АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 13 МАЙ, 1977 ВЫПУСК 2

ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ АТМОСФЕРЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ ИСТОЧНИКИ ЭНЕРГИИ

Э. Х. ДАНИЕЛЯН, О. В. ПИКИЧЯН

Поступила 20 июля 1976

Проведено исследование задач об определении режима излучения в плоскопараллельных атмосферах, содержащих первичные источники энергии.

Установлена связь между полями излучения в полубесконечной и конечной средах, содержащих изотропный источник. Кроме того показано, что в некоторых случаях для нахождения интенсивности излучения можно обходиться без интегрирования уравнения переноса, а ограничиться лишь отысканием соответствующей функции источника и элементарными алгебраическими операциями. Приводятся также асимптотические выражения для определения внутренних полей излучения.

1. *Введение.* Задачи об определении светового режима в плоскопараллельных средах, содержащих первичные источники энергии, имеют большое прикладное значение в астрофизике. С такого рода задачами мы сталкиваемся, например, при исследовании атмосфер некоторого типа нестационарных звезд (UV Cet, T Tau и др.), во внешних слоях которых, по-видимому, время от времени происходит локальное выделение энергии (см., например, [1]). Знание же интенсивности излучения в атмосферах, как известно, позволяет определять различные физические характеристики в ней, как-то: температуру, поток излучения, распределение атомов по возбужденным состояниям и др. Из других конкретных применений вышеуказанной задачи отметим также задачу об определении поля диффузного излучения (а, значит, и состояния вещества), обусловленного излучением звезд, в газовом слое Галактики, который можно схематически представить как плоскопараллельную среду конечной оптической толщины. Разумеется, этот список можно продолжить.

Определение поля излучения в рассеивающих средах, содержащих внутренние источники, с учетом всех геометрических и физических факторов представляет собой трудную задачу. Поэтому приходится делать ряд упрощающих допущений, т. е. рассматривать схематизированные модели.

Ниже мы рассмотрим одну из таких модельных задач об определении стационарного поля излучения в плоскопараллельной однородной среде (как полубесконечной, так и конечной оптической толщины), при наличии в ней изотропного или мононаправленного источника в предположении, что элементарный акт рассеяния кванта происходит со сферической индикатрисой и без изменения частоты.

В настоящее время теория переноса излучения дает принципиальную возможность решения задач об определении поля излучения в рассеивающих средах, содержащих произвольные источники энергии. Определение интенсивности излучения обычно сводится к нахождению функции источника и дальнейшему интегрированию уравнения переноса.

Ниже, в частности, будет показано, что в некоторых случаях интенсивность излучения в среде можно находить без интегрирования уравнения переноса, а просто из некоторого алгебраического соотношения (опять-таки посредством функции источника).

В работе применяется принцип инвариантности в классической трактовке Амбарцумяна [2], а также вероятностный способ описания процессов переноса, впервые предложенный Соболевым [3].

Вопрос о переходе от вероятностей к интенсивностям не затрагивается по причине тривиальности.

2. *Световой режим в среде конечной оптической толщины, содержащей изотропный источник.* Рассмотрим плоскопараллельный слой, ограниченный сверху плоскостью $\tau=0$, а снизу плоскостью $\tau=\tau_0$, и пусть в нем на глубине τ' находится плоский источник, излучающий изотропно. Допустим также, что среда однородна и что элементарный акт рассеяния в ней происходит со сферической индикатрисой и без изменения частоты.

Интенсивность излучения на некоторой глубине τ и в некотором направлении θ можно найти с помощью следующих физических соображений. Добавим к нижней границе рассматриваемого слоя слой бесконечно большой оптической толщины, в результате чего получим полубесконечную среду с источником на глубине τ'. Легко видеть, что излучение, вызванное этим источником на глубине τ, складывается из излучения, диффундировавшего лишь в первоначальном конечном слое и из излучения, обусловленного квантами, покинувшими конечный слой через нижнюю границу и вернувшимися на глубину τ в результате диффузии во всем полупространстве.

Если отсчитывать значения угловых переменных от внешней нормали, то приведенные рассуждения в вероятностных терминах можно записать в виде:

$$P(\tau, \tau', \eta) = p(\tau, \tau', \tau_0, \eta) + 2\pi \int_0^1 G(\tau, \tau_0; \eta, -\zeta)\, p(\tau_0 - \tau', \tau_0, \zeta)\, d\zeta, \quad (1)$$

В этом выражении величина $p(\tau, \tau', \tau_0, \eta)\, d\eta$ есть вероятность того, что квант, поглощенный на глубине τ' в конечном слое толщины τ_0 после рассеяний пересечет некую плоскость, параллельную границе среды на глубине τ в направлении $\eta\, (\eta = \cos\theta)$ в телесном угле $2\pi d\eta$. Величина $P(\tau, \tau, \eta)\, d\eta$ — аналогичная величина для полубесконечной среды, так что

$$P(\tau, \tau', \eta) = p(\tau, \tau', \infty, \eta). \quad (2)$$

Что же касается величин, стоящих под интегралом, то $p(\tau, \tau_0, \zeta)\, d\zeta$ есть вероятность выхода кванта из слоя толщины τ_0, а $G(\tau, \tau_0; \eta, \zeta)\, d\zeta$ представляет собой вероятность того, что квант, первоначально движущийся в полубесконечной среде на глубине τ_0 в направлении ζ в процессе диффузии пересечет плоскость, параллельную границе среды на глубине τ в направлении η, в телесном угле $2\pi d\eta$, т. е. функцию Грина уравнения переноса для полубесконечной среды.

Вышеприведенные рассуждения для выходящего излучения ранее приводились в работах [4—6]. Так, полагая в (1) $\tau = 0$ и считая $\eta > 0$, получим интегральное уравнение для вероятности выхода кванта, найденное в [6] из физических соображений:

$$P(\tau'; \eta) = p(\tau', \tau_0, \eta) + \int_0^1 Z(\tau_0, \eta, \zeta)\, p(\tau_0 - \tau', \tau_0, \zeta)\, d\zeta. \quad (3)$$

Таким образом, определение светового режима в среде конечной толщины, содержащей изотропный источник, сводится к определению величины G и к решению уравнения (3).

3. *Вспомогательные функции U и V и некоторые свойства G-функции.* В работе [6], в частности, было показано, что ядро уравнения (3) можно представить в виде

$$Z(\tau, \eta, \zeta) = \frac{\lambda}{2} \eta \varphi(\eta) \frac{F(\tau, \eta) + \bar{F}(\tau, \zeta)}{\eta + \zeta}. \quad (4)$$

Здесь λ — вероятность выживания кванта, а $\varphi(\eta)$ — функция Амбарцумяна. Вспомогательные же функции F и $\bar{F}$ выражаются через резольвентную функцию Соболева — $\Phi(\tau)$ посредством соотношений:

$$F(\tau, \eta) = e^{-\frac{\tau}{\eta}} + \int_0^{\tau} e^{-\frac{\tau - t}{\eta}} \Phi(t)\, dt \tag{5}$$

и

$$\tilde{F}(\tau, \eta) = \int_{\tau}^{\infty} e^{-\frac{t-\tau}{\eta}} \Phi(t)\, dt \tag{6}$$

и допускают двойственное вероятностное толкование. Подобная двойственность связана с принципом обратимости оптических явлений и выявляется в данном случае умножением последних выражений на $(\lambda/2)d\eta$ и затем на $d\tau/\eta$. В первом случае, учитывая вероятностный смысл функции $\Phi(\tau)$, видим, что величины $(\lambda/2)\, F(\tau, \eta)\, d\eta$ и $(\lambda/2)\, \tilde{F}(\tau, \eta)\, d\eta$ представляют собой вероятности того, что квант, поглощенный на границе полубесконечной среды, в результате диффузии будет двигаться на глубине τ в направлении η в телесном угле $2\pi d\eta$, соответственно вниз или вверх. Величины же $F(\tau, \eta)(d\tau/\eta)$ и $\tilde{F}(\tau, \eta)(d\tau/\eta)$ имеют смысл вероятностей поглощения в пограничном слое $d\tau$ кванта, первоначально движущегося в полубесконечной среде на глубине τ в направлении η, соответственно вверх или вниз.

Функции F и $\tilde{F}$ в [6] рассматривались лишь для положительных угловых аргументов, однако их можно рассматривать и на всей бесконечной оси. При этом легко видеть, что

$$F(\tau, -\eta) + \tilde{F}(\tau, \eta) = e^{-\frac{\tau}{\eta}} \varphi(\eta). \tag{7}$$

Для наших дальнейших целей введем новые вспомогательные функции U и V, заданные на интервале $-1 \leqslant \eta \leqslant 1$ и определяемые как:

$$U(\tau, \eta) = \begin{cases} \dfrac{F(\tau, \eta)}{\eta}; & \eta > 0 \\ & ; \\ -\dfrac{\tilde{F}(\tau, -\eta)}{\eta}; & \eta < 0 \end{cases} \qquad V(\tau, \eta) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2}\tilde{F}(\tau, \eta); & \eta \geqslant 0 \\ \dfrac{\lambda}{2}F(\tau, -\eta); & \eta < 0 \end{cases} \tag{8}$$

Обе эти функции имеют вполне определенный физический смысл, вытекающий из смысла функций F и $\tilde{F}$. Причем очевидно, что

$$\frac{\lambda}{2} |\eta| U(\tau, \eta) = V(\tau, -\eta). \tag{9}$$

Выше мы видели (см. формулу (1) настоящей работы), что для определения светового режима в среде конечной оптической толщины при наличии в ней изотропного источника необходимо иметь функцию Грина—G, характеризующую уже световой режим в полубесконечной среде, содержащей мононаправленный источник. Можно показать, что эту функцию удается представить в виде некоторой алгебраической комбинации от функции P. Однако прежде укажем на некоторые ее свойства. Во-первых, G-функция обладает очень важным свойством симметрии, следующим из принципа обратимости оптических явлений (по этому поводу см., например, [7])

$$|\zeta|\, G(\tau, \tau'; \eta, \zeta) = |\eta|\, G(\tau', \tau; -\zeta, -\eta), \tag{10}$$

кроме того, в силу определений G и P, легко видеть, что:

$$G(\tau, \tau'; \eta, 0) = P(\tau, \tau', \eta) \tag{11}$$

и

$$\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} G(\tau, \tau'; \eta, \zeta)\, d\zeta = P(\tau, \tau', \eta). \tag{12}$$

4. *Мононаправленный и изотропный источники в полубесконечной среде. Эквивалентность двух задач.* Рассмотренная нами функция Грина (в вероятностной трактовке) удовлетворяет следующему интегро-дифференциальному уравнению переноса:

$$\zeta\, \frac{\partial G(\tau, \tau'; \eta, \zeta)}{\partial \tau'} + G(\tau, \tau'; \eta, \zeta) = P(\tau, \tau', \eta) + |\eta|\, \delta(\tau - \tau')\, \delta(\eta - \zeta). \tag{13}$$

Пользуясь принципом обратимости в форме (10), из (13) можно получить еще одно уравнение для G

$$\eta\, \frac{\partial G(\tau, \tau'; \eta, \zeta)}{\partial \tau} - G(\tau, \tau'; \eta, \zeta) = -\frac{|\eta|}{|\zeta|} P(\tau', \tau, -\zeta) - |\eta|\, \delta(\tau - \tau')\, \delta(\eta - \zeta). \tag{14}$$

Кроме того, если воспользоваться принципом инвариантности, т. е. добавить перед полубесконечной средой слой малой толщины $\Delta\tau$, то с учетом смысла функций U и V легко получить третье уравнение для G, содержащее уже производные как по τ, так и по τ'.

$$\frac{\partial G(\tau, \tau'; \eta, \zeta)}{\partial \tau} + \frac{\partial G(\tau, \tau'; \eta, \zeta)}{\partial \tau'} = U(\tau', \zeta)\, V(\tau, \eta). \tag{15}$$

Исключая производные из этих уравнений, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}(\eta-\zeta)\,G(\tau,\ \tau';\ \eta,\ \zeta) &= \\ &= \eta P(\tau,\ \tau',\ \eta)-\zeta P(\tau',\ \tau,\ -\zeta)\,\frac{|\eta|}{|\zeta|}-\eta\zeta U(\tau',\ \zeta)\,V(\tau,\ \eta),\end{aligned} \tag{16}$$

откуда, в частности, при $\eta=\zeta$ имеем

$$P(\tau',\ \tau,\ -\zeta)=P(\tau,\ \tau',\ \zeta)-\zeta U(\tau',\ \zeta)\,V(\tau,\ \zeta). \tag{17}$$

С использованием (17) окончательное выражение для функции Грина примет следующий «симметричный» вид:

$$\begin{aligned}(\eta-\zeta)\,\frac{G(\tau,\ \tau';\ \eta,\ \zeta)}{|\eta|} &= \eta\,\frac{P(\tau,\ \tau',\ \eta)}{|\eta|}-\zeta\,\frac{P(\tau,\ \tau',\ \zeta)}{|\zeta|}- \\ &-\frac{\lambda}{2}\zeta U(\tau',\ \zeta)\,[\eta U(\tau,\ -\eta)-\zeta U(\tau,\ -\zeta)].\end{aligned} \tag{18}$$

Поскольку величины $P(\tau,\ \tau',\ \eta)$ и $G(\tau,\ \tau';\ \eta,\ \zeta)$ описывают интенсивность излучения в полубесконечных атмосферах, содержащих, соответственно, изотропный и мононаправленный источники, постольку выражение (18) устанавливает в известном смысле эквивалентность между этими двумя задачами.

Что касается величины $P(\tau,\ \tau',\ \eta)$, то ее можно находить по-разному. Например, ее можно выразить через резольвенту — $\Gamma(\tau,\ \tau')$. Так как величина P удовлетворяет интегральному уравнению

$$P(\tau,\ \tau',\ \eta)=\frac{\lambda}{2}e^{-\frac{\tau'-\tau}{\eta}}\,\theta\left(\frac{\tau'-\tau}{\eta}\right)+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^{\infty}E_1(|\tau'-t|)\,P(\tau,\ t,\ \eta)\,dt, \tag{19}$$

с очевидностью следующему из физических соображений (здесь $\theta(x)$ — функция единичного скачка), то, решая это уравнение, приходим к искомому выражению

$$P(\tau,\ \tau',\ \eta)=\frac{\lambda}{2}\,e^{-\frac{\tau'-\tau}{\eta}}\,\theta\left(\frac{\tau'-\tau}{\eta}\right)+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^{\infty}e^{-\frac{t-\tau}{\eta}}\,\theta\left(\frac{t-\tau}{\eta}\right)\Gamma(t,\ \tau')\,dt. \tag{20}$$

Заметим, что последнее выражение, как и уравнение (19), справедливо при $\tau'\gtrless\tau$, $-1\leqslant\eta\leqslant1$.

Другое выражение для P можно получить, решая (15), положив в нем предварительно $\zeta=0$ (учитывая (11)), причем при $\tau'>\tau$ получим

$$P(\tau, \tau', \eta) = P(0, \tau' - \tau, \eta) + \int_0^\tau \Phi(\tau' - t)\, V(\tau - t, \eta)\, dt, \qquad (21)$$

а при $\tau' < \tau$

$$P(\tau, \tau', \eta) = P(\tau - \tau', 0, \eta) + \int_0^{\tau'} \Phi(\tau' - t)\, V(\tau - t, \eta) dt. \qquad (22)$$

Отметим, что соотношения, подобные (21) и (22), впервые были получены другим путем Мининым [8]. При получении последних мы воспользовались тем, что $U(\tau, 0) = \Phi(\tau)$ согласно определению этой функции (см. формулы (5), (6) и (8) настоящей работы).

Частные значения величины P, входящие в (21) и (22), удобно находить из (20), полагая $\tau = 0$ и $\tau' = 0$. Проделав это, получим

$$P(0, \tau, \eta) = 2\pi P(\tau, \eta)\, \theta(\eta) + \frac{\lambda}{2} \theta(-\eta)\, \theta(-\tau) \qquad (23)$$

и

$$P(\tau, 0, \eta) = V(\tau, \eta) + \frac{\lambda}{2} \theta(\eta)\, \theta(-\tau). \qquad (24)$$

5. *Асимптотическое поведение исследуемых величин.* Для функции Грина уравнения переноса в полупространстве асимптотические формулы были получены в работах Иванова [9] и Домке и Иванова [10] в общем случае анизотропного рассеяния, причем в последней учитывалась также и поляризация излучения. В них с помощью физических рассуждений функция Грина выражается через милновскую интенсивность.

Ниже мы получим асимптотические представления для G-функции через введенные выше функции U и V, играющие, на наш взгляд, фундаментальную роль в теории изотропного рассеяния в полубесконечной среде и имеющие простой физический смысл. Отметим также, что в отличие от работ [9] и [10] здесь асимптотические формулы получаются вполне строго без привлечения дополнительных физических рассуждений. Для этого воспользуемся решением уравнения (15) для случая $\tau' > \tau$. Оно имеет вид:

$$G(\tau, \tau'; \eta, \zeta) = W(\tau' - \tau, \eta, \zeta)\, \theta(\eta) + \int_0^\tau U(\tau' - t, \zeta)\, V(\tau - t, \eta) dt, \qquad (25)$$

где

$$W(\tau, \eta, \zeta) = \begin{cases} Y(\tau, \eta, \zeta); & \zeta \geqslant 0 \\ Z(\tau, \eta, \zeta); & \zeta \leqslant 0, \end{cases}$$

а Y и Z — некоторые известные функции, введенные и подробно рассмотренные в [6]. Эти функции дают угловое распределение восходящей и нисходящей интенсивностей в полубесконечной среде, освещенной параллельными лучами. Для них известна следующая асимптотическая формула (см., например, [17]):

$$W_{ac}(\tau, \eta, \zeta) = \frac{2\pi P_{ac}(\tau, \eta)}{1 - k\zeta}. \tag{26}$$

Помимо (26) нам понадобятся и асимптотические выражения для вспомогательных функций U и V, которые имеют вид:

$$U_{ac}(\tau, \eta) = \frac{Ce^{-k\tau}}{1 - k\eta}; \qquad V_{ac}(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{2} |\eta| \frac{Ce^{-k\tau}}{1 + k\eta}. \tag{27}$$

Для получения последних достаточно воспользоваться известной асимптотикой резольвентной функции:

$$\Phi_{ac}(\tau) = Ce^{-k\tau}.$$

Теперь, допуская, что $\tau' - \tau \gg 1$, из (25) с помощью (27) получаем

$$G_{ac}(\tau, \tau'; \eta, \zeta) = \frac{1}{1 - k\zeta} \Big| 2\pi P_{ac}(\tau' - \tau, \eta)\delta(\eta) + + Ce^{-k(\tau' - \tau)} \int_0^\tau e^{-kz} V(z, \eta)\, dz \Big|, \tag{28}$$

откуда, в частности, полагая $\zeta = 0$, с учетом (11) имеем

$$P_{ac}(\tau, \tau', \eta) = 2\pi P_{ac}(\tau' - \tau, \eta)\delta(\eta) + Ce^{-k(\tau' - \tau)} \int_0^\tau e^{-kz} V(z, \eta)\, dz. \tag{29}$$

Из сравнения последних видно, что

$$G_{ac}(\tau, \tau'; \eta, \zeta) = \frac{P_{ac}(\tau, \tau', \eta)}{1 - k\zeta}. \tag{30}$$

Для противоположного случая, т. е. при $\tau - \tau' \gg 1$, асимптотическую формулу для G можно получить сразу из (30), воспользовавшись принципом обратимости (10).

$$G_{ac}(\tau, \tau'; \eta, \zeta) = \left| \frac{\eta}{\zeta} \right| \frac{P_{ac}(\tau', \tau, -\zeta)}{1 + k\eta}. \tag{31}$$

Таким образом, формулы (30) и (31) описывают поле излучения в полубесконечной среде «вдали» от мононаправленного источника.

Величину P_{ac} можно находить из (29), однако мы получим другое выражение, во многом более пригодное для вычислений. Полагая в (22) $\tau-\tau'\gg 1$, с учетом (24) и (27) легко получить, что

$$P_{ac}(\tau, \tau', \eta) = \Psi_k(\tau')\, V_{ac}(\tau-\tau', \eta). \tag{32}$$

Здесь обозначено

$$\Psi_k(\tau) = 1 + \int_0^{\tau} e^{-kz}\, \Phi(z)\, dz.$$

Теперь из (32) с помощью (17) можно получить

$$P_{ac}(\tau, \tau', \eta) = \Psi_k(\tau)\, V_{ac}(\tau'-\tau, -\eta) + \eta U_{ac}(\tau', \eta)\, V(\tau, \eta);\ \tau'-\tau\gg 1, \tag{33}$$

или с учетом (27)

$$P_{ac}(\tau, \tau', \eta) = \frac{\lambda}{2}|\eta|\frac{Ce^{-k\tau'}}{1-k\eta}[e^{k\tau}\Psi_k(\tau) + \eta U(\tau, -\eta)];\ \tau'-\tau\gg 1. \tag{33a}$$

Простота этих формул по сравнению с (29) заключается в том, что уже отпадает необходимость в интегрировании вспомогательной функции V.

Одним из следствий формулы (33а) является выражение для милновской интенсивности, полученное впервые в [13].

$$I_M(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{4}\frac{C}{1-k\eta}[e^{k\tau}\Psi_k(\tau) + \eta U(\tau, -\eta)].$$

Последние формулы в совокупности с (30) находятся в согласии с асимптотическим выражением для функции Грина, полученным ранее в [9]. Вернемся теперь к задаче об определении поля излучения в среде конечной толщины. При условии $\tau_0-\tau\gg 1$ из (1) при помощи (30) получим

$$P(\tau, \tau', \eta) = p_{ac}(\tau, \tau', \tau_0, \eta) + 2\pi P_{ac}(\tau, \tau_0, \eta)\, D(\tau_0-\tau', \tau_0), \tag{34}$$

где

$$D(\tau, \tau_0) = \int_0^1 \frac{p(\tau, \tau_0\mu)}{1+k\mu}\, d\mu.$$

Выражение (34) обобщает известную асимптотику для выходящего излучения (см., например, [11]) на случай внутреннего светового режима.

Важно подчеркнуть, что формула (34) в отличие от (28)—(33а) одинаково справедлива как «вдали», так и «вблизи» от источника. Ограничение же $\tau_0 - \tau \gg 1$ означает, что эта формула более точна при определении поля излучения вблизи границ рассматриваемого слоя.

6. *Заключение.* В заключении хотелось бы обратить внимание на одно обстоятельство, имеющее место при решении ряда задач теории переноса. Величины, характеризующие поле излучения и зависящие от двух угловых переменных, как правило, удается представить в виде элементарной комбинации функций, зависящих уже от одной угловой переменной. Подобное обстоятельство впервые было выявлено Амбарцумяном [2] при решении задачи об отражении от полубесконечной среды, а также в задаче об отражении и пропускании конечным слоем. Сходный результат для задачи о нахождении светового режима в полубесконечной среде, освещенной параллельными лучами, был получен независимо разными авторами в работах [6, 12, 13 и 18], причем в [13] рассматривалось анизотропное рассеяние.

В работе Кагивада и Калаба [14] было показано, что то же обстоятельство имеет место и в задаче об определении интенсивности излучения в среде конечной толщины, освещенной параллельными лучами.

Здесь же показано, что то же самое имеет место и в задаче об определении светового режима в полубесконечной среде, содержащей мононаправленный источник. Можно показать, что «разделение» угловых переменных, в указанном выше смысле, имеет место и в задаче об определении интенсивности излучения в среде конечной толщины, содержащей мононаправленный источник. Для этого достаточно воспользоваться приемом, изложенным выше при получении (18). При этом уже получим четыре дифференциальных уравнения (четвертое получается после добавления слоя малой толщины к нижней границе), из которых, исключая производные, придем к искомому соотношению.

Возможность представления решения через функции одной угловой переменной имеет место и в случае диффузии излучения с полным перераспределением по частоте. При этом под «угловой» переменной следует подразумевать величину $\eta/\alpha(x)$ ($\alpha(x)$ — профиль коэффициента поглощения).

Хотелось бы еще раз указать на ту важную роль, которую играют вспомогательные функции U и V в теории изотропного рассеяния. Не останавливаясь здесь на всех задачах, решения которых сводятся к знанию этих функций, ограничимся лишь одним примером, в котором окончательный результат выражается непосредственно через эти функции. Например, интенсивность излучения в полубесконечной атмосфере с источниками, равномерно распределенными по глубине, можно найти из (21) и (22) интегрированием по τ' от нуля до бесконечности. Проделав это и переходя от вероятностей к интенсивностям, получим следующее выражение:

$$I(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{2} \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1-\lambda}} [\Psi(\tau) + \eta U(\tau, -\eta)], \tag{35}$$

совпадающее с точностью до постоянного множителя с выражением для милновской интенсивности при $k=0$. Такое совпадение, конечно, неудивительно, поскольку известно подобное совпадение для соответствующих функций источников (см., например, [15]).

Что касается вычисления функций U и V (или F и $\bar{F}$), то помимо формул (5) и (6), предполагающих знание резольвентной функции $\Phi(\tau)$, можно получить другие, в некоторых случаях, более приемлемые для вычислений. Так, если воспользоваться явным выражением для $\Phi(\tau)$, полученным Мининым в [16], и подставить в (5) и (6), то после интегрирования по оптической глубине, для U, например, получим

$$U(\tau, \eta) = \frac{\theta(\eta) e^{-\frac{\tau}{\eta}}}{\eta a(\eta) \varphi(\eta)} + \frac{Ce^{-k\tau}}{1-k\eta} + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\tau}{\mu}}}{R^2(\mu) \varphi(\mu)} \frac{d\mu}{(\mu - \eta)}, \tag{36}$$

где

$$a(\eta) = 1 - \frac{\lambda}{2} \eta \ln \left| \frac{\eta+1}{\eta-1} \right|; \qquad R^2(\mu) = a^2(\mu) + \left(\frac{\lambda \pi \mu}{2} \right)^2.$$

Легко видеть, что вычисление U для одного значения η по формуле (36) требует примерно тех же усилий, что и вычисление $\Phi(\tau)$.

Авторы глубоко признательны академику В. А. Амбарцумяну за проявленный интерес к работе, а также В. В. Иванову за ценные замечания и А. Г. Никогосяну за обсуждение полученных результатов.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

THE FIELD OF RADIATION IN A PLANE PARALLEL ATMOSPHERE INVOLVING ENERGY SOURCES

E. KH. DANIELIAN, H. V. PIKIDJIAN

The study of the problems on the determination of the internal radiation regime in the plane parallel atmospheres involving the original energy sources has been carried out.

The connection between the internal radiation fields of the finite, and semifinite media, involving the isotropic source has been established

In addition, it has been shown that in some cases one can dispense with the determination of the radiative transfer equation for the determination of the diffuse intensity and limit oneself only to the search of the corresponding source function as well as the elementary algebraic operations. The corresponding asymptotic formulas for the determination of the internal fields have elso been provided.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, Научные труды, т. 2, Ереван, 1960.
2. *В. А. Амбарцумян*, Научные труды, т. 1, Ереван, 1960.
3. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 28, 355, 1951.
4. *Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян*, ДАН СССР, 217, 533, 1974.
5. *М. А. Мнацаканян*, Сообщ. Бюраканской обс., 46, 93, 1975.
6. *Э. Х. Даниелян, М. А. Мнацаканян*, Сообщ. Бюраканской обс., 46, 101, 1975.
7. *К. М. Кейз, П. Ф. Цвайфель*, Линейная теория переноса, Мир, М., 1972.
8. *И. Н. Минин*, Вестн. ЛГУ, 13, 106, 1963.
9. *В. В. Иванов*, Астрофизика, 10, 193, 1974.
10. *Х. Домке, В. В. Иванов*, Астрон. ж., 52, 1034, 1975.
11. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 155, 316, 1964.
12. *T. W. Mullikin*, Multiple Scattering in a Homogeneous Plane-Parallel Atmosphere, RAND Corporation RM-4846-PR, 1965.
13. *В. В. Иванов*, Астрон. ж., 52, 217, 1975.
14. *H. H. Kagiwada, R. A. Kalaba*, Ap. J., 147, 301, 1967.
15. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
16. *И. Н. Минин*, ДАН СССР, 120, 63, 1958.
17. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГИТТЛ, М., 1956.
18. *Э. Г. Яновицкий*, ДАН СССР, 227, 1319, 1976.