

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 12

НОЯБРЬ, 1976

ВЫПУСК 4

ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ СЛОЕ, ОСВЕЩЕННОМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ЛУЧАМИ

Э. Х. ДАНИЕЛЯН

Поступила 25 февраля 1976

Пересмотрена 10 мая 1976

Рассмотрена задача о внутреннем режиме излучения в слое конечной оптической толщины для случая изотропного рассеяния. Показано, что при освещении среды параллельными лучами интенсивность излучения внутри среды можно находить посредством функции источника без интегрирования по оптической глубине

1. *Введение и постановка задачи.* Рассмотрим задачу диффузии монохроматического излучения в однородной плоскопараллельной среде конечной оптической толщины, освещенной параллельными лучами. Будем считать, что элементарный акт рассеяния происходит со сферической индикатрисой. Для нахождения интенсивностей диффузного излучения, идущих вниз и вверх (считается, что среда освещена сверху) в рассматриваемом слое, теория переноса излучения дает, соответственно:

$$I_1(\tau, \tau_0, \tau_1, \zeta) = \int_0^{\tau_1} e^{-\frac{\tau-t}{\chi}} B(t, \tau_0, \zeta) \frac{dt}{\chi} \quad (1)$$

и

$$I_2(\tau, \tau_0, \tau_1, \zeta) = \int_0^{\tau_1} e^{-\frac{\tau-t}{\chi}} B(t, \tau_0, \zeta) \frac{dt}{\chi} \quad (2)$$

(в обеих формулах $\chi > 0$), сводя задачу к предварительному нахождению функции источника, которая в рассматриваемом случае удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$B(z, \tau_0, \zeta) = \frac{\lambda}{4} e^{-\frac{z}{\tau}} + \frac{\lambda}{2} \int_0^z E_1(|\tau - t|) B(t, \tau_0, \zeta) dt, \quad (3)$$

если излучение, падающее на среду, создает освещенность π на площадке, перпендикулярной падающим лучам.

Задача об определении функции источника сама по себе является довольно сложной, а вычисление интенсивностей излучения по формулам (1) и (2) предполагает знание этой функции на всех оптических глубинах.

В связи с этим было бы заманчиво отыскать некоторые соотношения, позволяющие находить интенсивность излучения на заданной глубине посредством функции источника, заданной лишь на той же глубине. Такие соотношения для случая диффузии излучения в полубесконечной среде, освещенной параллельными лучами, были получены недавно в [1]. Некоторые результаты в этом направлении, также для полубесконечной среды, были достигнуты в работах Малликина [2] и Иванова [3], причем в последней рассматривается случай анизотропного рассеяния.

Ниже некоторые частные результаты, полученные в [1], обобщаются на случай диффузии излучения в слое конечной оптической толщины.

В нашем рассмотрении физические соображения играют немаловажную роль, поэтому ниже будем придерживаться вероятностного способа описания процессов переноса, предложенного Соболевым [4]. Применяется также метод сложения слоев в классической трактовке Амбарцумяна [5].

2. Функции Y и Z и некоторые их свойства. Пусть имеется плоскопараллельная среда, ограниченная сверху плоскостью $\tau=0$, а снизу плоскостью $\tau=\tau_0$, и пусть в ней на глубине τ имеется квант, движущийся в направлении ζ в сторону верхней границы. Вероятность его выхода с границы $\tau=0$ в направлении η в телесном угле $2\pi d\eta$ обозначим через $Y(\tau, \tau_0, \eta, \zeta)d\eta$. Аналогичную величину, но для кванта, первоначально движущегося в сторону нижней границы, обозначим через $Z(\tau, \tau_0, \eta, \zeta)d\eta$. Из определений следует, что эти величины можно представить в виде

$$Y(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) = e^{-\frac{\tau}{\tau}} \delta(\eta - \zeta) + 2\pi \int_0^{\tau} e^{-\frac{\tau-t}{\tau}} p(t, \tau_0, \eta) \frac{dt}{\tau} \quad (4)$$

и

$$Z(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) = 2\pi \int_{\tau}^{\tau_0} e^{-\frac{\tau_0-t}{\tau}} p(t, \tau_0, \eta) \frac{dt}{\tau}. \quad (5)$$

Здесь $p(\tau, \tau_0, \eta)$ — обычная плотность вероятности выхода кванта.

Выражения (4) и (5), получаемые из простых физических соображений, представляют собой фактически интегральную форму уравнения переноса (в вероятностных терминах) и для более общего случая анизотропного рассеяния приводятся в работе Минина [6].

Сравнивая (4) с (1), а (5) с (2) и учитывая, что $B(\tau, \tau_0, \eta) = -\pi p(\tau, \tau_0, \eta)$, получаем

$$I_1(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} Y(\tau, \tau_0, \zeta, \eta) - \frac{1}{2} e^{-\frac{\tau-\tau_0}{2}} \delta(\eta - \zeta) \quad (6)$$

и

$$I_2(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} Z(\tau, \tau_0, \zeta, \eta). \quad (7)$$

т. е. переход от вероятностей к интенсивностям в рассматриваемой задаче осуществляется перестановкой угловых переменных и умножением на некоторую постоянную. Разумеется, этот результат тривиален и вытекает из принципа обратимости оптических явлений.

Выражения (4) и (5) можно записать и в форме дифференциальных уравнений:

$$\tau \frac{\partial Y(\tau, \tau_0, \eta, \zeta)}{\partial \tau} + Y(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) = 2\pi p(\tau, \tau_0, \eta) \quad (8)$$

и

$$\tau \frac{\partial Z(\tau, \tau_0, \eta, \zeta)}{\partial \tau} - Z(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) = -2\pi p(\tau, \tau_0, \eta) \quad (9)$$

со следующими граничными условиями:

$$Y(0, \tau_0, \eta, \zeta) = \delta(\eta - \zeta); \quad Y(\tau_0, \tau_0, \eta, \zeta) = r_B(\tau_0, \eta, \zeta) \quad (10)$$

и

$$Z(0, \tau_0, \eta, \zeta) = r_B(\tau_0, \eta, \zeta); \quad Z(\tau_0, \tau_0, \eta, \zeta) = 0, \quad (11)$$

с очевидностью следующих из их физического смысла. В последних выражениях r_B и π_B представляют собой, соответственно, вероятности отражения и пропускания слоем τ , и отличаются от обычных коэффициентов отражения и пропускания множителем 2η . Это следует из физического смысла функций Амбарцумяна и нелинейных уравнений для них.

Если квант первоначально летит на глубине τ параллельно границе среды, т. е. $\zeta=0$, то он рано или поздно, поглотившись на той же глубине, выйдет с вероятностью $2\eta p(\tau, \tau_0, \eta)$, т. е.

$$Y(\tau, \tau_0, \eta, 0) = Z(\tau, \tau_0, \eta, 0) = 2\pi p(\tau, \tau_0, \eta). \quad (12)$$

Отметим также два интегральных соотношения для Y и Z , которые также следуют из их смысла:

$$Y(\tau_1 + \tau_0, \tau_0, \eta, \zeta) = \int_0^1 Y(\tau_1, \tau_0, \eta, \mu) Y(\tau_0, \tau_0 - \tau_1, \mu, \zeta) d\mu \quad (13)$$

и

$$Z(\tau_1 + \tau_0, \tau_0, \eta, \zeta) = \int_0^1 Y(\tau_1, \tau_0, \eta, \mu) Z(\tau_0, \tau_0 - \tau_1, \mu, \zeta) d\mu. \quad (14)$$

Для выявления последних достаточно представить слой τ состоящим из слоев τ_1 и τ_0 ($\tau = \tau_1 + \tau_0$).

3. *Дифференциальные уравнения для Y и Z .* Для каждой из величин Y и Z можно получить помимо (8) и (9) еще по два дифференциальных уравнения, содержащих производные по τ и по τ_0 . После чего, исключая производные, можно будет прийти к некоторым алгебраическим выражениям для них. Для этого воспользуемся методом сложения слоев. Вначале добавим слой малой толщины $\Delta\tau$ к верхней границе рассматриваемого слоя. В этом случае легко получить, что

$$Y(\tau + \Delta\tau, \tau_0 + \Delta\tau, \eta, \zeta) = Y(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) \left[1 - \frac{\Delta\tau}{\eta} \right] + \frac{\lambda}{2} \varphi(\tau_0, \eta) \int_0^1 Y(\tau, \tau_0, \mu, \zeta) \frac{d\mu}{\mu} \Delta\tau \quad (15)$$

и

$$Z(\tau + \Delta\tau, \tau_0 + \Delta\tau, \eta, \zeta) = Z(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) \left[1 - \frac{\Delta\tau}{\eta} \right] + \frac{\lambda}{2} \varphi(\tau_0, \eta) \int_0^1 Z(\tau, \tau_0, \mu, \zeta) \frac{d\mu}{\mu} \Delta\tau \quad (16)$$

и после необходимых разложений

$$\frac{\partial Y}{\partial \tau} + \frac{\partial Y}{\partial \tau_0} + \frac{Y}{\eta} = \frac{\lambda}{2} \varphi(\tau_0, \eta) \int_0^1 Y(\tau, \tau_0, \mu, \zeta) \frac{d\mu}{\mu} \quad (17)$$

и

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau} + \frac{\partial Z}{\partial \tau_0} + \frac{Z}{\eta} = \frac{\lambda}{2} \varphi(\tau_0, \eta) \int_0^1 Z(\tau, \tau_0, \mu, \zeta) \frac{d\mu}{\mu}. \quad (18)$$

Если теперь слой малой толщины добавить к нижней границе, то аналогично получим:

$$\frac{\partial Y}{\partial \tau_0} = \frac{\lambda}{2} \varphi(\tau_0, \eta) \int_0^1 Z(\tau_0 - \tau, \tau_0, \eta, \zeta) \frac{d\eta}{\eta}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau_0} = \frac{\lambda}{2} \psi(\tau_0, \eta) \int_0^1 Y(\tau_0 - \tau, \tau_0, \eta, \zeta) \frac{d\eta}{\eta}. \quad (20)$$

Входящие в эти формулы функции $\varphi(\tau_0, \eta)$ и $\psi(\tau_0, \eta)$ — есть функции Амбарцумяна, определяющие вероятность выхода кванта из среды при поглощении его в поверхностном слое.

4. Вспомогательные функции F и $\bar{F}$ и окончательные выражения для Y и Z .

Определим вспомогательные функции F и $\bar{F}$ как

$$F(\tau, \tau_0, \zeta) = \zeta \int_0^1 Y(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) \frac{d\eta}{\eta}; \quad \bar{F}(\tau, \tau_0, \zeta) = \zeta \int_0^1 Z(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) \frac{d\eta}{\eta}. \quad (21)$$

Для них, если иметь в виду (10) и (11), должны иметь место следующие граничные условия:

$$F(0, \tau_0, \zeta) = 1; \quad \bar{F}(\tau_0, \tau_0, \zeta) = \varphi(\tau_0, \zeta) \quad (22)$$

и

$$\bar{F}(0, \tau_0, \zeta) = \varphi(\tau_0, \zeta) - 1; \quad \bar{F}(\tau_0, \tau_0, \zeta) = 0. \quad (23)$$

Теперь, воспользовавшись введенными обозначениями и сравнив (8) с (17) и (19), а (9) с (18) и (20), исключая производные, получим следующие выражения для Y и Z :

$$\begin{aligned} & (\tau_1 - \zeta) Y(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) = \\ & = \frac{\lambda}{2} \eta \left[\frac{4\pi}{\lambda} \rho(\tau, \tau_0, \eta) - \varphi(\tau_0, \eta) F(\tau, \tau_0, \zeta) + \psi(\tau_0, \eta) \bar{F}(\tau_0 - \tau, \tau_0, \zeta) \right] \end{aligned} \quad (24)$$

и

$$\begin{aligned} & (\tau_1 + \zeta) Z(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) = \\ & = \frac{\lambda}{2} \eta \left[\frac{4\pi}{\lambda} \rho(\tau, \tau_0, \eta) + \varphi(\tau_0, \eta) \bar{F}(\tau, \tau_0, \zeta) - \psi(\tau_0, \eta) F(\tau_0 - \tau, \tau_0, \zeta) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

Последний результат был получен ранее в работе Кагивада и Калаба [7] другим путем.

Вычисления по формулам (24) и (25) предполагают знание вспомогательных функций F и $\bar{F}$ (помимо $p(\tau, \tau_0, \eta)$). В свою очередь, для вычисления этих функций достаточно иметь резольвентную функцию $\Phi(\tau, \tau_0)$ на всем интервале оптических глубин $0 < \tau \leq \tau_0$. Действительно, поскольку

$$\Phi(\tau, \tau_0) = 2\pi \int_0^1 p(\tau, \tau_0, \mu) \frac{d\mu}{\mu}, \text{ то, умножая (4) и (5) на } \tau \frac{d\eta}{\eta} \text{ и интегрируя}$$

и пределах от 0 до 1, мы получим выражения для F и $\bar{F}$ посредством резольвентной функции. Однако нам представляется более целесообразным вычислять эти функции другим путем, избегая при этом интегрирования по оптической глубине.

Так, полагая в (24) $\eta = \zeta$, сразу получаем элементарную связь между F , $\bar{F}$ и p .

$$\frac{4\pi}{\zeta} p(\tau, \tau_0, \eta) = \tau(\tau_0, \eta) F(\tau, \tau_0, \eta) - \tau(\tau_0, \eta) \bar{F}(\tau_0 - \tau, \tau_0, \eta) \quad (26)$$

Кроме того, вспомогательную функцию $\bar{F}$ можно выразить через вероятность выхода кванта посредством некоторого интеграла по угловой переменной. Для этого умножим (25) на $\frac{\zeta}{\eta} \frac{d\eta}{\eta + \zeta}$ и проинтегрируем от 0 до 1.

Далее, воспользовавшись соотношениями (21) и (26), а также первым из нелинейных уравнений для φ и ψ -функций Амбарцумяна, получим выражение

$$\frac{1}{2\pi} \bar{F}(\tau, \tau_0, \zeta) = \tau(\tau_0, \zeta) \int_0^1 \frac{p(\tau, \tau_0, \mu)}{\zeta + \mu} d\mu - \tau(\tau_0 - \tau, \tau_0, \zeta) \int_0^1 \frac{\tau(\tau_0, \mu)}{\zeta + \mu} d\mu, \quad (27)$$

которое, между прочим, при $\tau=0$ переходит в это же самое уравнение (нелинейное уравнение для φ -функции).

Таким образом, предлагается следующий порядок вычислений по формулам (24) и (25). Вначале вычисляются величины $p(\tau, \tau_0, \eta)$ и $p(\tau_0 - \tau, \tau_0, \eta)$, затем по формулам (26) и (27) строятся вспомогательные функции F и $\bar{F}$ и в конце следуют элементарные вычисления по формулам (24) и (25).

5. Заключение. Предложенный выше способ определения внутреннего режима в среде конечной оптической толщины, освещенной параллельным

лучами, оправдывает себя и с той точки зрения, что величину $p(\tau, \tau_0, \eta)$ можно находить и методом, развитым в уже упомянутой работе [1], который к тому же позволяет определять эту величину одновременно на глубинах τ и $\tau_0 = \tau$. Этот метод сводится к решению следующего интегрального уравнения:

$$P(\tau, \tau_0) = p(\tau, \tau_0, \eta) + \int_0^{\tau} z(\tau_0, \tau_0, \eta) p(\tau_0 - \tau, \tau_0, \eta) d\tau. \quad (28)$$

Здесь P — вероятность выхода кванта из полубесконечной среды, а ядерная функция z представляет собой некую характеристику полубесконечной среды и весьма просто выражается через более простые характеристики полубесконечной среды, зависящие уже лишь от одной угловой переменной.

И, в заключение, еще раз хотелось бы обратить внимание на соотношения (13) и (14), представляющие собой своеобразные «теоремы сложения» оптических глубин. С их помощью можно находить интенсивность излучения на любой глубине, если дана интенсивность на некоторой малой глубине, положив в них $\tau_1 = \tau_2 = \Delta\tau$, т. е., удваивая шаг по τ . Кроме того, эти соотношения в силу своей общности позволяют получить многие частные результаты и в этом смысле представляют определенный интерес. Например, полагая в (13) $\zeta = 0$, а затем и $\tau_2 = 0$ и пользуясь выражением (4), получаем уравнение типа Вольтерра для $p(\tau, \tau_0, \eta)$:

$$p(\tau, \tau_0, \eta) = \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\lambda}{2}(\tau_0 - \tau, \eta)} + \int_0^{\tau} K(\tau - t, \tau_0 - t) p(t, \tau_0, \eta) dt \quad (29)$$

и для резольвентной функции:

$$\Phi(\tau, \tau_0) = K(\tau, \tau_0, -\tau) + \int_0^{\tau} K(\tau - t, \tau_0 - t) \Phi(t, \tau_0) dt. \quad (30)$$

В этих выражениях

$$K(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau} e^{-\frac{\lambda}{2}(\tau_0, \eta)} \frac{d\eta}{\eta}.$$

Считаю приятным долгом выразить благодарность академику В. А. Амбарцумяну, а также М. А. Мнацаканяну за проявленный интерес к настоящей работе.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

THE FIELD OF RADIATION IN THE PLANE LAYER
ILLUMINATED BY PARALLEL RAYS

E. Kh. DANIELIAN

The problem of internal radiation regime in the slab of finite thickness for isotropic scattering is considered. It has been shown that in the case of parallel radiation the internal intensity may be found in terms of source function without integration over to the optical depth.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Х. Даниелян, М. А. Мнацаканян, Сообщ. Бюраканской обс., 46, 101, 1975.
2. T. W. Mullikin. Multiple Scattering in a Homogenous Plane-Parallel Atmosphere, The RAND Corporation, RM-4846, 1965.
3. В. В. Иванов, Астрон. ж., 52, 217, 1975.
4. В. В. Соболев, Астрон. ж., 28, 355, 1951.
5. В. А. Амбарцумян. Научные труды, т. 1, Ереван, 1960.
6. И. Н. Минин, Вестн. АГУ, 1, 133, 1961.
7. H. H. Kagiwada, R. E. Kalaba, Ap. J., 147, 301, 1967.