АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 12 АВГУСТ, 1976 ВЫПУСК 3

КОЭФФИЦИЕНТЫ ЯРКОСТИ ДВУСЛОЙНОЙ АТМОСФЕРЫ ПРИ НЕИЗОТРОПНОМ РАССЕЯНИИ. II

А. К. КОЛЕСОВ

Поступила 8 июля 1975

Исследуются вспомогательные функции, являющиеся обобщением функций Амбарцумяна φ и ψ на случай анизотропно рассеивающей двуслойной атмосферы. Показано, что при заданных значениях индексов i и m независимыми являются три вспомогательные функции. Для них получены линейные интегральные уравнения. Ядро и свободные члены этих уравнений выражаются через оптические характеристики слоев, составляющих рассматриваемую атмосферу.

1. *Постановка задачи.* В предыдущей работе автора [1] была рассмотрена задача об определении коэффициентов яркости двуслойной атмосферы, состоящей из верхнего слоя оптической толщины τ_1 и нижнего слоя оптической толщины τ_2. Считалось, что вероятности выживания квантов при элементарных актах рассеяния в этих слоях равны соответственно λ_1 и λ_2, а индикатрисы рассеяния — $x_1(\gamma)$ и $x_2(\gamma)$. Оптическая глубина τ точек атмосферы отсчитывалась от внешней границы верхнего слоя. Предполагалось, что атмосфера освещена параллельными лучами, падающими под углом $\arccos \zeta$ к нормали при азимуте $\varphi_0=0$ либо сверху на поверхность $\tau=0$ ($j=1$), либо снизу на поверхность $\tau=\tau_1+\tau_2$ ($j=2$), либо на поверхность $\tau=\tau_1$, сверху ($j=3$) или снизу ($j=4$) и создающими освещенность πS перпендикулярной к ним площадки. Интенсивности $I_{jk}(\tau, \eta, \zeta, \varphi)$ диффузного излучения, распространяющегося на оптической глубине τ под углом $\arccos \eta$ к внутренней нормали при азимуте φ, и соответствующей функции источников $B_{jk}(\tau, \eta, \zeta, \varphi)$ приписывались индексы j и k, обозначающие соответственно номер задачи ($j=1, 2, 3, 4$) и номер среды ($k=1$ — верхний слой, $k=2$ — нижний слой).

Если индикатрисы рассеяния $x_k(\gamma)$ разложены в ряды по полиномам Лежандра $P_i(\cos\gamma)$, т. е.

$$x_k(\gamma) = \sum_{l=0}^{n_k} x_{lk} P_l(\cos\gamma), \tag{1}$$

то интенсивности диффузно отраженного излучения $I_{j1}(0, -\eta, \zeta, \varphi)$, диффузно пропущенного излучения $I_{j2}(\tau_1 + \tau_2, + \eta, \zeta, \varphi)$ и диффузного излучения на границе двух слоев $I_{j1}(\tau_1, \pm \eta, \zeta, \varphi) = I_{j2}(\tau_1, \pm \eta, \zeta, \varphi)$ представляются в виде

$$I_{j1}(0, -\eta, \zeta, \varphi) = S\zeta \left[V_j^0(\eta, \zeta) + 2 \sum_{m=1}^{n} V_j^m(\eta, \zeta) \cos m\varphi \right], \tag{2}$$

$$I_{j2}(\tau_1 + \tau_2, + \eta, \zeta, \varphi) = S\zeta \left[W_j^0(\eta, \zeta) + 2 \sum_{m=1}^{n} W_j^m(\eta, \zeta) \cos m\varphi \right], \tag{3}$$

$$I_{jk}(\tau_1, - \eta, \zeta, \varphi) = S\zeta \left[v_j^0(\eta, \zeta) + 2 \sum_{m=1}^{n} v_j^m(\eta, \zeta) \cos m\varphi \right], \tag{4}$$

$$I_{jk}(\tau_1, + \eta, \zeta, \varphi) = S\zeta \left[w_j^0(\eta, \zeta) + 2 \sum_{m=1}^{n} w_j^m(\eta, \zeta) \cos m\varphi \right], \tag{5}$$

где n — наибольшая из величин n_1 и n_2, а коэффициенты яркости $V_j^m(\eta, \zeta)$, $W_j^m(\eta, \zeta)$ $v_j^m(\eta, \zeta)$ и $w_j^m(\eta, \zeta)$ определяются формулами:

$$V_j^m(\eta, \zeta) = \frac{1}{S\eta\zeta} \int_0^{\tau_1} B_{j1}^m(\tau, -\eta, \zeta)\, e^{-\frac{\tau}{\eta}} d\tau + \frac{1}{S\eta\zeta} \int_{\tau_1}^{\tau_1+\tau_2} B_{j2}^m(\tau, -\eta, \zeta)\, e^{-\frac{\tau}{\eta}} d\tau, \tag{6}$$

$$\begin{gathered} W_j^m(\eta, \zeta) = \frac{1}{S\eta\zeta} \int_0^{\tau_1} B_{j1}^m(\tau, \eta, \zeta)\, e^{-\frac{\tau_1+\tau_2-\tau}{\eta}} d\tau + \\ + \frac{1}{S\eta\zeta} \int_{\tau_1}^{\tau_1+\tau_2} B_{j2}^m(\tau, \eta, \zeta)\, e^{-\frac{\tau_1+\tau_2-\tau}{\eta}} d\tau, \end{gathered} \tag{7}$$

$$v_j^m(\eta, \zeta) = \frac{1}{S\eta\zeta} \int_{\tau_1}^{\tau_1+\tau_2} B_{j2}^m(\tau, -\eta, \zeta)\, e^{-\frac{\tau-\tau_1}{\eta}} d\tau, \tag{8}$$

$$w_j^m(\eta, \zeta) = \frac{1}{S\eta\zeta} \int_0^{\tau_1} B_j^m(\tau, \eta, \zeta)\, e^{-\frac{\tau_1-\tau}{\eta}} d\tau. \tag{9}$$

Здесь $B_{jk}^m(\tau, \eta, \zeta)$ — коэффициенты разложения функций источников $B_{jk}(\tau, \eta, \zeta, \varphi)$ в ряды по косинусам углов, кратных азимуту φ, а именно,

$$B_{jk}(\tau, \eta, \zeta, \varphi) = B_{jk}^0(\tau, \eta, \zeta) + 2\sum_{m=1}^{\infty} B_{jk}^m(\tau, \eta, \zeta)\cos m\varphi. \tag{10}$$

Для коэффициентов яркости в работе [1] были выведены формулы, выражающие эти функции двух угловых переменных через следующие вспомогательные функции одной угловой переменной:

$$F_{ij}^m(\zeta) = P_i^m(\zeta)\, b_{j1}(0, \zeta) + 2\zeta(-1)^{(i+m)j}\int_0^1 P_i^m(\eta)\, V_j^m(\eta, \zeta)\, d\eta, \tag{11}$$

$$G_{ij}^m(\zeta) = P_i^m(\zeta)\, b_{j2}(\tau_1 + \tau_2, \zeta) + 2\zeta(-1)^{(i+m)(j+1)}\int_0^1 P_i^m(\eta)\, W_j^m(\eta, \zeta)\, d\eta, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} f_{ij}^m(\zeta) = P_i^m(\zeta)\, b_{j2}(\tau_1, \zeta) &+ 2\zeta(-1)^{(i+m)j}\int_0^1 P_i^m(\eta)\, v_j^m(\eta, \zeta)\, d\eta + \\ &+ 2\zeta(-1)^{(i+m)(j+1)}\int_0^1 P_i^m(\eta)\, w_j^m(\eta, \zeta)\, d\eta, \end{aligned} \tag{13}$$

$$g_{ij}^m(\zeta) = f_{ij}^m(\zeta) + (\delta_{j4} - \delta_{j3})\, P_i^m(\zeta), \tag{14}$$

где $P_i^m(\zeta)$ — присоедененные функции Лежандра, δ_{jl} — символы Кронекера, а функции $b_{jk}(\tau, \zeta)$ равны

$$\begin{aligned} &b_{11}(\tau, \zeta) = b_{12}(\tau, \zeta) = e^{-\frac{\tau}{\zeta}}, \quad b_{21}(\tau, \zeta) = b_{22}(\tau, \zeta) = e^{-\frac{\tau_1 + \tau_2 - \tau}{\zeta}}, \\ &b_{31}(\tau, \zeta) = 0, \quad b_{32}(\tau, \zeta) = e^{-\frac{\tau - \tau_1}{\zeta}}, \quad b_{41}(\tau, \zeta) = e^{-\frac{\tau_1 - \tau}{\zeta}}, \quad b_{42}(\tau, \zeta) = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

В настоящей работе будут получены интегральные уравнения для вспомогательных функций. Будет показано также, что при заданных значениях i и m из 12 вспомогательных функций независимыми являются три, через которые выражаются остальные 9 функций.

2. *Связь функций источников двуслойной атмосферы с функциями источников однородных атмосфер.* Обозначим через $C_k(\tau, \eta, \zeta, \varphi)$ $(k = 1;\ 2)$

функции источников однородных атмосфер с оптическими толщинами τ_k, вероятностями выживания кванта при элементарном акте рассеяния λ_k и индикатрисами рассеяния $x_k(\gamma)$ при условии, что эти атмосферы освещены параллельными лучами, падающими сверху, а через $D_k(\tau, \eta, \zeta, \varphi)$ — соответствующие функции источников при условии, что атмосферы освещены снизу.

При помощи известных методов теории переноса излучения, изложенных, например, в книге В. В. Соболева [2], для коэффициентов $C_k^m(\tau, \eta, \zeta)$ и $D_k^m(\tau, \eta, \zeta)$ разложений величин $C_k(\tau, \eta, \zeta, \varphi)$ и $D_k(\tau, \eta, \zeta, \varphi)$ в ряды по функциям $\cos m\varphi$ $(m = 0;\ 1;\ 2;\dots;\ n)$ можно получить следующие интегральные уравнения:

$$C_k^m(\tau, \eta, \zeta) = \frac{\lambda_k}{2}\int_0^{\tau} d\tau' \int_0^1 p_k^m(\eta, \eta')\, C_k^m(\tau', \eta', \zeta)\, e^{-\frac{\tau-\tau'}{\eta'}} \frac{d\eta'}{\eta'} +$$

$$+ \frac{\lambda_k}{2}\int_{\tau}^{\tau_k} d\tau' \int_0^1 p_k^m(\eta, -\eta')\, C_k^m(\tau', -\eta', \zeta)\, e^{-\frac{\tau'-\tau}{\eta'}} \frac{d\eta'}{\eta'} + \tag{16}$$

$$+ \frac{\lambda_k}{4} S p_k^m(\eta, \zeta)\, e^{-\frac{\tau}{\zeta}},$$

$$D_k^m(\tau, \eta, \zeta) = \frac{\lambda_k}{2}\int_0^{\tau} d\tau' \int_0^1 p_k^m(\eta, \eta')\, D_k^m(\tau', \eta', \zeta)\, e^{-\frac{\tau-\tau'}{\eta'}} \frac{d\eta'}{\eta'} +$$

$$+ \frac{\lambda_k}{2}\int_{\tau}^{\tau_k} d\tau' \int_0^1 p_k^m(\eta, -\eta')\, D_k^m(\tau', -\eta', \zeta)\, e^{-\frac{\tau'-\tau}{\eta'}} \frac{d\eta'}{\eta'} + \tag{17}$$

$$+ \frac{\lambda_k}{4} S p_k^m(\eta, -\zeta)\, e^{-\frac{\tau_k-\tau}{\zeta}},$$

где

$$p_k^m(\eta, \eta') = \sum_{i=m}^{n} c_{ik}^m P_i^m(\eta)\, P_i^m(\eta'), \qquad c_{ik}^m = x_{ik}\frac{(i-m)!}{(i+m)!}. \tag{18}$$

При выводе уравнений (16) и (17) учитывалось отсутствие внешнего диффузного излучения, падающего на граничные поверхности рассматриваемых однородных атмосфер.

Получая аналогичные уравнения для функций $B_{jk}^m(\tau, \eta, \zeta)$, следует учитывать, что каждый из слоев двуслойной атмосферы освещается не только прямым внешним излучением, но и диффузным излучением, выходящим из другого слоя. В результате находим, что величины $B_{jk}^m(\tau, \eta, \zeta)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} B_{j1}^m(\tau, \eta, \zeta) = {} & \frac{\lambda_1}{2}\int_0^\tau d\tau' \int_0^1 p_1^m(\eta, \eta')\, B_{j1}^m(\tau', \eta', \zeta)\, e^{-\frac{\tau-\tau'}{\eta'}} \frac{d\eta'}{\eta'} + \\ & + \frac{\lambda_1}{2}\int_\tau^{\tau_1} d\tau' \int_0^1 p_1^m(\eta, -\eta')\, B_{j1}^m(\tau', -\eta', \zeta)\, e^{-\frac{\tau'-\tau}{\eta'}} \frac{d\eta'}{\eta'} + \\ & + \frac{\lambda_1}{2} S\zeta \int_0^1 p_1^m(\eta, -\eta')\, v_j^m(\eta', \zeta)\, e^{-\frac{\tau_1-\tau}{\eta'}} d\eta' + \\ & + \frac{\lambda_1}{4} S p_1^m(\eta, (-1)^{j+1}\zeta)\, b_{j1}(\tau, \zeta), \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} B_{j2}^m(\tau, \eta, \zeta) = {} & \frac{\lambda_2}{2}\int_{\tau_1}^\tau d\tau' \int_0^1 p_2^m(\eta, \eta')\, B_{j2}^m(\tau', \eta', \zeta)\, e^{-\frac{\tau-\tau'}{\eta'}} \frac{d\eta'}{\eta'} + \\ & + \frac{\lambda_2}{2}\int_\tau^{\tau_1+\tau_2} d\tau' \int_0^1 p_2^m(\eta, -\eta')\, B_{j2}^m(\tau', -\eta', \zeta)\, e^{-\frac{\tau'-\tau}{\eta'}} \frac{d\eta'}{\eta'} + \\ & + \frac{\lambda_2}{2} S\zeta \int_0^1 p_2^m(\eta, -\eta')\, w_j^m(\eta', \zeta)\, e^{-\frac{\tau-\tau_1}{\eta'}} d\eta' + \\ & + \frac{\lambda_2}{4} S p_1^m(\eta, (-1)^{j+1}\zeta)\, b_{j2}(\tau, \zeta). \end{aligned} \tag{20}$$

Интегральные уравнения (19) и (20) отличаются от уравнений (16) и (17) свободными членами, причем свободные члены уравнений (19) и (20) являются суперпозициями свободных членов уравнений (11) и (12), следовательно, величины $B_{jk}^m(\tau, \eta, \zeta)$ связаны с величинами $C_k^m(\tau, \eta, \zeta)$ и $D_k^m(\tau, \eta, \zeta)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} B_{j1}^m(\tau, \eta, \zeta) = {} & 2\zeta \int_0^1 D_1^m(\tau, \eta, \eta')\, v_j^m(\eta', \zeta)\, d\eta' + \\ & + C_1^m(\tau, \eta, \zeta)\, b_{j1}(0, \zeta)(\delta_{j1} + \delta_{j3}) + D_1^m(\tau, \eta, \zeta)\, b_{j1}(\tau_1, \zeta)(\delta_{j2} + \delta_{j4}). \end{aligned} \tag{21}$$

$$B_{f2}^{m}(\tau, \eta, \zeta) = 2\pi \int_0^1 C_2^m(\tau, \eta, \eta')\, w_f^m(\eta', \zeta)\, d\eta' +$$
$$+ C_2^m(\tau, \eta, \zeta)\, b_{f2}(\tau, \zeta)(\delta_{f1} + \delta_{f3}) + D_2^m(\tau, \eta, \zeta)\, b_{f2}(\tau_1 + \tau_2, \zeta)(\delta_{f2} + \delta_{f4}). \tag{22}$$

Отметим, что подстановка выражений (8) и (9) в формулы (21) и (22) приводит к системам интегральных уравнений для функций $B_{f1}^m(\tau, \eta, \zeta)$ и $B_{f2}^m(\tau, \eta, \zeta)$.

3. *Связь коэффициентов яркости двуслойной атмосферы с коэффициентами яркости однородных атмосфер.* Обозначим коэффициенты отражения и пропускания света для верхнего слоя исследуемой двуслойной атмосферы через $\rho_1(\eta, \zeta)$ и $\sigma_1(\eta, \zeta)$, а соответствующие величины для нижнего слоя — через $\rho_2(\eta, \zeta)$ и $\sigma_2(\eta, \zeta)$. Если $\rho_k(\eta, \zeta)$ и $\sigma_k(\eta, \zeta)$ ($k = 1; 2$) представлены в виде

$$\rho_k(\eta, \zeta) = \rho_k^0(\eta, \zeta) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \rho_k^m(\eta, \zeta) \cos m\varphi, \tag{23}$$

$$\sigma_k(\eta, \zeta) = \sigma_k^0(\eta, \zeta) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_k^m(\eta, \zeta) \cos m\varphi, \tag{24}$$

то для величин $\rho_k^m(\eta, \zeta)$ и $\sigma_k^m(\eta, \zeta)$ из уравнений переноса излучения получаются выражения

$$\rho_k^m(\eta, \zeta) = \frac{1}{S\eta\zeta} \int_0^{\tau_k} C_k^m(\tau, -\eta, \zeta)\, e^{-\frac{\tau}{\zeta}}\, d\tau = \frac{1}{S\eta\zeta} \int_0^{\tau_k} D_k^m(\tau, \eta, \zeta)\, e^{-\frac{\tau_k - \tau}{\zeta}}\, d\tau, \tag{25}$$

$$\sigma_k^m(\eta, \zeta) = \frac{1}{S\eta\zeta} \int_0^{\tau_k} C_k^m(\tau, \eta, \zeta)\, e^{-\frac{\tau_k - \tau}{\zeta}}\, d\tau =$$
$$= \frac{1}{S\eta\zeta} \int_0^{\tau_k} D_k^m(\tau, -\eta, \zeta)\, e^{-\frac{\tau}{\zeta}}\, d\tau. \tag{26}$$

Подставляя (21) и (22) в (6)—(9) и используя (25) и (26), находим

$$V_j^m(\eta,\zeta) - v_j^m(\eta,\zeta)\, e^{-\frac{\tau_1}{\eta}} = \rho_1^m(\eta,\zeta)\, b_{j1}(0,\zeta)(\delta_{j1}+\delta_{j3}) +$$
$$+ \sigma_1^m(\eta,\zeta)\, b_{j1}(\tau_1,\zeta)(\delta_{j2}+\delta_{j4}) + 2\int_0^1 \sigma_1^m(\eta,\eta')\, v_j^m(\eta',\zeta)\,\eta' d\eta', \tag{27}$$

$$W_j^m(\eta,\zeta) - w_j^m(\eta,\zeta)\, e^{-\frac{\tau_2}{\eta}} = \sigma_2^m(\eta,\zeta)\, b_{j2}(\tau_1,\zeta)(\delta_{j1}+\delta_{j3}) +$$
$$+ \rho_2^m(\eta,\zeta)\, b_{j2}(\tau_1+\tau_2,\zeta)(\delta_{j2}+\delta_{j4}) + 2\int_0^1 \sigma_2^m(\eta,\eta')\, w_j^m(\eta',\zeta)\,\eta' d\eta', \tag{28}$$

$$v_j^m(\eta,\zeta) = \rho_2^m(\eta,\zeta)\, b_{j2}(\tau_1,\zeta)(\delta_{j1}+\delta_{j3}) +$$
$$+ \sigma_2^m(\eta,\zeta)\, b_{j2}(\tau_1+\tau_2,\zeta)(\delta_{j2}+\delta_{j4}) + 2\int_0^1 \rho_2^m(\eta,\eta')\, w_j^m(\eta',\zeta)\,\eta' d\eta', \tag{29}$$

$$w_j^m(\eta,\zeta) = \sigma_1^m(\eta,\zeta)\, b_{j1}(0,\zeta)(\delta_{j1}+\delta_{j3}) +$$
$$+ \rho_1^m(\eta,\zeta)\, b_{j1}(\tau_1,\zeta)(\delta_{j2}+\delta_{j4}) + 2\int_0^1 \rho_1^m(\eta,\eta')\, v_j^m(\eta',\zeta)\,\eta' d\eta'. \tag{30}$$

Формулы (27)—(30) связывают коэффициенты яркости $V_j^m(\eta,\zeta)$, $W_j^m(\eta,\zeta)$, $v_j^m(\eta,\zeta)$ и $w_j^m(\eta,\zeta)$ двуслойной атмосферы с коэффициентами яркости $\rho_k^m(\eta,\zeta)$ и $\sigma_k^m(\eta,\zeta)$ однородных атмосфер.

4. *Уравнения для вспомогательных функций.* Выведем уравнения для функций $F_{ij}^m(\eta)$, $G_{ij}^m(\eta)$, $f_{ij}^m(\eta)$ и $g_{ij}^m(\eta)$, определяемых формулами (11)—(14). Умножая обе части уравнений (27)—(30) на $P_i^m(\zeta)$, интегрируя по ζ от 0 до 1 и используя формулы (11)—(14), получаем:

$$F_{i1}^m(\eta) = \varphi_{i1}^m(\eta) + F_{i3}^m(\eta)\, e^{-\frac{\tau_1}{\eta}} + 2\eta\int_0^1 \sigma_1^m(\eta,\eta')\, F_{i3}^m(\eta')\, d\eta', \tag{31}$$

$$F_{i2}^m(\eta) = F_{i4}^m(\eta)\, e^{-\frac{\tau_2}{\eta}} + 2\eta\int_0^1 \sigma_2^m(\eta,\eta')\, F_{i4}^m(\eta')\, d\eta', \tag{32}$$

$$F_{i3}^m(\eta) = 2\eta(-1)^{i+m}\int_0^1 \rho_2^m(\eta,\eta')\,F_{i4}^m(\eta')\,d\eta', \tag{33}$$

$$F_{i4}^m(\eta) = \varphi_{i1}^m(\eta) + 2\eta(-1)^{i+m}\int_0^1 \rho_1^m(\eta,\eta')\,F_{i3}^m(\eta')\,d\eta', \tag{34}$$

$$G_{i1}^m(\eta) = G_{i3}^m(\eta)\,e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + 2\eta\int_0^1 \sigma_1^m(\eta,\eta')\,G_{i3}^m(\eta')\,d\eta', \tag{35}$$

$$G_{i2}^m(\eta) = \varphi_{i2}^m(\eta) + G_{i4}^m(\eta)\,e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + 2\eta\int_0^1 \sigma_2^m(\eta,\eta')\,G_{i4}^m(\eta')\,d\eta', \tag{36}$$

$$G_{i3}^m(\eta) = \psi_{i1}^m(\eta) + 2\eta(-1)^{i+m}\int_0^1 \rho_2^m(\eta,\eta')\,G_{i4}^m(\eta')\,d\eta', \tag{37}$$

$$G_{i4}^m(\eta) = 2\eta(-1)^{i+m}\int_0^1 \rho_1^m(\eta,\eta')\,G_{i3}^m(\eta')\,d\eta', \tag{38}$$

$$f_{i1}^m(\eta) = f_{i3}^m(\eta)\,e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + 2\eta\int_0^1 \sigma_1^m(\eta,\eta')\,f_{i3}^m(\eta')\,d\eta', \tag{39}$$

$$g_{i2}^m(\eta) = g_{i4}^m(\eta)\,e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + 2\eta\int_0^1 \sigma_2^m(\eta,\eta')\,g_{i4}^m(\eta')\,d\eta', \tag{40}$$

$$f_{i3}^m(\eta) = P_i^m(\eta) + 2\eta(-1)^{i+m}\int_0^1 \rho_2^m(\eta,\eta')\,g_{i4}^m(\eta')\,d\eta', \tag{41}$$

$$g_{i4}^m(\eta) = P_i^m(\eta) + 2\eta(-1)^{i+m}\int_0^1 \rho_1^m(\eta,\eta')\,f_{i3}^m(\eta')\,d\eta', \tag{42}$$

где $\varphi_{ik}^m(\eta)$ и $\psi_{ik}^m(\eta)$ — функции Амбарцумяна—Чандрасекара (см., например, [2]), связанные с величинами $\rho_k^m(\eta,\zeta)$ и $\sigma_k^m(\eta,\zeta)$ соотношениями

$$\varphi_{i4}^{m}(\eta_i) = P_i^m(\eta_i) + 2\lambda_i \int_0^1 P_i^m(-\zeta)\,\rho_4^m(\eta_i, \zeta)\,d\zeta, \tag{43}$$

$$\psi_{i4}^{m}(\eta_i) = P_i^m(\eta_i)\,e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + 2\lambda_i \int_0^1 P_i^m(\zeta)\,\sigma_4^m(\eta_i, \zeta)\,d\zeta. \tag{44}$$

Подставляя (33), (38) и (42) соответственно в (34), (37) и (41), приходим к следующим линейным интегральным уравнениям для функций $F_{i4}^m(\eta)$, $G_{i3}^m(\eta_i)$ и $f_{i3}^m(\eta_i)$:

$$F_{i4}^m(\eta_i) = \psi_{i1}^m(\eta_i) + 2\lambda_i \int_0^1 F_{i4}^m(\eta_i')\,Q^m(\eta_i, \eta_i')\,d\eta_i', \tag{45}$$

$$G_{i3}^m(\eta_i) = \psi_{i3}^m(\eta_i) + 2\lambda_i \int_0^1 G_{i3}^m(\eta_i')\,Q^m(\eta_i', \eta_i)\,d\eta_i', \tag{46}$$

$$f_{i3}^m(\eta_i) = \varphi_{i3}^m(\eta_i) + 2\lambda_i \int_0^1 f_{i3}^m(\eta_i')\,Q^m(\eta_i', \eta_i)\,d\eta_i', \tag{47}$$

где

$$Q^m(\eta_i, \zeta) = 2\int_0^1 \rho_1^m(\eta_i, \eta_i')\,\rho_2^m(\zeta, \eta_i')\,\eta_i'\,d\eta_i'. \tag{48}$$

Таким образом, мы видим, что при фиксированных значениях i и m независимыми являются только три вспомогательные функции, а именно, $F_{i4}^m(\eta_i)$, $G_{i3}^m(\eta_i)$ и $f_{i3}^m(\eta_i)$. Через них выражаются остальные девять вспомогательных функций.

Следовательно, если известны оптические свойства двух однородных сред, составляющих рассматриваемую нами двуслойную атмосферу, то коэффициенты яркости этой атмосферы можно найти следующим образом. Решая линейные интегральные уравнения (45), (46) и (47), мы определяем величины $F_{i4}^m(\eta_i)$, $G_{i3}^m(\eta_i)$ и $f_{i3}^m(\eta_i)$. Затем по формулам (32), (33), (35), (38), (39) и (42) вычисляем функции $F_{i2}^m(\eta_i)$, $F_{i3}^m(\eta_i)$, $G_{i1}^m(\eta_i)$, $G_{i4}^m(\eta_i)$, $f_{i1}^m(\eta_i)$ и $g_{i4}^m(\eta_i)$. Зная функции $F_{i3}^m(\eta_i)$, $G_{i4}^m(\eta_i)$ и $g_{i4}^m(\eta_i)$, по формулам (31), (36) и (40) находим величины $F_{i1}^m(\eta_i)$, $G_{i2}^m(\eta_i)$ и $g_{i3}^m(\eta_i)$. После вычисления всех указанных вспомогательных функций по формулам, выведенным в работе [1], рассчитываем коэффициенты яркости $V_i^m(\eta, \zeta)$,

$W_1^m(\tau_0, \zeta)$, $v_1^m(\tau_0, \zeta)$ и $w_1^m(\tau_0, \zeta)$, а по формулам (2)—(5) — интенсивности диффузно отраженного и диффузно пропущенного излучения, т. е. $I_{11}(0, -\tau_0, \zeta, \varphi)$ и $I_{12}(\tau_1 + \tau_2, \tau_0, \zeta, \varphi)$, а также интенсивности излучения на границе двух слоев, т. е. $I_{12}(\tau_1, -\tau_0, \zeta, \varphi)$ и $I_{11}(\tau_1, \tau_0, \zeta, \varphi)$.

Отметим, что если в выведенных в работе [1] и в настоящей статье формулах положить $\lambda_1 = \lambda_2$ и $x_1(\gamma) = x_2(\gamma)$, то их можно использовать для расчета интенсивности излучения внутри однородной среды.

В дальнейшем автор предполагает обобщить полученные результаты учтя эффекты отражения и преломления света на границе между слоями.

Ленинградский государственный
университет

BRIGHTNESS COEFFICIENTS FOR TWO-LAYER ATMOSPHERE AT ANISOTROPIC SCATTERING. II

A. K. KOLESOV

The auxiliary functions which are a generalisation of Ambartsumian's functions φ and ψ for the case of anisotropically scattering two-layer atmosphere are considered. It is found that at given values of indices i and m there are three independant auxiliary functions. The linear integral equations for these functions are derived. The kernal and the free terms of these equations are expressed in terms of optical characteristics of the atmospheric layers.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. К. Колесов*, Астрофизика, 12, 93, 1976.
2. *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.