АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 12 АВГУСТ, 1976 ВЫПУСК 3

КВАЗИАСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПЕРЕНОСЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В СЛОЕ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ II. НЕКОНСЕРВАТИВНОЕ РАССЕЯНИЕ

М. А. МНАЦАКАНЯН

Поступила 29 августа 1975

Получены приближенные аналитические (квазиасимптотические) решения общей задачи о расчете внутреннего светового режима для случая монохроматического изотропного рассеяния при наличии истинного поглощения ($\lambda \leqslant 1$). Хотя эти решения и являются по существу асимптотическими по толщине слоя, но с точностью до нескольких процентов они справедливы для слоя любой толщины. При больших τ_0 они переходят в известные асимптотические решения В. В. Соболева. Квазиасимптотические решения обладают более высокой точностью, чем обычные асимптотические решения, причем относительная точность возрастает с уменьшением λ.

1. *Введение.* В предыдущей работе [1] автором были получены квазиасимптотические решения задачи об изотропном рассеянии монохроматического света в однородном плоскопараллельном слое конечной оптической толщины τ_0 для случая консервативного рассеяния $\lambda = 1$. Эти решения являются по существу асимптотическими для больших толщин τ_0, однако замечательно, что они практически справедливы для слоя любой толщины $\tau_0 \geq 0$. Квазиасимптотические решения являются более точными по сравнению с известными асимптотическими решениями В. В. Соболева [2—5] и при больших толщинах слоя переходят в соболевские асимптотические решения.

Аналогичные решения можно получить и в общем случае неконсервативного рассеяния $\lambda < 1$, причем, понятно, что, будучи асимптотическими, эти решения для данной толщины слоя должны выполняться тем хуже, чем меньше λ. Однако во всех случаях они по сравнению с соответствующими асимптотиками В. В. Соболева обладают большей точностью, причем эта относительная точность возрастает с уменьшением λ.

В настоящей работе мы получим квазиасимптотические решения задачи об изотропном рассеянии света в слое конечной оптической толщины для случая неконсервативного рассеяния $\lambda < 1$. При значениях λ, не слишком близких к 1, соответствующие формулы существенно упрощаются. Сначала в статье приводится вывод и обсуждение формул для этого случая, а затем, в разделе 8, дается общее решение, пригодное для произвольного $\lambda \leqslant 1$. Численные расчеты показывают, что для $\lambda > 0.5$ эти решения с точностью до нескольких процентов справедливы при любой толщине слоя.

2. *Основные уравнения.* Рассмотрим слой конечной оптической толщины τ_0 и пусть в нем на глубине τ имеется квант, летящий в направлении ζ. Обозначим посредством $y(\tau, \tau_0, \eta, \zeta)$ вероятность выхода этого кванта в направлении η через ту границу, в направлении которой он первоначально летит, а посредством $z(\tau_0 - \tau, \tau_0, \eta, \zeta)$ — через противоположную границу. Те же величины для полубесконечной среды ($\tau_0 = \infty$) обозначим через Y и Z. Согласно принципу обратимости оптических явлений, эти величины описывают интенсивности излучения внутри слоя при освещении его параллельным пучком.

Добавляя мысленно к рассматриваемому слою конечной толщины (с летящим внутри него квантом) полубесконечный слой справа или слева, получаем [1, 7]:

$$Y(\tau, \eta, \zeta) = y(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) + \int_0^1 Z(\tau_0, \eta, \mu)\, z(\tau_0 - \tau, \tau_0, \mu, \zeta)\, d\mu,$$

$$Z(\tau_0 - \tau, \eta, \zeta) = z(\tau_0 - \tau, \tau_0, \eta, \mu) + \int_0^1 Z(\tau_0, \eta, \mu)\, y(\tau, \tau_0, \mu, \zeta)\, d\mu. \qquad (1)$$

Этими уравнениями устанавливается связь между решениями задачи для слоя конечной толщины и соответствующей задачи для полупространства.

Складывая и вычитая уравнения (1), получаем независимые уравнения

$$S(\eta) = s(\eta) + \int_0^1 Z(\tau_0, \eta, \mu)\, s(\mu)\, d\mu,$$

$$H(\eta) = h(\eta) - \int_0^1 Z(\tau_0, \eta, \mu)\, h(\mu)\, d\mu. \qquad (2)$$

Здесь мы ввели обозначения для суммы и разности искомых величин

$$
\begin{aligned}
s(\eta) &\equiv s(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) = y(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) + z(\tau_0 - \tau, \tau_0, \eta, \zeta), \\
h(\eta) &\equiv h(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) = y(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) - z(\tau_0 - \tau, \tau_0, \eta, \zeta),
\end{aligned} \tag{3}
$$

и соответствующих величин для полупространства

$$
\begin{aligned}
S(\eta) &\equiv S(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) = Y(\tau, \eta, \zeta) + Z(\tau_0 - \tau, \eta, \zeta), \\
H(\eta) &\equiv H(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) = Y(\tau, \eta, \zeta) - Z(\tau_0 - \tau, \eta, \zeta).
\end{aligned} \tag{4}
$$

Ниже мы рассмотрим квазиасимптотическое решение задачи (1). Обсуждению же более общих задач для слоя конечной толщины посвящен раздел 10 настоящей статьи.

Если рассеяние изотропно, то ядро интегральных уравнений (2) имеет вид [1, 7, 8]:

$$
Z(\tau, \eta, \zeta) = \frac{\lambda}{2} \eta\varphi(\eta) \frac{F(\tau, \eta) + \tilde{F}(\tau, \zeta)}{\eta + \zeta}, \tag{5}
$$

где

$$
F(\tau, \eta) = \frac{P(\tau, \eta)}{P(0, \eta)}, \quad \tilde{F}(\tau, \eta) = \eta\varphi(\eta) \int_0^1 \frac{P(\tau, \mu)}{\eta + \mu} d\mu, \tag{6}
$$

а $P(\tau, \eta)$ — вероятность выхода в направлении η кванта, поглощенного на глубине τ в полубесконечной среде, $P(0, \eta) = \frac{\lambda}{2}\varphi(\eta)$, φ — функция Амбарцумяна. Функции F и $\tilde{F}$ являются решениями дифференциальных уравнений [8]

$$
\begin{aligned}
&\frac{dF(\tau, \eta)}{d\tau} + \frac{F(\tau, \eta)}{\eta} = \Phi(\tau), \quad F(0, \eta) = 1, \\
&\frac{d\tilde{F}(\tau, \eta)}{d\tau} - \frac{\tilde{F}(\tau, \eta)}{\eta} = -\Phi(\tau), \quad \tilde{F}(0, \eta) = \varphi(\eta) - 1,
\end{aligned} \tag{7}
$$

где $\Phi(\tau)$ — введенная В. В. Соболевым резольвентная функция [3, 4].

В таблицах 1 и 2 приведены значения F и $\tilde{F}$ для различных λ (с точностью, достаточной для целей настоящей работы). Они получены численным интегрированием уравнений (7) по значениям $\Phi(\tau)$, взятым из [11]. Вычисления проведены Р. Р. Андреасяном на ЭВМ «Наири-2».

3. *Квазиасимптотика для* Z. Если ядро Z при больших τ заменить его асимптотическим выражением [1]

Таблица 1

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $F(\tau, \eta)$ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ λ

	$\eta \backslash \tau$	0	0.1	0.2	0.4	0.7	1	2	3	5	$\gg 1$
$\lambda=0.99$	0.2	1.00	0.79	0.63	0.45	0.34	0.29	0.22	0.19	0.13	
	0.4	1.00	0.98	0.93	0.82	0.70	0.62	0.47	0.39	0.27	
	0.6	1.00	1.06	1.06	1.04	0.98	0.91	0.74	0.61	0.43	
	0.8	1.00	1.10	1.14	1.18	1.17	1.14	0.99	0.81	0.59	
	1.0	1.00	1.12	1.19	1.27	1.31	1.32	1.22	1.06	0.77	
	$A(\tau)$ 0.2	4.8	3.9	3.1	2.3	1.8	1.6	1.52	1.51	1.51	1.51
	$A(\tau)$ 1.0	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.42	1.47	1.50	
$\lambda=0.95$	0.2	1.00	0.77	0.59	0.40	0.27	0.21	0.13	0.09	0.04	
	0.4	1.00	0.96	0.88	0.74	0.59	0.48	0.24	0.19	0.09	
	0.6	1.00	1.03	1.01	0.95	0.83	0.73	0.47	0.31	0.15	
	0.8	1.00	1.07	1.09	1.08	1.01	0.93	0.66	0.46	0.22	
	1.0	1.00	1.10	1.14	1.16	1.14	1.09	0.83	0.60	0.30	
	$A(\tau)$ 0.2	4.6	3.7	2.9	2.1	1.6	1.4	1.25	1.23	1.22	1.22
	$A(\tau)$ 1.0	0.6	0.7	0.8	0.8	0.9	1.0	1.10	1.16	1.22	
$\lambda=0.9$	0.2	1.00	0.75	0.56	0.36	0.22	0.16	0.08	0.05	0.016	
	0.4	1.00	0.94	0.85	0.69	0.51	0.39	0.20	0.11	0.036	
	0.6	1.00	1.01	0.98	0.88	0.74	0.62	0.34	0.19	0.061	
	0.8	1.00	1.05	1.05	1.01	0.91	0.80	0.49	0.30	0.11	
	1.0	1.00	1.07	1.10	1.09	1.03	0.94	0.64	0.41	0.16	
	$A(\tau)$ 0.2	4.5	3.5	2.8	2.0	1.4	1.20	1.04	1.01	1.01	1.00
	$A(\tau)$ 1.0	0.5	0.5	0.6	0.6	0.7	0.75	0.86	0.91	1.03	
$\lambda=0.5$	0.2	1.00	0.67	0.45	0.23	0.10	0.05	0.01	0.003	0.0004	
	0.4	1.00	0.85	0.71	0.49	0.29	0.17	0.04	0.011	0.0013	
	0.6	1.00	0.92	0.82	0.65	0.46	0.32	0.10	0.032	0.0042	
	0.8	1.00	0.95	0.89	0.75	0.58	0.44	0.17	0.066	0.011	
	1.0	1.00	0.98	0.93	0.82	0.67	0.54	0.25	0.11	0.023	
	$A(\tau)$ 0.2	3.5	3.0	2.2	1.3	0.74	0.48	0.28	0.23	0.20	0.15
	$A(\tau)$ 1.0	0.04	0.04	0.04	0.05	0.05	0.05	0.07	0.08	0.11	

$$Z(\tau, \eta, \zeta) = \frac{\lambda}{2} A e^{-k\tau} \frac{\eta\varphi(\zeta)}{(1-k\eta)(1+k\zeta)}, \tag{8}$$

то интегральное уравнение (2) разрешается и приводит к асимптотическим решениям В. В. Соболева (см. [1]). Приближение (8) равносильно замене в (5) обеих функций, как F, так и $\bar{F}$ их асимптотиками при $\tau \gg 1$:

$$F(\tau, \eta) = C(\tau) \frac{\eta}{1-k\eta}, \tag{9}$$

$$\bar{F}(\tau, \zeta) = C(\tau) \frac{\zeta}{1+k\zeta}. \tag{10}$$

Здесь через $C(\tau)$ обозначена величина $Ae^{-k\tau}$.

Таблица 2

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ $\bar{F}(\tau, \zeta)$, $C(\tau)$ И $A(\tau)$ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ λ

λ		$\zeta \backslash \tau$	0	0.1	0.2	0.4	0.7	1	2	3	5
$\lambda=0.99$	$\bar{F}(\tau, \zeta)$	0.2	0.400	0.34	0.32	0.29	0.27	0.25	0.21	0.17	0.12
		0.4	0.708	0.64	0.60	0.56	0.52	0.47	0.40	0.34	0.24
		0.6	0.983	0.91	0.86	0.81	0.75	0.71	0.59	0.49	0.35
		0.8	1.237	1.15	1.11	1.04	0.97	0.91	0.76	0.64	0.45
		1.0	1.473	1.38	1.33	1.26	1.17	1.10	0.92	0.77	0.55
	$C(\tau)$	0.2	2.07	1.77	1.66	1.52	1.392	1.304	1.076	0.905	0.639
		1.0	1.73	1.63	1.56	1.47	1.373	1.294	1.077	0.905	0.639
		$1/k$	1.59	1.55	1.51	1.45	1.364	1.291	1.082	0.909	0.639
	$A(\tau)$	1.0	1.73	1.65	1.62	1.58	1.55	1.54	1.52	1.52	1.52
$\lambda=0.95$	$\bar{F}(\tau, \zeta)$	0.2	0.337	0.28	0.25	0.22	0.19	0.16	0.11	0.073	0.034
		0.4	0.571	0.50	0.46	0.40	0.35	0.30	0.20	0.137	0.064
		0.6	0.765	0.68	0.63	0.56	0.48	0.43	0.28	0.194	0.090
		0.8	0.931	0.84	0.78	0.70	0.61	0.53	0.36	0.244	0.113
		1.0	1.077	0.98	0.92	0.82	0.71	0.63	0.42	0.290	0.131
	$C(\tau)$	0.2	1.81	1.49	1.35	1.17	1.00	0.871	0.581	0.394	0.183
		1.0	1.49	1.35	1.26	1.13	0.985	0.868	0.584	0.400	0.184
		$1/k$	1.39	1.31	1.24	1.12	0.983	0.870	0.589	0.404	0.181
	$A(\tau)$	1.0	1.49	1.40	1.36	1.32	1.28	1.27	1.25	1.25	1.23
$\lambda=0.9$	$\bar{F}(\tau, \zeta)$	0.2	0.291	0.23	0.20	0.17	0.14	0.11	0.07	0.04	0.013
		0.4	0.479	0.40	0.36	0.31	0.25	0.21	0.12	0.07	0.024
		0.6	0.626	0.54	0.49	0.42	0.34	0.29	0.16	0.10	0.033
		0.8	0.747	0.66	0.60	0.51	0.42	0.35	0.20	0.12	0.041
		1.0	0.850	0.75	0.69	0.60	0.49	0.41	0.24	0.14	0.048
	$C(\tau)$	0.2	1.61	1.28	1.13	0.94	0.763	0.630	0.357	0.204	0.072
		1.0	1.30	1.15	1.05	0.91	0.749	0.628	0.360	0.211	0.073
		$1/k$	1.23	1.12	1.03	0.90	0.748	0.631	0.365	0.217	0.073
	$A(\tau)$	1.0	1.30	1.21	1.16	1.12	1.08	1.06	1.03	1.02	1.01
$\lambda=0.5$	$\bar{F}(\tau, \zeta)$	0.2	0.113	0.078	0.062	0.044	0.028	0.019	0.006	0.0021	0.00026
		0.4	0.168	0.124	0.101	0.073	0.048	0.033	0.011	0.0037	0.00045
		0.6	0.204	0.156	0.129	0.094	0.062	0.043	0.014	0.0050	0.00058
		0.8	0.231	0.180	0.150	0.110	0.073	0.051	0.017	0.0059	0.00069
		1.0	0.251	0.199	0.166	0.122	0.082	0.057	0.019	0.0067	0.00078
	$C(\tau)$	0.2	0.67	0.47	0.37	0.261	0.169	0.115	0.0362	0.0127	0.00157
		1.0	0.491	0.392	0.325	0.239	0.160	0.112	0.0364	0.0132	0.00152
		$1/k$	0.488	0.390	0.324	0.237	0.160	0.112	0.0364	0.0132	0.00151
	$A(\tau)$	1.0	0.49	0.43	0.39	0.35	0.31	0.29	0.25	0.23	0.18

Основой квазиасимптотических решений послужила следующая находка [1, 7]. При подстановке (5) в уравнение (2) функция $F(\tau, \eta)$ выходит из-под знака интеграла, а на неизвестную функцию умножается и интегрируется лишь величина $\bar{F}(\tau, \zeta)$. Поэтому для решения уравнений (2) важную роль сыграет возможность разделения переменных в функции $\bar{F}(\tau, \zeta)$.

Как было отмечено в работе (1), величина F описывает поглощенные у границы кванты, летевшие первоначально на глубине τ (в направлении η) полубесконечной среды в сторону границы. Величина же $\bar{F}$ описывает поглощенные у границы кванты, но первоначально летевшие вглубь среды (в направлении $\zeta=-\eta$). Физически понятно, что функция $\bar{F}$ должна достигать своего асимптотического поведения (10) при сравнительно меньших τ чем F—поведения (9), так как до того, как поглотиться, квант, летевший вглубь среды, успеет достаточно глубоко проникнуть в среду.

Учитывая это обстоятельство, целесообразно в выражении (5) для Z заменить функцию $\bar{F}$ ее асимптотикой (10), сохраняя одновременно величину F точной. Такое квазиасимптотическое выражение для Z будет давать хорошую точность при гораздо меньших τ, чем асимптотическое выражение (8).

Насколько хорошо выполняется асимптотическое выражение (10) для функции $\bar{F}$, видно из таблицы 2. В ней приводится значение $C(\tau)$, определенное из (10) как «постоянная» в угловой зависимости $\bar{F}(\tau, \zeta)$ (при $\zeta=0.2$ и 1): $C(\tau)=\bar{F}(\tau, \zeta)\ (1+k\zeta)/\zeta$. Слабая зависимость $C(\tau)$ от ζ показывает, что почти при всех τ у функции $\bar{F}(\tau, \zeta)$ приближенно происходит разделение переменных τ и ζ. При этом, понятно, не важна степень зависимости C или A от τ. В последней строке таблицы 2 дается величина $A(\tau)$, определенная из соотношения (10) при $\zeta=1$:

$$C(\tau) = A(\tau)\, e^{-k\tau}. \tag{11}$$

О справедливости же приближения (9) для F можно судить по таблице 1. В последних двух строках приведены значения A, определенной из соотношений (9), (11) при $\eta=0.2$ и 1. Мы видим, что величина A в этом случае сильно зависит от η, иными словами, приближенного разделения переменных τ и η в функции $F(\tau, \eta)$ для малых τ не происходит. Оно начинает выполняться при больших τ, когда значение A близко к $A(\infty)$.

В таблице 3 приведено значение τ, при котором для F асимптотика (9) уже выполняется с той точностью, с которой для $\bar{F}$ асимптотика (10) выполняется при $\tau=0$. Наглядно видно, насколько быстрее достигается асимптотика $\bar{F}$ по сравнению с F.

Таблица 3

λ	1	0.99	0.9	0.5
τ	1	1.5	2	8

Из этой таблицы видно, что с уменьшением λ относительный эффект асимптотизации $\bar{F}$ по сравнению с F усиливается. Это означает, что точность квазиасимптотических решений по сравнению с обычными асимптотиками увеличивается с уменьшением λ, хотя при этом ошибки обоих решений (для данного значения τ), понятно, растут (см., например, табл. 5).

4. *Решение уравнений.* Заменяя в (5) $\bar{F}$ его приближением (10), представим ядро интегральных уравнений (2) в виде аппроксимации

$$Z(\tau, \eta, \zeta) = \frac{a(\tau, \eta)}{1 + k\zeta} + \frac{b(\tau, \eta)}{\eta + \zeta}, \tag{12}$$

где

$$a(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{2} C(\tau) \frac{\eta\varphi(\eta)}{1 - k\eta}, \qquad b(\tau, \eta) = \eta[P(\tau, \eta) - a(\tau, \eta)]. \tag{13}$$

При $\lambda = 1$, то есть, $k = 0$, (12) и (13) переходят в соответствующие выражения для случая чистого рассеяния, полученные в [1]. При больших τ имеем $P(\tau, \eta) \to a(\tau, \eta)$ и $b(\tau, \eta) \to 0$, а решения уравнений (2) переходят в асимптотические решения В. В. Соболева. Поэтому величина $b(\tau, \eta)$ в (12) служит поправкой к обычным асимптотикам.

Подставляя (12) в (2), получаем

$$\begin{aligned} S(\eta) &= s(\eta) + s_k a(\tau_0, \eta) + s_\eta b(\tau_0, \eta), \\ H(\eta) &= h(\eta) - h_k a(\tau_0, \eta) - h_\eta b(\tau_0, \eta). \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь введены обозначения

$$f_k = \int_0^1 \frac{f(\mu)}{1 + k\mu} d\mu, \qquad f_\eta = \int_0^1 \frac{f(\mu)}{\eta + \mu} d\mu.$$

Чтобы найти s_k и h_k, подействуем на (14) оператором $\int_0^1 \cdots \frac{d\eta}{1+k\eta}$

$$\begin{aligned} S_k &= s_k + a_k(\tau_0) s_k + \int_0^1 s(\mu)\, d\mu \int_0^1 \frac{b(\tau_0, \eta)\, d\eta}{(\eta + \mu)(1 + k\eta)}, \\ H_k &= h_k - a_k(\tau_0) h_k - \int_0^1 h(\mu)\, d\mu \int_0^1 \frac{b(\tau_0, \eta)\, d\eta}{(\eta + \mu)(1 + k\eta)}. \end{aligned} \tag{15}$$

В следующем разделе будет показано, что интегралы в правых частях (15) в некотором приближении можно принять равными нулю. Тогда выражения для s_k и h_k примут вид

$$s_k = \frac{S_k}{1 + a_k(\tau_0)}, \qquad h_k = \frac{H_k}{1 - a_k(\tau_0)}. \tag{16}$$

Чтобы найти s_ζ и h_ζ, подействуем на (14) оператором $\int\limits_0^1 \cdots \frac{d\eta}{\eta + \zeta}$

$$s_\zeta = S_\zeta - a_\zeta(\tau_0)\, s_k, \qquad h_\zeta = H_\zeta + a_\zeta(\tau_0)\, h_k. \tag{17}$$

В приближении (10) мы пренебрегли двойными интегралами в правых частях (17) (см. раздел 5).

Таким образом, квазиасимптотические решения уравнений (2) имеют вид

$$\begin{aligned} s(\eta) &= S(\eta) - s_k a(\tau_0, \eta) - s_\zeta b(\tau_0, \eta), \\ h(\eta) &= H(\eta) + h_k a(\tau_0, \eta) + h_\zeta b(\tau_0, \eta), \end{aligned} \tag{18}$$

где s_k и h_k определяются из (16) через соответствующие величины для полубесконечной среды, а s_ζ и h_ζ — из (17). В этих формулах участвуют интегралы

$$a_k(\tau) = \int\limits_0^1 \frac{a(\tau, \eta)}{1 + k\eta}\, d\eta = \frac{\lambda}{2} C(\tau) \int\limits_0^1 \frac{\eta\varphi(\eta)\, d\eta}{(1 - k\eta)(1 + k\eta)} = \frac{C(\tau)}{2k\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}, \tag{19}$$

$$a_\zeta(\tau) = \int\limits_0^1 \frac{a(\tau, \eta)}{\eta + \zeta}\, d\eta = \frac{\lambda}{2} C(\tau) \int\limits_0^1 \frac{\eta\varphi(\eta)\, d\eta}{(1 - k\eta)(\eta + \zeta)} = \frac{C(\tau)}{(1 + k\zeta)\varphi(\zeta)}, \tag{20}$$

легко вычисляемые с помощью функционального уравнения Амбарцумяна для φ-функции [9, 10].

5. *Приближение для* $\tilde{F}(\tau, 1/k)$. Вычислим сначала интеграл

$$b_\zeta = \int\limits_0^1 \frac{b(\tau, \eta)}{\eta + \zeta}\, d\eta = \int\limits_0^1 Z(\tau, \eta, \zeta)\, d\eta - \int\limits_0^1 \frac{a(\tau, \eta)}{1 + k\zeta}\, d\eta = Z_0(\tau, \zeta) - \frac{a_0(\tau)}{1 + k\zeta}.$$

При преобразованиях мы использовали приближение (12). Согласно формуле (П.7) работы [1],

$$b_\zeta = P_0(\tau) - \sqrt{1-\lambda}\,\tilde{F}(\tau,\zeta) - \frac{\lambda}{2}C(\tau)\frac{1}{1+k\zeta}\int_0^1 \frac{\eta\varphi(\eta)}{1-k\eta}d\eta =$$

$$= P_0(\tau) - \sqrt{1-\lambda}\left[\tilde{F}(\tau,\zeta) + \frac{C(\tau)}{k(1+k\zeta)}\right].$$

Подставляя сюда приближенное выражение (10) для $\tilde{F}(\tau, \zeta)$, находим

$$b_\zeta = P_0(\tau) - C(\tau)\frac{\sqrt{1-\lambda}}{k}, \tag{21}$$

или, что в приближении (10) b_ζ не зависит от значения ζ.

В правых частях (17) мы пренебрегли интегралом

$$\int_0^1 \frac{b(\tau,\eta)\,d\eta}{(\eta+\mu)(\eta+\zeta)} = \frac{1}{\zeta-\mu}\left[\int_0^1 \frac{b(\tau,\eta)}{\eta+\mu}d\eta - \int_0^1 \frac{b(\tau,\eta)}{\eta+\zeta}d\eta\right] = \frac{b_\mu - b_\zeta}{\zeta-\mu}, \tag{22}$$

который в нашем приближении в силу (21) равен нулю.

Рассмотрим теперь интеграл из правой части (15)

$$b_{k\mu} = \int_0^1 \frac{b(\tau,\eta)\,d\eta}{(1+k\eta)(\eta+\mu)} = \frac{1}{1-k\mu}\left[\int_0^1 \frac{b(\tau,\eta)}{\eta+\mu}d\eta - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 \frac{b(\tau,\eta)}{\eta+1/k}d\eta\right] = \frac{b_\mu - b_{1/k}}{1-k\mu}.$$

Можно было бы на основании (21) — того, что b_ζ не зависит от параметра ζ, заключить, что $b_{k\mu} = 0$, однако выясним, какова погрешность этого приближения. Для этого вычислим интеграл $b_{k\zeta}$ с помощью (12):

$$b_{k\zeta} = \int_0^1 \frac{Z(\tau,\eta,\zeta)}{1+k\eta}d\eta - \int_0^1 \frac{a(\tau,\eta)\,d\eta}{(1-k\eta)(1+k\zeta)} = Z_k(\tau,\zeta) - \frac{a_k(\tau)}{1+k\zeta}.$$

Используя интегралы (П.2) работы [1] и (19), имеем

$$b_{k\zeta} = \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}\left[\frac{\tilde{F}\left(\tau,\frac{1}{k}\right) - \tilde{F}(\tau,\zeta)}{1-k\zeta} - \frac{C(\tau)}{2k(1+k\zeta)}\right].$$

Подставляя сюда для $\tilde{F}(\tau, \zeta)$ приближение (10), получаем окончательно

$$b_{k\zeta} = \frac{1}{1-k\zeta}\,\frac{1}{\zeta(1/k)}\left|\tilde{F}\left(\tau, \frac{1}{k}\right) - \frac{C(\tau)}{2k}\right|. \tag{23}$$

Таким образом, пренебрежение интегралом $b_{k\zeta}$ в (15) равносильно приближению

$$\tilde{F}\left(\tau, \frac{1}{k}\right) = \frac{C(\tau)}{2k}. \tag{24}$$

Вообще говоря, приближение (10) справедливо и для значений $\zeta > 1$, но если при этом $\zeta \leqslant 1/k$. При $\zeta = 1/k$ приближение (10) совпадает с приближением (24) и условие его справедливости соответствует условию справедливости асимптотики $\Phi(\tau) = Ae^{-k\tau}$. В этом легко убедиться, исходя из выражения (7) для $\tilde{F}$ или из

$$\tilde{F}(\tau, \zeta) = \int_{\tau}^{\infty} e^{-\frac{\tau'-\tau}{\zeta}}\,\Phi(\tau')\,d\tau'.$$

О точности приближения (24) можно судить по таблице 2. В ней в предпоследней строке приведены значения $C = 2k\tilde{F}(\tau, 1/k)$, которые должны соответствовать значениям $C(\tau)$, вычисленным по (10). Мы видим, что они довольно близки друг к другу. Причем, важно подчеркнуть, что, согласно данным таблицы 2, приближение (24) выполняется тем лучше, чем меньше λ.

Таким образом, полученные выше квазиасимптотические решения соответствуют двум приближениям — (10) и (24), или приближению (10) при значениях $\zeta < 1$ и $\zeta = 1/k$. Заметим, что решить уравнения (2) можно и без предположения о справедливости приближения (24), однако эти решения очень громоздки и практически могут быть использованы лишь при λ, очень близких к 1, именно, при $1-\lambda \leqslant 10^{-2}$. Такое, более общее решение, справедливое при $\lambda \leqslant 1$, будет рассмотрено в разделе 8 настоящей статьи.

Поскольку разделение переменных τ и ζ у функции $\tilde{F}$ происходит приближенно, то функцию $C(\tau)$ можно определить лишь с некоторой неопределенностью, тем большей, чем меньше τ. Этой неопределенностью и определяется степень погрешности квазиасимптотических решений.

Если λ не слишком близко к 1, то функцию $C(\tau)$, удовлетворяющую одновременно двум соотношениям (10) и (24), мы определим соотношением (24). Это обусловлено тем, что приближение (24) используется выше в явном виде, в (17), в то время, как приближение (10) — только под интегралами, например в (15).

Заметим, что величину

$$\delta(\tau_0) = \frac{A(\tau_0)}{A(\infty)} - 1 \tag{25}$$

можно принять в качестве малого параметра квазиасимптотической теории. Чем больше толщина слоя τ_0, тем меньше $\delta(\tau_0)$ и тем точнее квазиасимптотические решения. Можно показать, что обычные асимптотические решения соответствуют нулевому, а квазиасимптотические — линейному приближению по этому параметру $\delta(\tau_0)$.

6. *Разные задачи*. Рассматривая задачу о расчете внутреннего светового режима в слое конечной толщины τ_0, найдем $y(\tau, \tau_0, \eta, \zeta)$. Согласно (3), она равна

$$y = \frac{1}{2}(s+h) = \frac{1}{2}(S+H) - a(\tau_0, \eta)\frac{1}{2}(s_k - h_k) - \\ - b(\tau_0, \eta)\frac{1}{2}(s_\eta - h_\eta). \tag{26}$$

Из (17) находим

$$\frac{1}{2}(s_\eta - h_\eta) = \frac{1}{2}(S_\eta - H_\eta) - a_\eta(\tau_0)\frac{1}{2}(s_k + h_k),$$

а из (4)

$$\frac{1}{2}(S+H) = Y(\tau, \eta, \zeta), \quad \frac{1}{2}(S_\eta - H_\eta) = Z_\eta(\tau_0 - \tau, \zeta),$$

$$\frac{1}{2}(S_k + H_k) = Y_k(\tau, \zeta), \quad \frac{1}{2}(S_k - H_k) = Z_k(\tau_0 - \tau, \zeta).$$

При помощи (16) вычисляем $\frac{1}{2}(s_k + h_k)$ и $\frac{1}{2}(s_k - h_k)$, и тогда выражение для y переписывается окончательно в виде

$$y(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) = Y(\tau, \eta, \zeta) + a(\tau_0, \eta)\frac{Z_k(\tau_0 - \tau, \zeta) - a_k(\tau_0)Y_k(\tau, \zeta)}{1 - a_k^2(\tau_0)} - \\ - b(\tau_0, \eta) Z_\eta(\tau_0 - \tau, \zeta) + \\ + a_\eta(\tau_0) b(\tau_0, \eta)\frac{Y_k(\tau, \zeta) - a_k(\tau_0) Z_k(\tau_0 - \tau, \zeta)}{1 - a_k^2(\tau_0)}. \tag{27}$$

Выражения Y, Y_k, Z_k и Z_η получены в работе [1]. В приближениях (10) и (24) они имеют вид

$$Z_\eta(\tau, \zeta) = \frac{C(\tau)}{\varphi(\eta)(1+k\eta)(1+k\zeta)},$$
$$Y_k(\tau, \zeta) = \frac{1}{\varphi(1/k)} \frac{C(\tau)/2k + F(\tau, \zeta)}{1+k\zeta}, \quad Z_k(\tau, \zeta) = \frac{C(\tau)}{2k\varphi\left(\frac{1}{k}\right)(1+k\zeta)}. \tag{28}$$

При $\tau = \tau_0$ величина y обращается в вероятность пропускания конечным слоем, а $y(0, \tau, \eta, -\zeta)$ — в вероятность отражения от этого слоя.

Задача о нахождении вероятности выхода кванта, поглощенного на глубине τ в слое толщины τ_0, является частным случаем задачи о расчете внутреннего светового режима, соответствующим $\zeta = 0$:

$$p(\tau, \tau_0, \eta) = y(\tau, \tau_0, \eta, 0), \quad P(\tau, \eta) = Y(\tau, \eta, 0) = Z(\tau, \eta, 0). \tag{29}$$

Из (27—29) при $\zeta = 0$ находим

$$p(\tau, \tau_0, \eta) = P(\tau, \eta) + a(\tau_0, \eta)\frac{a_k(\tau_0-\tau) - a_k(\tau_0)a_k(\tau)}{1-a_k^2(\tau_0)} -$$
$$- b(\tau_0, \eta)a_\eta(\tau_0-\tau) + a_\eta(\tau_0)b(\tau_0, \eta)\frac{a_k(\tau) - a_k(\tau_0)a_k(\tau_0-\tau)}{1-a_k^2(\tau_0)}. \tag{30}$$

Здесь мы учли, что согласно (6), (19), (20) и (24),

$$P_k(\tau) = \int_0^1 \frac{P(\tau, \mu)}{1+k\mu}d\mu = \frac{\bar{F}(\tau, 1/k)}{\varphi(1/k)} = \frac{C(\tau)}{2k\varphi(1/k)} = a_k(\tau), \tag{31}$$

$$P_\eta(\tau) = \int_0^1 \frac{P(\tau, \mu)}{\eta+\mu}d\mu = \frac{\bar{F}(\tau, \eta)}{\eta\varphi(\eta)} = \frac{C(\tau)}{\varphi(\eta)(1+k\eta)} = a_\eta(\tau). \tag{32}$$

Разделив (30) на η и устремив η к нулю, находим выражение для фундаментальной резольвентной функции $\Phi(\tau, \tau_0)$ [3]:

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \Phi(\tau) + C(\tau_0)\frac{a_k(\tau_0-\tau) - a_k(\tau_0)a_k(\tau)}{1-a_k^2(\tau_0)}. \tag{33}$$

В частных случаях $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$ из (30) получаем выражения для функций Амбарцумяна $\varphi(\tau, \eta)$ и $\psi(\tau, \eta)$ для слоя толщины τ_0

$$\frac{\lambda}{2}\varphi(\tau,\eta)=\frac{\lambda}{2}\varphi(\eta)-\frac{1}{\varphi(1/k)\left[1-a_k^2(\tau_0)\right]}\left[a_k(\tau)\,a(\tau,\eta)+a_1(\tau)\,b(\tau,\eta)\right], \tag{34}$$

$$\frac{\lambda}{2}\varphi(\tau,\eta)=P(\tau,\eta)-\frac{1}{\varphi(1/k)\left[1-a_k^2(\tau)\right]}\left[a(\tau,\eta)-a_1(\tau)\,a_2(\tau)\,b(\tau,\eta)\right]-\frac{2k}{1+k\eta}\,\frac{\varphi(1/k)-1}{\varphi(\eta)}\,b(\tau,\eta). \tag{35}$$

Здесь учтено, что, согласно (24) и (7)

$$C(0)=2k\left|\varphi\left(\frac{1}{k}\right)-1\right|. \tag{36}$$

При больших толщинах слоя ($\tau\gg1$) величина $b(\tau,\eta)\to0$ и все полученные выше квазиасимптотические формулы переходят в соответствующие асимптотические формулы В. В. Соболева (см., например, [4], гл. III).

7. *Численные результаты.* Приведем результаты вычислений функции Амбарцумяна $\varphi(\tau,\eta)$ для слоя толщины τ по квазиасимптотической формуле (34). Приведем ее к виду

$$\varphi(\tau,\eta)=\varphi(\eta)-\frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}\,\frac{C(\tau)\,\eta}{1-a_k^2(\tau)}\left\{a_k(\tau)\,\frac{\varphi(\eta)}{1-k\eta}+\frac{1}{1+k\eta}\left[F(\tau,\eta)-\frac{G(\tau)\,\eta}{1-k\eta}\right]\right\}. \tag{37}$$

При $\tau\gg1$ выражение в квадратных скобках, согласно (9), обращается в нуль и мы приходим к обычному асимптотическому выражению

$$\varphi(\tau,\eta)=\varphi(\eta)-\frac{e^{-2k\tau}}{1-\left|\dfrac{A(\infty)}{2k\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}\right|^2 e^{-2k\tau}}\,\frac{A^2(\infty)}{2k\varphi^2\left(\frac{1}{k}\right)}\,\frac{\eta\varphi(\eta)}{1-k\eta}. \tag{38}$$

Для численных расчетов удобно, воспользовавшись приближением (10), переписать (37) в следующем виде:

$$\varphi(\tau,\eta)=\varphi(\eta)-\frac{\tilde F(\tau,\eta)}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)\left[1-a_k^2(\tau)\right]}\left\{F(\tau,\eta)+\frac{1+k\eta}{1-k\eta}\left[a_k(\tau)\,\varphi(\eta)-\tilde F(\tau,\eta)\right]\right\}, \tag{39}$$

что позволит использовать значения F и $\tilde F$ из таблиц 1 и 2.

Результаты вычислений для различных λ приведены в табл. 4. Там же для сравнения приводятся точные значения $\varphi(\tau, \eta)$, взятые из работы [12] (при $\tau=0.7$ точные значения в [12] не даны,— мы их получили интерполированием по значениям для $\tau=0.6$ и 0.8). Значения $\varphi(1/k)$, входящие в (39), вычислялись из соотношения (36)

$$\varphi\left(\frac{1}{k}\right) = \hat{F}\left(0, \frac{1}{k}\right) + 1 = 1 + C(0)\,2k,$$

значения k взяты из [12], а $C(0)$ — по таблице 2. Значения $\varphi(\eta)$ можно найти в табл. 2 из условия (7).

Таблица 4

КВАЗИАСИМПТОТИЧЕСКИЕ И ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $\varphi(\eta, \tau)$

$\tau=0.2$

η \ λ	0.99	0.95	0.9	0.5
0.2	1.197	1.160	1.172	1.084
	1.195	1.185	1.172	1.085
0.4	1.224	1.213	1.203	1.099
	1.233	1.220	1.205	1.101
0.6	1.237	1.228	1.215	1.106
	1.248	1.235	1.219	1.107
0.8	1.257	1.231	1.222	1.108
	1.256	1.242	1.226	1.111
1.0	1.237	1.232	1.225	1.107
	1.261	1.247	1.230	1.113

$\tau=0.4$

η \ λ	0.99	0.95	0.9	0.5	
0.2	1.251	1.236	1.218	1.102	прибл.
	1.257	1.242	1.223	1.103	точн.
0.4	1.333	1.319	1.290	1.134	прибл.
	1.343	1.322	1.296	1.135	точн.
0.6	1.367	1.352	1.325	1.148	прибл.
	1.384	1.359	1.331	1.150	точн.
0.8	1.384	1.371	1.340	1.157	прибл.
	1.407	1.381	1.350	1.158	точн.
1.0	1.393	1.386	1.350	1.164	прибл.
	1.422	1.395	1.363	1.164	точн.

$\tau=0.7$

η \ λ	0.99	0.95	0.9	0.5
0.2	1.294	1.273	1.250	1.110
	1.29	1.28	1.26	1.11
0.4	1.434	1.401	1.366	1.154
	1.44	1.40	1.37	1.16
0.6	1.511	1.476	1.431	1.178
	1.52	1.48	1.43	1.18
0.8	1.560	1.518	1.469	1.193
	1.57	1.52	1.47	1.19
1.0	1.594	1.548	1.495	1.203
	1.60	1.56	1.50	1.20

$\tau=1$

η \ λ	0.99	0.95	0.9	0.5	
0.2	1.318	1.293	1.265	1.112	прибл.
	1.320	1.295	1.267	1.112	точн.
0.4	1.493	1.453	1.406	1.162	прибл.
	1.499	1.455	1.409	1.163	точн.
0.6	1.605	1.550	1.492	1.192	прибл.
	1.611	1.557	1.497	1.193	точн.
0.8	1.680	1.619	1.551	1.211	прибл.
	1.686	1.624	1.556	1.212	точн.
1.0	1.733	1.663	1.592	1.226	прибл.
	1.73[illegible]	1.672	1.597	1.226	точн.

Мы видим, что для всех $\tau \geqslant 0$ и $0.5 < \lambda < 0.99$ значения $\varphi(\tau, \eta)$, вычисленные по квазиасимптотической формуле (39), дают большую точность. При этом, как видно из таблицы 4, точность возрастает с уменьшением λ. Следует, впрочем, помнить, что на деле мы вычисляем не $\varphi(\tau, \eta)$, а лишь поправку $\Delta\varphi$ в формуле (39)

$$\varphi(\tau, \eta) = \varphi(\eta) - \Delta\varphi(\tau, \eta). \tag{40}$$

Поскольку, как известно, $1 < \varphi(\tau, \eta) < \varphi(\eta)$ и $\varphi(\eta) \to 1$ при $\lambda \to 0$, то вычисляемая нами поправка $\Delta\varphi$ уменьшается по сравнению с $\varphi(\eta)$ при уменьшении λ. Этим обусловлено возрастание относительной точности $\varphi(\tau, \eta)$ при уменьшении λ. Чтобы правильно судить о точности формулы (39), мы должны оценить ошибку в вычислении непосредственно самой поправки $\Delta\varphi$. Результат будет соответствовать точности вычисления $\varphi(\tau, \eta)$. Итак, ошибка приближенных формул для $\Delta\varphi$ есть

$$\frac{\varphi_{\text{прибл.}}(\tau, \eta) - \varphi_{\text{точн.}}(\tau, \eta)}{\varphi(\eta) - \varphi_{\text{точн.}}(\tau, \eta)}. \tag{41}$$

Таблица 5 дает сведение о погрешности обычной асимптотической формулы (38) в указанном смысле (41). В ней приводится то значение толщины слоя τ, начиная с которого с данной точностью (в %) справедлива формула (38). Например, при $\lambda = 0.9$ формула (38) дает точность не менее 10%, начиная с $\tau = 2$. При $\lambda = 0.5$ даже для

Таблица 5

% \ λ	0.99	0.95	0.9
1	3.5	4.5	6
5	1.4	2	3
10	0.4	1	2

$\tau = 4.5$ ошибка формулы (38) превышает 30%.

В таблице 6 приведена погрешность (в %) квазиасимптотической формулы (39) в смысле (41). Даже при $\lambda = 0.5$ при всех $\tau = 0$ погрешность не

Таблица 6

τ \ λ	0.99—0.9	0.5
0	3%	1%
0.2—0.4	2—3	6—8
1	1—2	2

превышает 10%. С возрастанием τ погрешность, даваемая приближенными формулами, асимптотически стремится к нулю. Увеличение точности формулы (39) при $\tau = 0$ есть результат замены $C(\tau)\,\eta/(1 + k\eta)$ на $\bar{F}(\tau, \eta)$.

Отметим еще, что с уменьшением η точность асимптотических формул возрастает, поскольку асимптотики соответствуют условию $(1-k\eta)\tau \gg \eta$, выполняющемуся тем лучше, чем меньше η.

8. *Квазиасимптотики для произвольного* $\lambda \leqslant 1$. Квазиасимптотические решения, полученные выше для случая $\lambda \neq 1$, основывались на двух приближениях — (10) и (24). Из таблицы 2 видно, что приближение (24) выполняется тем хуже, чем ближе λ к 1. В пределе $\lambda \to 1$ приближение (24) соответствует обычным асимптотикам. Чтобы получить квазиасимптотические решения, годные и для значений λ, близких к 1, мы должны отказаться от приближения (24) и решить задачу только в приближении (10). Для этого в правых частях (15) мы сохраним интегралы, согласно (23) равные

$$\int_0^1 s(\mu)\, b_{k\nu}\, d\mu = \varepsilon s_{-k}, \qquad \int_0^1 h(\mu)\, b_{k\nu}\, d\mu = \varepsilon h_{-k}. \tag{42}$$

Здесь введены обозначения

$$\varepsilon = \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}\left[\widetilde{F}\left(\tau_0, \frac{1}{k}\right) - \frac{C(\tau_0)}{2k}\right] \tag{43}$$

и

$$f_{-k} = \int_0^1 \frac{f(\mu)\, d\mu}{1-k\mu}. \tag{44}$$

Теперь вместо (15) имеем

$$S_k = s_k + s_k a_k(\tau_0) + \varepsilon s_{-k}, \quad H_k = h_k - h_k a_k(\tau_0) - \varepsilon h_{-k}. \tag{45}$$

Чтобы найти s_{-k} и h_{-k}, подействуем на уравнения (2) оператором $\int_0^1 \cdots \frac{d\zeta}{1-k\zeta}$. Учитывая, что

$$Z_{-k}(\tau, \zeta) = \frac{e^{-k\tau}}{1+k\zeta} \tag{46}$$

(см. формулу (П.4) работы [1]), находим

$$S_{-k} = s_{-k} + e^{-k\tau_0} s_k, \qquad H_{-k} = h_{-k} - e^{-k\tau_0} h_k. \tag{47}$$

Заметим, что соотношения (47) являются точными, а не приближенными. При чистом рассеянии они обращаются в тождества и заменяются точными соотношениями:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1 \bar{F}(\tau_0,\mu)\, s(\mu)\, d\mu = S_1 - q(\tau_0), \qquad 2h_1 + h_0\tau_0 = \left.\frac{H_0}{\sqrt{3(1-\lambda)}}\right|_{k=1} - H_1 \tag{48}$$

следующими из (2) действием операторов $\int_0^1 \cdots d\eta$ и $\int_0^1 \cdots \eta\, d\eta$.

Сравнивая (47) с (45), находим

$$s_k = \frac{S_k - \varepsilon S_{-k}}{1 + a_k - \varepsilon e^{-k\tau_0}}, \qquad h_k = \frac{H_k + \varepsilon H_{-k}}{1 - a_k - \varepsilon e^{-k\tau_0}}. \tag{49}$$

Таким образом, искомые квазиасимптотические решения, основывающиеся на единственном приближении (10) ($\eta \leqslant 1$), даются выражением (18), где s_1 и h_1 определяются из (17), а s_k и h_k — из (49). Величину $C(\tau)$ (как и в случае чистого рассеяния [1]) определим из соотношения (10) при $\eta = 1$:

$$C(\tau) = (1 + k)\, \bar{F}(\tau, 1). \tag{50}$$

Из полученных решений можно, в частности, найти квазиасимптотическое выражение для резольвентной функции

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \Phi(\tau) + C(\tau_0)(h_k - s_k), \tag{51}$$

где

$$h_k - s_k =$$
$$= \frac{(1 - \varepsilon e^{-k\tau_0})[\varepsilon P_{-k}(\tau) - P_k(\tau_0 - \tau)] + a_k(\tau_0)[P_k(\tau) - \varepsilon P_{-k}(\tau_0 - \tau)]}{(1 - \varepsilon e^{-k\tau_0})^2 - a_k^2(\tau_0)}.$$

Приведем два полезных для вычислений интеграла (см. [1])

$$Y_{-k}(\tau, \zeta) = \frac{e^{-k\tau}}{1 - k\zeta}, \qquad Y_\eta(\tau, \zeta) = \frac{F(\tau, \zeta) + \bar{F}(\tau, \eta)}{\varphi(\eta)(\eta + \zeta)}. \tag{52}$$

Заметим, что квазиасимптотические решения, полученные в настоящем разделе, практически имеет смысл использовать только при значениях λ, близких к 1. Для этого можно получить разложение квазиасимптотических формул по степеням малого k, тем самым выразив их через величины, соответствующие случаю чистого рассеяния и полученные в работе [1].

При $\lambda \to 1$ формулы этого раздела переходят в соответствующие формулы работы [1].

9. *Линейные сингулярные уравнения.* Уравнения (2) легко свести к линейным сингулярным уравнениям. Рассмотрим первое уравнение для s. Действуя на него оператором $\int\limits_0^1 \cdots \frac{d\eta}{\eta-\nu}$ и используя выражение (П.3) работы [1] для интеграла $Z_{-\nu}$ (сингулярное уравнение для Z) и само уравнение (2), получаем

$$S_{-\nu} = s_{-\nu} + \frac{2}{\lambda}\frac{\Lambda(\nu)}{\nu}[S(\nu) - s(\nu)] - e^{-\tau_0/\nu}s_\nu, \tag{53}$$

где $\Lambda(\nu) = 1 - \frac{\lambda}{2}\nu\ln\frac{1+\nu}{1-\nu}$. Если же на уравнение (2) подействовать оператором $\int\limits_0^1 \cdots \frac{d\eta}{\eta+\nu}$ и учесть формулу (П.2) работы [1], то получим другое уравнение

$$S_\nu = s_\nu - \frac{\bar F(\tau_0, \nu)}{\varphi(\nu)}s_{-\nu} + \frac{1}{\varphi(\nu)}\int\limits_0^1 \frac{s(\mu)\bar F(\tau_0, \mu)}{\mu-\nu}d\mu. \tag{54}$$

Исключая s_ν из (53) и (54), получаем линейное сингулярное интегральное уравнение

$$\Lambda(\nu)s(\nu) - \frac{\lambda}{2}\nu\int\limits_0^1 A(\tau_0, \mu, \nu)\frac{s(\mu)}{\mu-\nu}d\mu = \frac{\lambda}{2}f(\tau, \tau_0, \nu, \xi), \tag{55}$$

где

$$A(\tau, \mu, \nu) = 1 + e^{-\tau_0/\nu}\frac{\bar F(\tau, \mu) - \bar F(\tau, \nu)}{\varphi(\nu)},$$

$$\frac{\lambda}{2}f = \Lambda(\nu)S(\nu) - \frac{\lambda}{2}\nu(S_{-\nu} + e^{-\tau_0/\nu}S_\nu).$$

Правую часть уравнения f можно упростить с помощью интегралов, приведенных в Приложении работы [1].

Аналогично, можно получить сингулярное уравнение для h из второго уравнения (2). Из этих двух сингулярных уравнений в частности следует уравнение для $p(\tau, \tau_0, \nu)$ — оно имет вид (55) с правой частью

$$f(\tau, \tau_0, \nu) = e^{-\tau/\nu} - e^{-\tau_0/\nu}\frac{\tilde F(\tau_0 - \tau, \nu)}{\varphi(\nu)}. \tag{56}$$

Сингулярное уравнение (55) не определяет однозначно искомую функцию, а только функциональную зависимость от углового аргумента ν, с точностью до произвольной функции, зависящей от параметров, входящих в уравнение. В частности, в случае уравнения для $p(\tau, \tau_0, \nu)$ эта произвольная функция $c(\tau, \tau_0)$ зависит от τ и τ_0.

Если вспомнить, что $\Phi(\tau, \tau_0) = \lim\limits_{\nu \to 0} \frac{p(\tau, \tau_0, \nu)}{\nu}$, то нетрудно убедиться, что знание $c(\tau, \tau_0)$ равносильно знанию *резольвентной функции* $\Phi(\tau, \tau_0)$. Знания же резольвентной функции, как хорошо известно, уже достаточно для определения $p(\tau, \tau_0, \nu)$. В этом смысле уравнение (55) для нашей физической задачи казалось бы, не содержит полезной информации.

Для однозначного решения сингулярного уравнения (55) необходимы дополнительные условия. Если рассмотреть известные линейные уравнения для более частных задач, то легко видеть, что во всех случаях (за исключением уравнения для σ, [3], формула (62), гл. IV) дополнительное условие может быть интерпретировано как требование отсутствия полюса у искомой функции в точке $\nu = 1/k$. Налагая требование ограниченности неизвестной функции в точке $\nu = 1/k$ и учитывая, что $\Lambda(1/k) = 0$, из уравнения (55) непосредственно находим условие

$$I\left(\tau, \tau_0, \frac{1}{k}, \zeta\right) = \frac{\lambda}{2}\int_0^1 A\left(\tau_0, \mu, \frac{1}{k}\right)\frac{s(\tau, \tau_0, \mu, \zeta)}{1-k\mu}\,d\mu. \qquad (57)$$

Из сингулярного уравнения (55) и дополнительного условия (57) известными методами (см., например, [13]) следуют полученные выше квазиасимптотические решения. Для этого нужно использовать приближение (10) для $\bar{F}_\nu$ — тогда (55) сводится к уравнению с ядром Коши, а некоторые появляющиеся при этом вспомогательные интегралы вычисляются с помощью самого уравнения (55). Асимптотические решения В. В. Соболева соответствуют $\tau_0 \gg 1$ или пренебрежению в решениях величинами типа $e^{-\tau_0/\eta}$ и сохранению членов $e^{-k\tau_0}$, $e^{-\tau/\eta}$ и $e^{-k\tau}$.

10. *Другие задачи для слоя конечной толщины.* Выше была рассмотрена задача (1) о нахождении вероятности $x(\tau, \tau_0, \eta, \zeta)$ выхода из слоя конечной толщины кванта, первоначально летевшего на глубине τ в данном направлении ζ. В зависимости от знака ζ для этой величины были введены отдельные обозначения y или z:

$$x(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) = \begin{cases} y(\tau, \tau_0, \eta, \zeta), & \zeta > 0, \\ z(\tau, \tau_0, \eta, \zeta), & \zeta < 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Более общей является задача о нахождении функции Грина $\Gamma(\tau', \tau, \tau_0, \eta, \zeta)$ — вероятности того, что квант, первоначально летевший на глубине τ в направлении ζ, когда-либо пролетит на глубине τ' в направлении η. Величина x является частным значением функции Грина: $x(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) = \Gamma(\tau_0, \tau, \tau_0, \eta, \zeta)$ (поверхностная функция Грина).

Используя предлагаемый автором в [7] метод, можно задачу о нахождении функции Грина для слоя конечной толщины свести к задаче о нахождении функции Грина $\Gamma(\tau', \tau, \eta, \zeta)$ для полупространства. Для этого добавляем мысленно к слою конечной толщины полубесконечный слой и получаем [1]:

$$\Gamma(\tau', \tau, \eta, \zeta) = \Gamma(\tau', \tau, \tau_0, \eta, \zeta) + \int_0^1 \Gamma(\tau', \tau_0, \eta, \mu)\, x(\tau, \tau_0, \mu, \zeta)\, d\mu. \quad \text{(II)}$$

Это соотношение означает, что, если известна поверхностная функция Грина $x(\tau, \tau_0, \eta, \zeta)$ для слоя конечной толщины, то более общая величина $\Gamma(\tau', \tau, \tau_0, \eta, \zeta)$ явным образом выражается через функцию Грина для полубесконечной среды.

В свою очередь, функцию Грина $\Gamma(\tau', \tau, \eta, \zeta)$ для полубесконечной среды можно выразить через ее частное значение $X(\tau, \eta, \zeta) = \Gamma(0, \tau, \eta, \zeta)$ и аналогичную функцию Грина для бесконечной среды Γ_∞. Действительно, разрезая мысленно бесконечную среду на два полубесконечных слоя, легко находим

$$\Gamma_\infty(\tau', \tau, \eta, \zeta) = \Gamma(\tau', \tau, \eta, \zeta) + \int_0^1 \Gamma_\infty(\tau', 0, \eta, \mu)\, X(\tau, \mu, \zeta)\, d\mu.$$

Замечая, что $\Gamma_\infty(\tau', \tau, \eta, \zeta)$ зависит от разности аргументов $\tau' - \tau$, перепишем полученное выражение в виде

$$\Gamma(\tau', \tau, \eta, \zeta) = \Gamma_\infty(\tau' - \tau, \eta, \zeta) - \int_0^1 \Gamma_\infty(\tau', \eta, \mu)\, X(\tau, \mu, \zeta)\, d\mu \quad \text{(III)}$$

Поверхностная функция Грина $X(\tau, \eta, \zeta)$ в зависимости от знака ζ совпадает с одной из величин Y и Z, рассматриваемых выше в статье:

$$X(\tau, \eta, \zeta) = \begin{cases} Y(\tau, \eta, \zeta), & \zeta > 0, \\ Z(\tau, \eta, \zeta), & \zeta < 0. \end{cases} \quad \text{(IV)}$$

Знание поверхностной функции Грина позволяет находить выходящее из слоя излучение при заданных внутренних полях (а также, в силу принципа обратимости), внутренний световой режим при освещении слоя параллельным пучком). Общая же функция Грина позволяет решить задачу о внутреннем световом поле при заданном распределении первичного излучения внутри среды. Соотношения (II—III) можно интерпретировать также как выражение решения задачи о внутреннем световом режиме через величины, описывающие выходящее из среды излучение.

Аналогично обстоит дело и в задаче о внутреннем световом режиме при заданных источниках внутри среды. Если речь идет о кванте, первоначально не летевшем, а поглощенном, то величина $r^*(\tau', \tau, \tau_0, \eta, \zeta)$, имеющая тот же смысл, что и r, но для кванта, поглощенного в направлении ζ, получается из r умножением на индикатрису рассеяния $p(\zeta, \nu)$ и интегрированием по ζ. (В случае сферической индикатрисы можно это сделать, полагая также $\zeta_0 = 0$). Для нее, очевидно, имеет место соотношение

$$\Gamma^*(\tau', \tau, \eta, \zeta) = r^*(\tau', \tau, \tau_0, \eta, \zeta) + \int_0^1 \Gamma(\tau', \tau_0, \eta, \mu)\, x^*(\tau, \tau_0, \mu, \zeta)\, d\mu, \quad \text{(V)}$$

причем x^* удовлетворяет уравнению типа (1):

$$\left.\begin{aligned} Y^*(\tau, \eta, \zeta) &= y^*(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) + \int_0^1 Z(\tau_0, \eta, \mu)\, z^*(\tau_0 - \tau, \tau_0, \mu, \zeta)\, d\mu, \\ Z^*(\tau_0 - \tau, \eta, \zeta) &= z^*(\tau_0 - \tau, \tau_0, \eta, \zeta) + \int_0^1 Z(\tau_0, \eta, \mu)\, y^*(\tau, \tau_0, \mu, \zeta)\, d\mu. \end{aligned}\right\} \quad \text{(VI)}$$

Вместо (III) в случае первоначально поглощенного кванта имеем

$$\Gamma^*(\tau', \tau, \eta, \zeta) = \Gamma^*_-(\tau' - \tau, \eta, \zeta) - \int_0^1 \Gamma_-(\tau', \eta, \mu)\, X^*(\tau, \mu, \zeta)\, d\mu. \quad \text{(VII)}$$

Пусть $g(\tau, \zeta)$ — распределение первичных квантов, как поглощенных, так и движущихся, внутри слоя толщины τ_0. Тогда внутреннее световое поле $i(\tau, \eta)$ определяется из соотношения

$$I(\tau, \eta) = i(\tau, \eta) + \int_0^1 \Gamma(\tau', \tau_0, \eta, \mu)\, i(\mu)\, d\mu, \quad \text{(VIII)}$$

где $i(\eta)$ — распределение выходящих через границу слоя квантов, а $I(\tau, \eta)$ — внутреннее поле в полубесконечной среде с тем же распределением $g(\tau, \zeta)$ первичных квантов в пограничном слое толщиной τ_0. Распределение же выходящих через каждую границу слоя квантов $i^+(\eta)$ или $i^-(\eta)$ определяется уравнениями

$$
\begin{aligned}
I^{+}(\tau_i) &= i^{+}(\tau_i) + \int_0^1 Z(\tau_0, \tau_i, \mu)\, i^{-}(\mu)\, d\mu, \\
I^{-}(\tau_i) &= i^{-}(\tau_i) + \int_0^1 Z(\tau_0, \tau_i, \mu)\, i^{+}(\mu)\, d\mu.
\end{aligned} \tag{IX}
$$

Эти соотношения следуют из (I) и (II) умножением на g и интегрированием, а также непосредственно из физических соображений [7].

Складывая и вычитая уравнения (IX), приходим к раздельным уравнениям (2), где под s и h нужно подразумевать величины

$$s = i^{+} + i^{-}, \qquad S = I^{+} + I^{-}, \qquad h = i^{+} - i^{-}, \qquad H = I^{+} - I^{-}. \tag{X}$$

Все квазиасимптотические формулы настоящей статьи, в которых фигурируют величины s, S и h, H, без конкретизации обозначений (3) и (4), справедливы в общем случае (X) — при произвольном распределении первичных квантов, как поглощенных, так и движущихся.

Заметим теперь, что в уравнениях (I—II) толщина слоя τ_0 является параметром (таковыми были и τ и ζ). Это обстоятельство позволяет решить задачу для слоя данной толщины τ_0, не прибегая к решениям задачи для других значений толщины τ_0, в отличие от того, как это делается в случае применения к слою конечной толщины принципа инвариантности Амбарцумяна.

Автор выражает благодарность проф. В. В. Иванову за полезное обсуждение результатов работы.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

THE QUASIASYMPTOTIC SOLUTIONS OF THE RADIATIVE TRANSFER PROBLEM IN AN OPTICALLY FINITE LAYER. II. NONCONSERVATIVE SCATTERING

M. A. MNATSAKANIAN

The approximate analytic (quasiasymptotic) solutions of the radiative transfer problem for an optically finite layer are obtained in the case of monochromatic isotropic nonconservative ($\lambda \leqslant 1$) scattering. Although the solutions are asymptotic, practically they can be applied to a layer of arbitrary thickness. If the thickness of the layer is large, they are reduced to the well-known V. V. Sobolev's asymptotic solutions. The quasiasymptotic solutions have higher accuracy as compared with usual asymptotic ones, and their relative accuracy increases as λ decreases.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. А. Мнацаканян*. Астрофизика, 11, 659, 1975.
2. *В. В. Соболев*. ДАН, 155, 316, 1964.
3. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГИТТЛ, М., 1956.
4. *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
5. *Б. В. Иванов*. Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
6. *М. А. Мнацаканян*, Сообщ. Бюраканской обс., 42, 93, 1975.
7. *М. А. Мнацаканян*, ДАН, 225, 1049, 1975.
8. *Э. Х. Даниелян, М. А. Мнацаканян*, Сообщ. Бюраканской обс., 46, 101, 1975.
9. *В. А. Амбарцумян*. ДАН, 38, 257, 1943.
10. *В. А. Амбарцумян*. Научные труды, т. 1, Ереван, 1960.
11. *А. Б. Шнейвайс*, Вести. ЛГУ, № 7, 144, 1973.
12. *J. L. Carlstedt, T. W. Mullikin*, Ap. J., Suppl. ser., 113, 449, 1966.
13. *К. Кейз, П. Цвайфель*, Линейная теория переноса, Мир, М., 1972.