sin^2\theta - 1\right) e^{-2\mu},$$

$$R_3^3 = \left(\nu_1\mu_1 + \mu_{11} - \lambda_1\mu_1 + 2\mu_1^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2 \sin^2\theta\, e^{2(\mu-\nu)}\right) e^{-2\lambda} + \tag{2.8}$$

$$+ \left(\nu_2\mu_2 + \lambda_2\mu_2 + \mu_{22} + (\nu_2 + \mu_2 + \lambda_2) \operatorname{ctg}\theta - 1 + \frac{1}{2} e^{2(\mu-\nu)} \omega_2^2 \sin^2\theta\right) e^{-2\mu},$$

$$R_2^1 = e^{-\mu-\lambda}\left(\nu_{12} - \nu_1\lambda_2 + \nu_1\nu_2 - \mu_1\nu_2 + \mu_{12} - \mu_1\lambda_2 - \frac{1}{2}\omega_1\omega_2 \sin^2\theta\, e^{-2(\mu+\nu)}\right),$$

$$R_0^3 = \frac{1}{2} e^{\mu-\nu-2\lambda} \sin\theta\, (\omega_{11} - \nu_1\omega_1 - \lambda_1\omega_1 + 4\mu_1\omega_1) +$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-\mu-\nu} \sin\theta\, (\omega_{22} + \lambda_2\omega_2 - \nu_2\omega_2 + 2\omega_2\mu_2 + 3\omega_2 \operatorname{ctg}\theta),$$

$$R = \left(2\nu_{11} + 4\mu_{11} + 2\nu_1^2 + 6\mu_1^2 + 4\nu_1\mu_1 - 2\nu_1\lambda_1 - 4\mu_1\lambda_1 -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\omega_1^2 \sin^2\theta\, e^{2(\mu-\nu)}\right) e^{-2\lambda} + \left[2(\nu_{22} + \lambda_{22} + \mu_{22} + \nu_2^2 + \lambda_2^2 + \nu_2\lambda_2 +\right.$$

$$\left. + (\nu_2 + \lambda_2 + \mu_2) \operatorname{ctg}\theta - 1) - \frac{1}{2}\omega_2^2 e^{2(\mu-\nu)} \sin^2\theta\right] e^{-2\lambda},$$

Теперь можно подсчитать компоненты тензора

$$G_i^k = R_i^k - \frac{1}{2} R \delta_i^k$$

и выписать уравнения Эйнштейна внутри распределения масс

$$G_i^k = 8\pi T_i^k, \tag{2.9}$$

где

$$T_i^k = (P + \rho) u_i u^k - P\delta_i^k \tag{2.10}$$

тензор энергии-импульса. Здесь P — давление, ρ — плотность вещества, а u_i — компонента четырехмерной скорости.

3. Для области пространства, занятого веществом, имеется шесть независимых функций: λ, μ, ν, ω, u^3 и ρ (предполагается, что уравнение состояния задается в виде $P = P(\rho)$). Для нахождения этих функций мы используем четыре независимых уравнения Эйнштейна:

$$\begin{aligned} &G_1^1 - G_0^0 = 8\pi(T_1^1 - T_0^0), \qquad G_2^1 = 0 \\ &G_2^2 + G_3^3 = 8\pi(T_2^2 + T_3^3), \qquad G_3^0 = 8\pi T_3^0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

и уравнения гидродинамического равновесия

$$T_{i;k}^k = 0, \tag{3.2}$$

которые сводятся [6] к

$$\begin{aligned} &u^3 = \Omega u^0, \\ &M(R, \theta) = 2\int \frac{dP'}{P' + \rho'} = -\nu - \ln[1 - e^{2(\mu-\nu)}(\Omega + \omega)^2 \sin^2\theta] + C, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $C = C_0 + \beta C_1$ — постоянная интегрирования, а

$$u^0 = [e^{2\nu} - e^{2\mu}(\Omega + \omega)^2 \sin^2\theta]^{-1/2} \tag{3.4}$$

В квадратичном по угловой скорости приближении компоненты метрического тензора можно представить в виде

$$\begin{aligned} &e^{-2\lambda} = e^{-2\lambda_0}(1 + \beta f(R, \theta)), \qquad e^{2\nu} = e^{2\nu_0}(1 + \beta\Phi(R, \theta)) \\ &e^{2\mu} = K^2(1 + \beta u(R, \theta)), \qquad \omega = \sqrt{\beta}\, q(R) \end{aligned} \tag{3.5}$$

где f, Φ, u и q — неизвестные функции, а $e^{2\nu_0}$ и $e^{2\lambda_0}$ — компоненты метрического тензора в отсутствие вращения. Таким же образом записываются давление, плотность вещества и функция $M(R, \theta)$.

$$P' = P^0 + \beta P, \quad \rho' = \rho^0 + \beta\rho, \quad M(R, \theta) = m^0(R) + \beta N(R, \theta). \tag{3.6}$$

Уравнения Эйнштейна вне и внутри конфигураций допускают разделение переменных, если решения искать в виде разложений по полиномам Лежандра [12].

Граница вращающейся конфигурации определяется из соотношения

$$R(\theta) = R^0 + \beta \sum_{l=0}^{\infty} d_l P_l(\cos\theta). \tag{3.7}$$

4. Для исследования структуры звездных моделей хорошим приближением для многих реальных ситуаций является политропическая связь между давлением и плотностью вещества

$$P = K\rho^{1+1/n}, \tag{4.1}$$

где n—показатель политропы. Уравнение (4.1) является частной формой параметрических уравнений состояния вещества в звездах со сложным составом. При соответствующем подборе K уравнение (4.1) пригодно и для изучения «горячих» моделей, причем при фиксированном n мы имеем семейство изэнтропических конфигураций, находящихся в состоянии конвективного равновесия: параметр K для такого семейства моделей однозначно определяется путем задания значения давления и плотности в центре. Так как для фиксированного давления плотность есть функция температуры, то K определяется заданием температуры в центре конфигурации. Различным политропным индексам соответствуют различные звездные модели, так случаю $n=0$ соответствует модель несжимаемой жидкости, $n=1.5$ — модель идеального вырожденного нерелятивистского газа, а $n=3$ — случай смеси ультрарелятивистского вырожденного газа и излучения. С реальными звездами обычно связывают область значений $0.8 \leqslant n \leqslant 3$.

Хотя уравнение состояния (4.1) кажется не очень реальным, тем не менее в данной работе при конкретных расчетах мы использовали это уравнение. Это объясняется тем, что модели с таким уравнением состояния были подробно исследованы в случае отсутствия вращения [13], и, следовательно, в целях сравнения и выяснения роли вращения необходимо положить в основу расчетов именно это уравнение. Кроме того, простая связь между P и ρ сильно упрощает довольно сложную задачу вращения. В пользу использованного уравнения (4.1) говорит и то обстоятельство, что линейная комбинация политроп с различными n хорошо аппроксимирует состояние вещества в «холодных» конфигурациях [14]. В этом случае обе постоянные K и n выражаются через универсальные физические постоянные, и плотность в заданной точке определяется независимо от температуры. Так, политропа с $n=3$ хорошо описывает состояние вещества в белых карликах для определенных центральных плотностей ($\rho_c \sim 10^8-10^{10}$ *г см*$^{-3}$). При больших n это уравнение дает линейную зависимость между давлением и плотностью, что соответствует уравнению состояния при предельно высоких плотностях.

5. В дальнейшем удобно пользоваться безразмерными переменными Эмдена [15]. Введем переменные, определяемые следующими соотношениями:

$$\rho = \rho_c \theta^n; \qquad \xi = AR, \qquad u(R) = \frac{4\pi\rho_c}{A^3} v(\xi);$$
$$A^2 = \frac{4\pi\rho_c}{(n+1)\,P_c} = \frac{4\pi\rho_c}{\alpha(n+1)}, \tag{5.1}$$

где ρ_c — плотность массы в центре конфигурации. Уравнение состояния (4.1) в новых переменных запишется так:

$$P = K\rho_c^{1+1/n}\theta^{n+1} = \alpha\rho_c\theta^{n+1}; \qquad \alpha = K\rho_c^{1/n}: \tag{5.2}$$

Так как в центре конфигурации $\theta = 1$, то $\alpha = P_c/\rho_c$. Скорость звука в среде не должна превышать скорости света, поэтому $\alpha \leqslant n/(n+1)$.

В новых переменных уравнения, определяющие параметры вращающихся конфигураций [12], запишутся в виде:

$$\frac{dv}{d\xi} = \xi^2\theta^n, \qquad \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{1+\alpha\theta}{\alpha(n+1)} F(\xi), \qquad \frac{d\nu}{d\xi} = -2F(\xi)$$

$$\frac{dQ}{d\xi} = \chi(\xi), \qquad \frac{d\chi}{d\xi} = -\left[\frac{4}{3} - \frac{\alpha(n+1)(1+\alpha\theta)\xi^2\theta^n}{\xi - 2\alpha(e+1)\,n(\xi)}\right]\chi(\xi) +$$
$$+\frac{4\alpha\theta^n(n+1)(1+\alpha\theta)}{\xi - 2\alpha(n+1)v(\xi)} Q, \qquad \frac{d\beta}{d\xi} = -\frac{2}{3}\xi^2 Q^2\zeta(\xi)e^{-\nu(\xi)}$$

$$\frac{dN_0}{d\xi} = A(\xi), \qquad \frac{dA(\xi)}{d\xi} = -X_0(\xi)A(\xi) - Y_0(\xi)N_0(\xi) + Z(\xi)$$

$$\frac{dL_2}{d\xi} = B(\xi), \qquad \frac{dB(\xi)}{d\xi} = -X_0(\xi)B(\xi) - Y_2(\xi)L_2(\xi) \tag{5.3}$$

$$\frac{dS_2}{d\xi} = C(\xi), \qquad \frac{dC(\xi)}{d\xi} = -X_0(\xi)C(\xi) - Y_2(\xi)S_2(\xi) + V(\xi)$$

$$\Phi_0(\xi) = -N_0(\xi) + \frac{2}{3}Q^2\xi^2 e^{-\nu} \qquad \Phi_2(\xi) = -S_2(\xi) - \frac{2}{3}Q^2\xi^2 e^{-\nu}$$

$$f_0(\xi) = -N_0(\xi) + \beta_0(\xi), \qquad f_2(\xi) = -S_2(\xi) + \frac{1}{2}\beta_0(\xi) - Q^2\xi^2 e^{-\nu}$$

$$F(\xi) = -\alpha(n+1)\frac{\alpha\xi^3\theta^{n+1}+v(\xi)}{\xi[\xi-2\alpha(n+1)v(\xi)]},$$

$$\zeta(\xi) = 16\alpha\xi\theta^n(n+1)(1+\alpha\theta)-\frac{2}{\xi}+$$

$$+2F(\xi)[2\xi^2\theta^{n-1}(1+\alpha\theta)(3\alpha(n+1)\theta+n)-1]+$$

$$+\frac{\chi}{Q}\left[16\alpha\xi^2\theta^n(n+1)(1+\alpha\theta)-2-4(\xi-2\alpha(n+1)v(\xi))\frac{\chi}{Q}\right],$$

$$\beta_0(\xi) = -\frac{2}{3}\xi^2Q^2e^{-\nu}\left[4\alpha(n+1)\xi^2(1+\alpha\theta)\theta^n-1+\right.$$

$$\left.+\frac{\chi^2\xi^2}{Q^2}\left(1-\frac{2\alpha(n+1)}{\xi}v(\xi)\right)\right],$$

$$X_0(\xi) = X_2(\xi) = \frac{2}{\xi}+\frac{\alpha(n+1)(v(\xi)-\theta^n\xi^3)}{\xi(\xi-2\alpha(n+1)v(\xi))}-F(\xi), \tag{5.4}$$

$$Y_0(\xi) = -4F^2(\xi)+\frac{\alpha(n+1)(v(\xi)-\theta^n\xi^3)}{\xi-2\alpha(n+1)v(\xi)}\left[9\alpha\theta^2+5\theta+\frac{n(1+\alpha\theta)}{\alpha(n+1)}\right],$$

$$Y_2(\xi) = Y_0(\xi)-\frac{6}{\xi(\xi-2\alpha(n+1)v(\xi))},$$

$$Z(\xi) = \beta_0\left[\frac{2\alpha(n+1)\xi\theta^n(1+3\alpha\theta)}{\xi-2\alpha(n+1)v(\xi)}+\frac{2F}{\xi}-2F^2\right]+$$

$$+\frac{2}{3}\xi^2Q^2\zeta(\xi)F(\xi)e^{-\nu}+\frac{2}{3}\xi^2Q^2e^{-\nu}\left\{\frac{6}{\xi^2}+\frac{4F}{\xi}+\right.$$

$$\left.+4F^2-\frac{4\alpha^2(n+1)\xi\theta^{n+1}}{\xi-2\alpha(n+1)v(\xi)}+\frac{\chi}{Q}\left[\frac{4}{\xi}+\frac{\chi}{Q}+6F\right]\right\},$$

$$V(\xi) = -Z(\xi)-2\xi^2Q^2e^{-\nu}\left[\frac{\alpha(n+1)\xi^3\theta^n(3\alpha\theta+1)}{\xi(\xi-2\alpha(n+1)v(\xi))}-2F^2-\frac{\chi}{Q}F\right].$$

В первом по Ω приближении вращение звезды, состояние вещества в которой описывается уравнением состояния (4.1), рассмотрено в [16]. В этом приближении появляется недиагональная компонента g_{03}, с помощью которой был рассчитан полный релятивистский момент J, а также кинетическая энергия вращения $E_k = J\Omega^2_{max}/2$.

Во втором по Ω приближении к первым шести уравнениям системы (5.3) добавляются уравнения, определяющие неизвестные функции $N_e(\xi)$, которые удобно искать в виде

$$N_0 = N_0(\xi), \quad N_2 = B_2L_2(\xi) + S_2(\xi), \tag{5.5}$$

где $B_2L_2(\xi)$ — общее решение однородного уравнения, а $S_2(\xi)$ — частное решение неоднородного. Наличие произвольной постоянной в выражении $M(\xi, 0)$ позволяет выбрать для $N_0(\xi)$ следующее начальное условие:

$$N_0(0) = \frac{dN_0(0)}{d\xi} = 0. \tag{5.6}$$

В центре конфигурации $L_2(\xi) \sim \xi^2$, $S_2(\xi) \sim \xi^4$, поэтому

$$L_2(0) = \frac{dL_2(0)}{d\xi} = S_2(0) = \frac{dS_2(0)}{d\xi} = 0. \tag{5.7}$$

Для остальных функций начальные значения следующие: $v(0) = 0$, $\theta(0) = 1$, $Q(0) = 1$, $\lambda(0) = 0$, $\nu(0) = \nu_0(0)$.

Значения произвольных постоянных, входящих как во внешние, так и во внутренние решения уравнений Эйнштейна, определяются условиями непрерывности компонент метрического тензора и их первых производных на границе конфигурации. Эти условия дают

$$C_0 = \ln\left(1 - \frac{2\alpha(n+1)}{\xi_0} v\right); \quad A_0 = \frac{k' - N_0' - D}{f_0'};$$

$$A_2 = \frac{L_2(S_2' + k' - P') - L_2'(S_2 + k - P)}{L_2 f_2' - L_2' f_2};$$

$$B_2 = \frac{f_2(S_2' + k' - P') - f_2'(S_2 + k - P)}{L_2 f_2' - L_2' f_2}; \tag{5.8}$$

$$d_0 = \frac{1 - 2\alpha(n+1)v/\xi_0}{2\alpha(n+1)v/\xi_0} N_0; \quad d_2 = \frac{1 - 2\alpha(n+1)v/\xi_0}{2\alpha(n+1)v/\xi_0}(B_2L_2 + S_2);$$

$$C_{10} = A_0 f_0 + D + N - k.$$

Здесь все функции взяты на поверхности сферической конфигурации, штрих означает производную по γ, и введены обозначения

$$k = \frac{2}{3} Q^2 \xi^2 e^{-\nu}; \quad f_l = \frac{F(l+1,\ l-1,\ 2l+2,\ 2\alpha(n+1)v/\xi)}{\xi^{l+1}(1 - 2\alpha(n+1)v/\xi)};$$

$$D = \frac{C_1''\left(\frac{1}{2} - \frac{2\alpha(n+1)}{\xi} v\right)}{\left(1 - \frac{2\alpha(n+1)v}{\xi}\right)\xi^4};$$

$$P = \frac{C_1'^2 \left(4\alpha^2 (n+1)^2 v^2/\xi^2 + 2\alpha (n+1) v/\xi - 2\right)}{4\alpha (n+1) v\xi^3 \left(1 - 2\alpha (n+1) v/\xi\right)};$$

$$C_1' = \frac{\sqrt{2\alpha (n+1)}\, \lambda \xi_0^4}{3Q + \xi_0 \lambda},$$

$F(a, b, c, x)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

6. Проинтегрировав систему (5.3) и сшив внешние и внутренние решения на границе, можно определить интегральные характеристики конфигураций.

Известно, что вне распределения масс

$$g_{03} = -\frac{2K}{R} \sin^2 \theta, \tag{6.1}$$

K — полный момент импульса вращающегося тела. Сравнивая (6.1) с полученным ранее в [16] выражением

$$g_{03} = -\frac{\sqrt{\beta}}{A} \left[\sqrt{2\alpha (n+1)} - Q(\xi)\right] \xi^2 \sin^2 \theta, \tag{6.2}$$

находим, что момент инерции имеет вид

$$J(\xi_0) = \frac{\left[(2\alpha (n+1))^{1/2} - Q(\xi_0)\right]}{2A^3 (2\alpha (n+1))^{1/2}} \xi_0^3, \tag{6.3}$$

Осуществляя переход к нерелятивистской механике в выражении компоненты метрического тензора g_{00}, для массы вращающегося тела и квадрупольного момента получим

$$M_B = v(\xi_0) - \beta \frac{A_0}{2}; \qquad D = \beta \left(A_2 + \frac{C_1'^2}{2v}\right). \tag{6.4}$$

В рассматриваемом нами приближении экваториальный и полярный радиусы, а также эксцентриситет соответственно равны

$$\xi_e = \xi_0 + \beta (d_0 - 0.5 d_2); \quad \xi_p = \xi_0 + \beta (d_0 + d_2); \quad e = \sqrt{1 - \left(\frac{\xi_p}{\xi_e}\right)^2}. \tag{6.5}$$

Все расчеты выполнены для максимально возможного без истечения вещества с экватора параметра β, который определяется соотношением

$$\beta_{max} = \frac{v(\xi_0)/2\xi_0^3}{1 + \frac{v(\xi_0)}{2\xi_0} \left(\frac{A_0}{2v(\xi_0)} + 3\frac{d_0 - 0.5 d_2}{\xi_0}\right)}. \tag{6.6}$$

Кроме того подсчитаны значения полной $E(w)$ и собственной $E_0(w_0)$ энергий в отсутствие и при наличии вращения, а также значения истинных экваториальной и полярной полуосей. В сферическом случае

$$E = \int_0^{\xi_0} \theta^n \xi^2 d\xi; \qquad E_0 = \int_0^{\xi_0} \frac{\theta^n \xi^2 d\xi}{(1 - 2\alpha(n+1)\,v/\xi)^{1/2}}, \tag{6.7}$$

а в случае вращения

$$w = E + \beta \frac{n}{2\alpha(n+1)} \int_0^{\xi_0} \theta^{n-1} (1 + \alpha\theta)\, N_0 \xi^2 d\xi,$$

$$w_0 = w + \beta \int_0^{\xi_0} \frac{\left[(2u_0 - f_0) + \frac{2}{3} e^{-\nu_0} Q^2 \xi^2\right] \xi^2 \theta^n d\xi}{(1 - 2\alpha(n+1)\,v/\xi)^{1/2}}. \tag{6.8}$$

Для истинных значений полуосей имеем

$$\xi_{\text{экв.}} = \int_0^{\xi_0} \left\{\frac{1}{1 - 2\alpha(n+1)\,v/\xi}\right\}^{1/2} d\xi - \beta/2 \int_0^{\xi_0} \frac{(f_0 - 0.5 f_2) - 0.5 B_2 L_2}{1 - 2\alpha(n+1)\,v/\xi} d\xi +$$

$$+ \beta(d_0 - 0.5 d_2) \left\{\left(\frac{1}{1 - 2\alpha(n+1)\,v(\xi_0)/\xi_0}\right)^{1/2} - 1\right\},$$

$$\xi_{\text{пол.}} = \int_0^{\xi_0} \left\{\frac{1}{1 - 2\alpha(n+1)\,v/\xi}\right\}^{1/2} d\xi - \beta/2 \int_0^{\xi_0} \frac{(f_0 + f_2) + B_2 L_2}{1 - 2\alpha(n+1)\,v/\xi} d\xi + \tag{6.9}$$

$$+ \beta(d_0 - 0.5 d_2) \left\{\left(\frac{1}{1 - 2\alpha(n+1)\,v(\xi_0)/\xi_0}\right)^{1/2} - 1\right\}.$$

7. Численное интегрирование системы (5.3) выполнено на ЭВМ «Наири-2». Результаты расчетов представлены в табл. 1 и на рис. 1—6. В таблице все величины записаны в единицах Эмдена. Для перехода к обычной системе единиц значения величин, приведенных в таблице, необходимо соответственно умножить: длину на A^{-1}, плотность на ρ_c, давление на $k\rho_c^{1+1/n}$, массу на $4\pi\rho_c A^{-3}$, момент инерции на $4\pi\rho_c[\alpha(n+1)A^5]^{-1}$, период на $(4\pi\rho_c G)^{-1/2}$.

Как видно из таблицы, в случае политроп с показателем $n=1$; 1.5; 2 прирост массы достигает 4—10%, причем с ростом параметра релятивизма

Таблица 1

ВАЖНЕЙШИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВРАЩАЮЩИХСЯ ПОЛИТРОП

a	ξ_0	ξ'	v	M_B	ξ_p	ξ_e	I	D	T_m	$10^{-4}E_k$	W	W_0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						$n = 1$						
0.1	2.600	2.847	1.751	1.822	2.667	3.010	3.701	0.050	31.34	209.6	2.039	2.436
0.2	2.277	2.718	1.143	1.219	2.362	2.953	2.064	0.094	35.63	256.8	1.277	1.622
0.3	2.064	2.583	0.819	0.884	2.218	2.882	1.303	0.115	34.96	252.5	0.844	1.093
0.4	1.915	2.461	0.625	0.677	2.172	2.778	0.882	0.131	34.96	231.2	0.664	0.845
0.5	1.800	2.328	0.498	0.539	2.158	2.598	0.652	0.144	35.16	208.4	0.512	0.525
						$n = 1.5$						
0.1	3.039	3.330	1.482	1.534	3.162	3.479	3.337	0.188	51.44	124.5	1.648	1.873
0.2	2.699	3.198	0.960	1.015	2.925	3.423	1.869	0.227	51.34	140.0	1.032	1.177
0.5	2.493	3.124	0.688	0.737	2.828	3.369	1.198	0.237	52.58	128.3	0.724	0.868
0.4	2.361	3.071	0.527	0.568	2.795	3.326	0.842	0.241	54.60	111.5	0.543	0.612
0.5	2.275	3.036	0.423	0.458	2.786	3.278	0.631	0.247	57.25	95.01	0.434	0.491
0.6	2.219	2.978	0.351	0.386	2.782	3.226	0.497	0.267	62.01	76.51	0.365	0.413
						$n = 2$						
0.1	3.700	4.028	1.299	1.332	3.744	4.280	3.159	0.371	75.49	65.65	1.386	1.500
0.2	3.398	4.140	0.840	0.875	3.836	4.318	1.816	0.423	80.85	65.80	0.879	0.946
0.3	3.280	4.162	0.605	0.636	3.884	4.356	1.204	0.440	89.75	53.12	0.625	0.670
0.4	3.248	4.188	0.468	0.496	3.938	4.415	0.885	0.461	98.18	43.50	0.480	0.496
0.5	3.296	4.253	0.380	0.403	4.022	4.487	0.695	0.482	114.4	31.45	0.387	0.408
0.6	3.400	4.550	0.320	0.342	4.291	4.748	0.600	0.525	130.9	24.87	0.326	0.341
0.667	3.500	4.729	0.290	0.315	4.457	5.016	0.538	0.672	132.0	24.24	0.296	0.310
						$n = 2.5$						
0.1	4.781	5.392	1.160	1.189	5.232	5.534	3.183	0.700	121.6	29.75	1.174	1.231
0.2	4.724	5.688	0.761	0.779	5.381	5.854	1.924	0.869	146.3	24.83	0.779	0.810
0.3	4.985	6.179	0.556	0.571	5.910	6.433	1.373	1.056	187.0	16.28	0.565	0.581
0.4	5.520	6.950	0.438	0.450	6.732	7.220	1.089	1.324	248.9	9.723	0.444	0.454
0.5	6.403	8.044	0.366	0.377	7.735	8.335	1.014	1.897	342.8	5.959	0.370	0.376
0.6	7.730	9.750	0.320	0.329	9.250	9.980	1.037	2.898	490.1	3.566	0.323	0.327
0.7	9.530	11.92	0.290	0.299	11.92	12.15	1.166	4.645	710.7	2.233	0.293	0.296
0.714	9.824	12.08	0.287	0.296	11.66	12.42	1.194	4.981	748.4	2.104	0.290	0.293

Таблица 1 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$n = 3$												
0.1	6.834	7.608	1.078	1.089	7.424	8.051	3.455	1.454	221.6	11.11	1.106	1.128
0.2	7.951	8.980	0.713	0.715	8.620	9.381	2.367	2.552	346.4	6.231	0.720	0.722
0.3	10.84	12.66	0.539	0.546	12.21	12.98	2.077	5.373	639.9	0.403	0.541	0,545
0.4	18.10	20.88	0.452	0.456	20.36	21.56	2.689	16.57	1533	0.723	0.454	0.456
0.5	37.60	41.17	0.421	0.424	40.59	44.80	6.163	81.94	4806	0.211	0.423	0.425
0.6	90.99	94.26	0.448	0.451	93.28	105.7	30.04	975.8	13911	0.149	0.449	0.450
0.7	176.9	182.1	0.523	0.526	184.3	211.0	162.8	3140	44428	0.092	0.525	0.527
0.75	180.5	186.4	0.566	0.573	189.2	213.6	218.9	3843	44443	0.013	0.568	0.570

ξ — координатный радиус, ξ' — истинный радиус невращающихся конфигураций, ξ_p и ξ_e — истинные полярная и экваториальная полуоси, T_m — минимальный период вращения.

добавка к массе растет. В случае же политроп с индексом $n = 2.5$; 3 прирост массы порядка 1%.

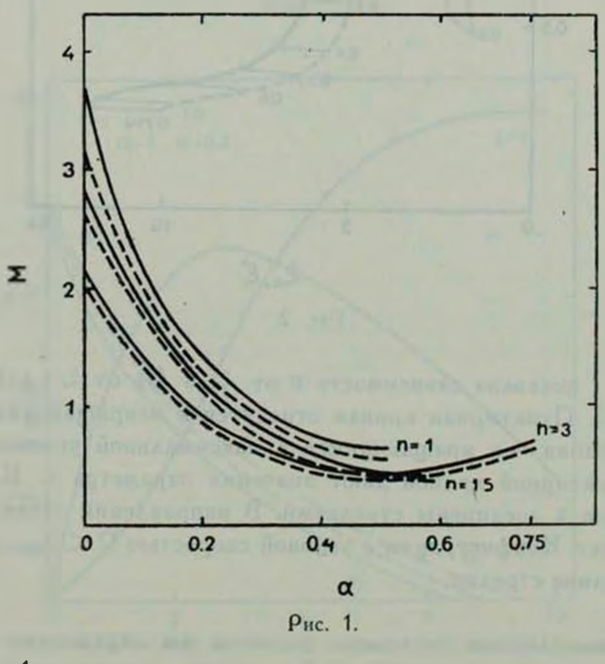

Рис. 1.

На рис. 1 представлена зависимость массы вращающихся и сферически-симметричных конфигураций от параметра релятивизма. Для всех политроп, кроме политролы с индексом $n = 3$, с ростом параметра релятивизма масса убывает. В в случае $n=3$, начиная с $\alpha>0.5$, наблюдается незначительный рост массы. Зависимость массы от α в случае вращающихся конфигураций та же самая, что и в отсутствие вращения.

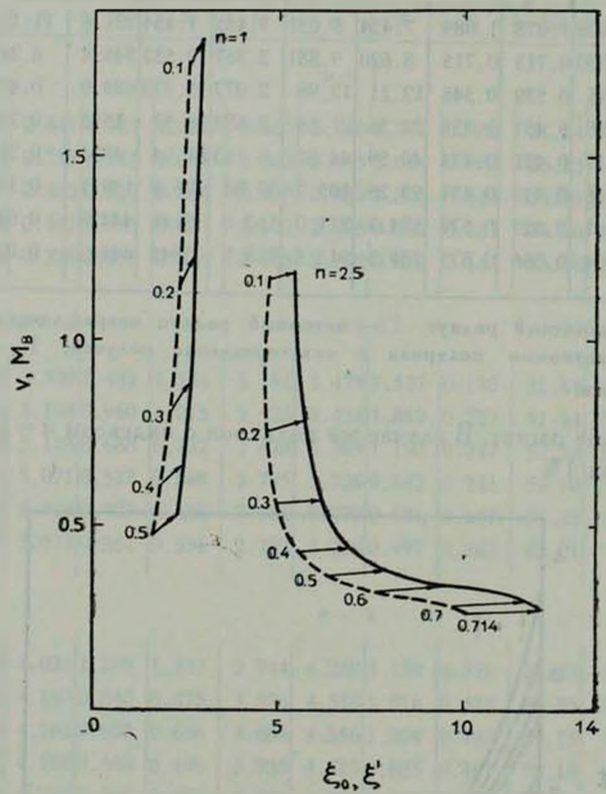

Рис. 2.

На рис. 2 показана зависимость v от ξ_0 и M_B от ξ_r для политроп с $n=1$ и $n=2.5$. Пунктирная кривая относится к невращающимся конфигурациям, сплошная — к вращающимся с максимальной угловой скоростью. Цифры у пунктирной кривой дают значения параметра α. Конфигурации с одинаковыми α соединены стрелками. В направлении стрелок угловая скорость растег. Конфигурации с угловой скоростью $\Omega<\Omega_{max}$ расположены в точках по длине стрелки.

8. При выполнении численных расчетов мы определили также функция, характеризующие внутреннюю структуру конфигураций в зависимости от ξ. Так, на рис. 3 и 4 показаны зависимость функций g_{03}, $J(\xi)$, θ_0, θ_p, θ_c для политроп с $n=1.5$ и $n=3$, $\alpha=0.3$. Вдоль радиуса звезды

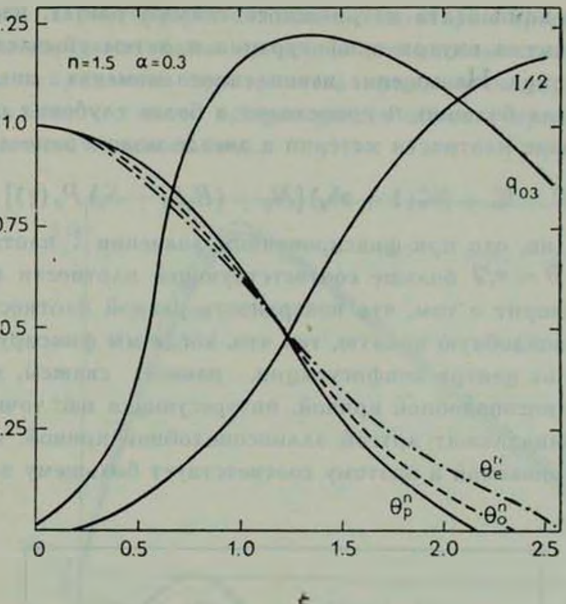
n=1.5 α=0.3
I/2
q03
θ_e^n
θ_p^n
θ_0^n
1.25
1.0
0.75
0.5
0.25
0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
ξ

Рис. 3.

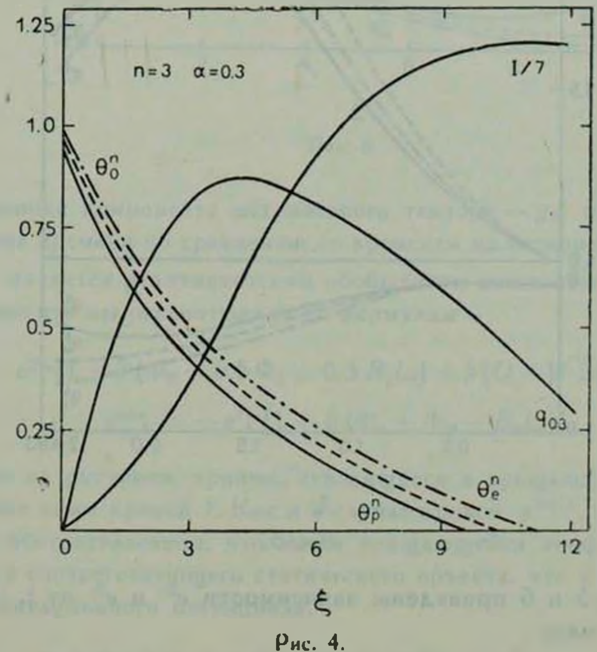
n=3 α=0.3
I/7
θ_0^n
q03
θ_e^n
θ_p^n
1.25
1.0
0.75
0.5
0.25
0
3
6
9
12
ξ

Рис. 4.

недиагональная компонента метрического тензора растет, начиная с нуля, достигает максимума внутри конфигурации и затем убывает до значения $2J(\xi_0)/\xi_0$ на границе. Насыщение накопленного момента инерции внутри конфигурации для больших n происходит в более глубоких областях.

Распределение плотности материи в звезде можно записать в виде

$$\rho'' = \rho_0'' + \beta\rho_0''(1+\alpha\theta_0)\,[N_0 + (B_2L_2 + S_2)\,P_2(\nu)]. \qquad (8.1)$$

Из рисунка видно, что при фиксированном значении ξ плотность материи в направлении $\theta=\pi/2$ больше соответствующей плотности в направлении полюса. Это говорит о том, что поверхность равной плотности образует в сечении эллипсоподобную кривую, так что, когда мы фиксируем координатное расстояние от центра конфигурации, равное, скажем, малой полуоси упомянутой эллипсоподобной кривой, интересующая нас точка в направлении $\theta=\pi/2$ принадлежит другой эллипсоподобной кривой, которая лежит внутри рассматриваемой и поэтому соответствует большему значению плотности.

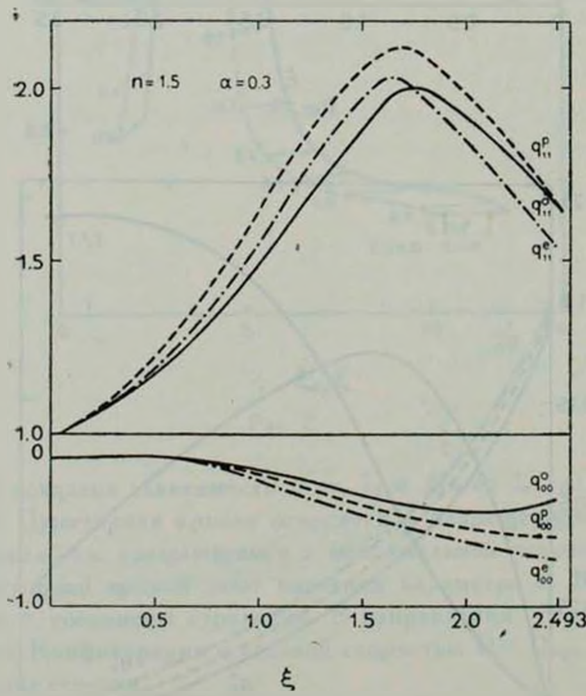

Рис. 5.

На рис. 5 и 6 приведены зависимости $e^{2\nu}$ и $e^{2\lambda}$ от ξ. Внутри распределения масс

$$e^{-2\lambda} = e^{-2\lambda_0}\,[1+\beta(f_0+(f_2+B_2L_2)\,P_2(\nu))]. \qquad (8.2)$$

Величина $e^{2\lambda}$ характеризует отклонение геометрии пространства от евклидова внутри звезды и вблизи от нее (в евклидовом пространстве $e^{2\lambda} = 1$). Увеличение искривления пространства при наличии вращения, очевидно, объясняется тем, что масса вращающегося объекта превышает массу соответствующего статического тела.

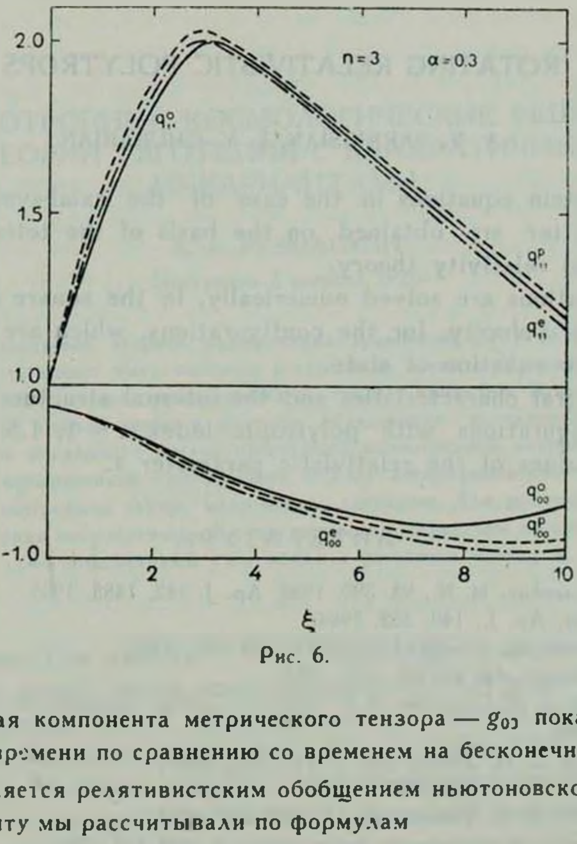

Рис. 6.

Временная компонента метрического тензора — g_{00} показывает замедление темпа времени по сравнению со временем на бесконечности. Величина $\sqrt{-g_{00}}$ является релятивистским обобщением ньютоновского потенциала. Эту компоненту мы рассчитывали по формулам

$$g_{00}^{\text{экв.}} = -e^{2\nu_0}[1 + \beta(\Phi_0 - 0.5\,\Phi_2 + 0.5\,B_2L_2)] + \beta[Q - \sqrt{2\alpha(n+1)}]^2\xi^2,$$
$$g_{00}^{\text{пол.}} = -e^{2\nu_0}[1 + \beta(\Phi_0 + \Phi_2 - B_2L_2)]. \tag{8.3}$$

Как видно из рисунков, кривые, относящиеся к вращающимся конфигурациям, лежат ниже кривой 1. Как и в случае кривой $e^{2\lambda(\xi)}$, это можно объяснить тем обстоятельством, что масса вращающейся конфигурации превышает массу соответствующего статического объекта, что и вызывает увеличение гравитационного потенциала.

Авторы выражают благодарность профессорам Г. С. Саакяну, Н. В. Мицкевичу и участникам семинара кафедры теоретической физики ЕГУ за обсуждения.

Ереванский государственный
университет

ROTATING RELATIVISTIC POLYTROPS

A. V. SARKISSIAN, E. V. CHUBARIAN

The Einstein equations in the case of the axial-symmetric distribution of matter are obtained on the basis of the tetrad formulation of the general relativity theory.

The equations are solved numerically, in the square approximation of the angular velocity, for the configurations, which are described by the polytropic equation of state.

The integral characteristics and the internal structure are calculated for the configurations with polytropic index $n = 1$; 1.5; 2; 2.5; 3 and for various values of the relativistic parameter α.

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. Chandrasechar*, M. N., 93, 390, 1932; Ap. J. 142, 1488, 1965.
2. *R. A. James*, Ap. J., 140, 552, 1964.
3. *P. H. Roberts*, Ap. J., 137, 1129, 1963; 138, 809, 1963.
4. *S. P. S. Anand*, Ap. J., 153, 135, 1968.
5. *В. В. Папоян, Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян*, Сообщ. Бюраканской обс., 39, 84, 1967; 40, 86, 1968.
6. *J. B. Hartle, D. H. Sharp*, Ap. J., 147, 317, 1967.
7. *J. B. Hartle*, Ap. J., 150, 1005, 1967.
8. *J. B. Hartle, K. S. Thorne*, Ap. J., 153, 807, 1968.
9. *Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян*, Астрофизика, 4, 239, 551, 1968.
10. *W. Israel*, Differential Forms in General Relativity, Dublin, 1970.
11. *W. A. Fowler*, Ap. J., 144, 180, 1966.
12. *Г. Г. Арутюнян, Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян*, Астрон. ж., 48, 496, 1971.
13. *R. F. Tooper*, Ap. J., 140, 434, 1964.
14. *Э. В. Чубарян, М. А. Мнацаканян*, Астрофизика, 1, 485, 1965.
15. *С. Чандрасекар*, Введение в учение о строении звезд, ИЛ, М., 1950.
16. *В. В. Папоян, Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян*, Астрофизика, 5, 97, 1969.