АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 12 АВГУСТ, 1976 ВЫПУСК 3

# РАСШИРЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ ЭЛЕКТРОННЫМ РАССЕЯНИЕМ. I. МЕТОДЫ РАСЧЕТА

Д. И. НАГИРНЕР, В. Г. ВЕДМИЧ

Поступила 19 января 1976

Предлагаются два метода расчета профилей линий, образующихся в полубесконечной атмосфере при совместном действии резонансного и электронного рассеяний с перераспределением по частотам. Первый основан на использовании двумерного линейного интегрального уравнения для интенсивности выходящего излучения, которое при малой роли электронного рассеяния можно решать последовательными приближениями. Второй метод заключается в разделении этой интенсивности на три части, соответствующие непрерывному спектру, электронному и резонансному рассеянию. Здесь также необходимы итерации при решении двух связанных одномерных линейных интегральных уравнений. В приложении приводятся явные решения этих уравнений при известных свободных членах.

1. *Введение.* Теоретический расчет профилей спектральных линий, расширенных рассеянием на свободных электронах, представляет сравнительно трудную задачу. Ее решал Г. Мюнч приближенным методом Чандрасекара [1] при функции перераспределения Дирака. Тем же способом Ф. Эдмондс [2] изучал уширение линий электронным рассеянием (ЭР), используя для сечения рассеяния тепловыми релятивистскими электронами формулу Клейна—Нишины. Л. Ауэр и Д. Михалас [3] численно рассчитали профили уширенных линий, используя функцию перераспределения, найденную Д. Хаммером и Д. Михаласом [4]. В работе Я. Б. Зельдовича, Е. В. Левича и Р. А. Сюняева [5] численно находилась эволюция углового и частотного распределения излучения первоначально узкой линии в бесконечной среде с учетом нелинейных эффектов ЭР. Одним из авторов [6] были рассчитаны профили линий излучения и поглощения, образующихся в плоских средах, в которых отсутствует поглощение в рассматриваемых линиях ,что можно принять для субординатных линий.

В последнее время изучалось влияние ЭР на непрерывный спектр (комптоновский механизм охлаждения и нагревания электронного газа излучением и эволюция спектра [7]), в частности, в сильных магнитных полях [8]. Возросший же в конце 60-х годов [3, 4, 6, 9, 10] интерес к исследованию влияния ЭР на образование линейчатых спектров упал, т. к. утвердилось мнение, что большая ширина линий в спектрах ряда астрофизических объектов вызывается другими причинами. Тем не менее, мы считаем необходимым вновь обратиться к данной проблеме, во-первых, из методологических соображений, а во-вторых, из уверенности, что в некоторых объектах (таких, как сейфеговские галактики, квазары и др.) ЭР является достаточно эффективным механизмом расширения линий.

В настоящей статье рассматривается образование спектральных линий при совместном действии резонансного и электронного рассеяний. Предлагаются два метода расчета профилей линий. Первый предпочтителен, когда ЭР сравнительно слабо, второй — в противоположном случае. Области применимости методов перекрываются.

2. *Основные уравнения.* Пусть в полубесконечной атмосфере распространяется излучение резонансной линии. Считается, что рассеяние происходит с полным перераспределением по частоте, а поглощение и излучение в непрерывном спектре не зависят от частоты. Рассеяние на электронах изотропно и описывается функцией перераспределения, зависящей только от разности частот падающего и рассеянного фотонов. Тогда интенсивность излучения $I(\tau, \mu, x)$ определяется следующим уравнением переноса [3]:

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, x)}{d\tau} = -[\alpha(x) + \beta] I(\tau, \mu, x) + \\ + \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x, x') J(\tau, x') dx' + \alpha(x) S_L^0(\tau) + \beta_c S_c^0(\tau\beta). \tag{1}$$

Здесь $\tau$ — оптическая глубина в центре линии, $\mu$ — косинус угла между направлением распространения излучения и внутренней нормалью к слоям атмосферы, $x$ — частота, измеренная в некоторых единицах $\Delta\nu$ (например, доплеровских ширинах $\Delta\nu_D$). Далее, $\alpha(x)$ — профиль коэффициента поглощения в линии, в центре линии $\alpha(0) = 1$, $\beta = \beta_c + \beta_e$, причем, $\beta_c$ и $\beta_e$ — отношения коэффициентов поглощения в континууме и рассеяния на электронах к коэффициенту поглощения в центре линии. $S_L^0(\tau)$ и $S_c^0(\tau\beta)$ — известные функции, характеризующие мощность первичных источников излучения в линии и континууме. Если по отношению к процессам в континууме выполняется предположение о ЛТР, то

$$S_L^0(\tau) = (1 - \lambda) B(\tau), \qquad S_c^0(\tau\beta) = B(\tau), \tag{2}$$

где $\lambda$ — вероятность выживания фотона при рассеянии в линии, а $B(\tau)$ — функция Планка.

Наконец, в члене, описывающем рассеяние, $J$ — интенсивность, усредненная по $\mu$, а $R(x, x')$ дается формулой

$$R(x, x') = \lambda A \alpha(x) \alpha(x') + \frac{\beta_e}{\gamma} R\left(\frac{x - x'}{\gamma}\right). \tag{3}$$

Первое слагаемое в (3) соответствует перераспределению при рассеянии в линии ($A$ — постоянная, нормирующая интеграл от $A\alpha(x)$ по $x$ на 1), а второе — томсоновскому рассеянию на тепловых электронах. Интеграл по $y$ от $R(y)$ также равен 1. В качестве $R(y)$ может быть взята функция, найденная в [4]. Далее, $\gamma = \Delta\nu_e/\Delta\nu$, где $\Delta\nu_e$ — доплеровская ширина, рассчитанная для скоростей электронов. Если $\Delta\nu = \Delta\nu_D$, то $\gamma$ — корень из отношения масс атома и электрона. Для водорода тогда $\gamma \approx 43$. К уравнению (1) следует добавить обычные граничные условия $I(0, \mu, x) = 0$ при $-\infty < x < \infty$ и $0 < \mu \leqslant 1$.

Заметим, что первое слагаемое в (3) вырожденное, а второе — «сверточное». Если либо $\alpha(x) = 0$, либо $R(y) = 0$, то в обоих случаях поставленная задача сводится к одномерным интегральным уравнениям [6, 11, 12]. В общем же случае (3) приводит к уравнениям с интегрированием по двум переменным, одной из которых является частота.

3. *Метод линейного интегрального уравнения.* Так как наибольший интерес представляет выходящее из атмосферы излучение, то получим линейное интегральное уравнение для $I(0, -\mu, x) = I(\mu, x)$. Способ его получения совпадает с примененным В. В. Соболевым [11, 13] при выводе линейных интегральных уравнений для коэффициента отражения при монохроматическом рассеянии. Мы наметим его, не выписывая формул. Разрешим уравнение (1) относительно $I(\tau, \mu, x)$, считая $J(\tau, x)$ известной функцией, затем по $I(\tau, \mu, x)$ найдем $J(\tau, x)$ и результат подставим в выражение для $I(0, -\mu, x)$. Выполнив в полученном соотношении два интегрирования по оптической глубине, придем к искомому уравнению. При этом приходится формально величине $\mu$ придавать значения большие 1. Имеющая физический смысл интенсивность $I(\mu, x)$ получается сужением найденной из уравнения $0 < \mu \leqslant 1$.

Несколько более простое уравнение, которое мы и приведем, получается из уравнения для $I(\mu, x)$, если ввести новую искомую функцию $i(z, x)$, связав ее с $I(\mu, x)$ следующим соотношением:

$$i(z, x) = [\alpha(x) + \beta] I(z[\alpha(x) + \beta], x). \tag{4}$$

Уравнение для $i(z, x)$ имеет вид

$$i(z, x) = \alpha(x) I_L^0(z) + \beta_e I_e^0(\beta z) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} R(x, x')\,dx' \int_0^{\frac{1}{\alpha(x')+\beta}} \varphi[i(z, x'), z']\,dz', \tag{5}$$

где введены обозначения

$$I_L^0(z) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z}} S_L^0(\tau)\frac{d\tau}{z}, \qquad I_e^0(\mu) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau_e}{\mu}} S_e^0(\tau_e)\frac{d\tau_e}{\mu}, \tag{6}$$

$$\varphi[i(z, x'), z'] = \frac{z i(z, x')}{z + z'} + \frac{z i(z, x') - z' i(z', x')}{z - z'}. \tag{7}$$

Это уравнение является обобщением обычных линейных интегральных уравнений для величин, характеризующих выходящее излучение [11, 13, 14].

Уравнение (5) можно решить численно. При малых $\beta_e$ удобно применить последовательные приближения, в качестве исходного взяв решение для $R(y) = 0$ (см. (3)). При $\beta_e \sim 1$ такой метод не подходит, а непосредственное решение (1) также нецелесообразно, вследствие большой роли многократных рассеяний. Но даже когда $\beta_e < 1$ при решении (5) наталкиваемся на трудность, заключающуюся в разном масштабе изменения слагаемых (3): там, где $\alpha(x)$ пренебрежимо мало, $R(x/\gamma)$ еще близко к $R(0)$. Именно это обстоятельство, которое затрудняет совместное рассмотрение резонансного и электронного рассеяний, мы положим в основу второго метода решения нашей задачи, в котором эти рассеяния будут «разделены».

4. *Метод разделения рассеяний.* Рассматриваемая нами проблема имеет несколько характерных масштабов изменения частот. Это промежутки $\Delta\nu_c$, $\Delta\nu_e$ и $\Delta\nu$, на которых существенно изменяются функция Планка и коэффициент непрерывного поглощения ($\Delta\nu_c$), функция перераспределения при ЭР ($\Delta\nu_e$) и коэффициент поглощения в линии ($\Delta\nu$). Величина $\Delta\nu_c \gg \Delta\nu_e$ и тем более $\gg \Delta\nu$, поэтому мы $\beta$ и $B$ считаем вообще не зависящими от частоты. Отношение $\Delta\nu_e/\Delta\nu = \gamma$ имеет порядок нескольких десятков, но полностью пренебрегать зависимостью $R$ от частоты нельзя. Кроме того, ширина образующейся при многократном резонансном рассеянии линии $\Delta\nu_l$ может быть гораздо больше $\Delta\nu$. Если $\lambda = 1$, $\beta = 0$ и глубина возникновения фотона в линии в полубес-

конечной атмосфере $\bar{\tau} = \infty$, то линия получается бесконечно широкой: $\Delta\nu_L = \infty$. При $\beta = \beta_e \neq 0$ величина $\Delta\nu_L$ определяется из условия $\alpha(\Delta\nu_L/\Delta\nu) \approx \beta_e$. Если же $\lambda < 1$, $\beta_e \neq 0$ или $\bar{\tau} < \infty$, то $\Delta\nu_L$ удовлетворяет соотношению $\alpha(\Delta\nu_L/\Delta\nu) \lesssim \beta_e$. Поэтому, если брать $\beta_e \gg \alpha(\gamma)$, то ширина образующейся линии $\Delta\nu_L$ будет порядка $\Delta\nu$ и существенно меньше $\Delta\nu_e$. Так как $\gamma$ порядка нескольких десятков, то это ограничение на $\beta_e$ не сильное.

Разобьем интенсивность излучения на слагаемые, соответствующие трем масштабам частоты $\Delta\nu_c$, $\Delta\nu_e = \gamma\Delta\nu$ и $\Delta\nu_L \sim \Delta\nu$:

$$I(\tau, \mu, x) = I_c(\tau\beta, \mu) + I_e(\tau\beta, \mu, x/\gamma) + I_L(\tau, \mu, x). \tag{8}$$

Заметим, что два последних члена в (8) могут быть отрицательными. Подставим (8) в уравнение переноса (1) и определим первые две составляющие интенсивности уравнениями:

$$\mu \frac{dI_c(\tau_c, \mu)}{d\tau_c} = -I_c(\tau_c, \mu) + (1 - \lambda_e) S_c^*(\tau_c) + \lambda_e J_c(\tau_c), \tag{9}$$

$$\mu \frac{dI_e(\tau_c, \mu, y)}{d\tau_c} = -I_e(\tau_c, \mu, y) + \lambda_e \int_{-\infty}^{\infty} R(y - y')\, J_e(\tau_c, y')\, dy' + \lambda_e \int_{-\infty}^{\infty} R(y - y')\, J_L(\tau_c/\beta, \gamma y')\, dy'. \tag{10}$$

В (9) и (10) обозначено $\tau\beta = \tau_c$, $\beta_e/\beta = \lambda_e$. Уравнение для $I_L$ следует из (8), (9), (10) и (1) (мы его не выписываем для краткости). Полученная система трех уравнений равносильна (1).

Теперь сделаем приближения, основанные на том, что $\Delta\nu_L \ll \Delta\nu_e$. В (10) в последнем интеграле вынесем $R(y - y')$ при $y' = 0$:

$$\mu \frac{dI_e(\tau_c, \mu, y)}{d\tau_c} = -I_e(\tau_c, \mu, y) + \lambda_e \int_{-\infty}^{\infty} R(y - y')\, J_e(\tau_c, y')\, dy' + \lambda_e R(y) \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} J_L(\tau_c/\beta, x)\, dx. \tag{11}$$

Аналогично поступим с величинами $J_e$ и $I_e$ в третьем уравнении. Тогда получим его в виде

$$\mu \frac{dI_L(\tau, \mu, x)}{d\tau} = -[\alpha(x) + \beta] I_L(\tau, \mu, x) +$$

$$+ \alpha(x) \Big[ S_L^0(\tau) + \lambda A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') J_L(\tau, x')\, dx' + \tag{12}$$

$$+ \lambda J_c(\tau\beta) + \lambda J_c(\tau\beta, 0) - I_c(\tau\beta, \mu) - I_c(\tau\beta, \mu, 0) \Big].$$

Как обычно при рассмотрении рассеяния в линии при полном перераспределении, число переменных, от которых зависит искомая интенсивность, можно уменьшить. Для этого сделаем еще одну замену

$$I_L(\tau, \mu, x) = i_0(\tau, \mu, x) + \frac{\alpha(x)}{\alpha(x) + \beta}\, i_L\left(\tau, \frac{\mu}{\alpha(x) + \beta}\right), \tag{13}$$

где $i_0(\tau, \mu, x)$ определяется так:

$$i_0(\tau, \mu, x) = \begin{cases} -\dfrac{\alpha(x)}{\mu} \displaystyle\int_0^{\tau} \exp\left\{-\frac{\alpha(x)+\beta}{\mu}(\tau - \tau')\right\} [I_c(\tau'\beta, \mu) + \\ \qquad + I_c(\tau'\beta, \mu, 0)]\, d\tau' \quad \text{при } \mu > 0, \\ \dfrac{\alpha(x)}{\mu} \displaystyle\int_{\tau}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\alpha(x)+\beta}{\mu}(\tau - \tau')\right\} [I_c(\tau'\beta, \mu) + \\ \qquad + I_c(\tau'\beta, \mu, 0)]\, d\tau' \quad \text{при } \mu < 0. \end{cases} \tag{14}$$

Тогда для $i_L(\tau, z)$ получается уравнение

$$z \frac{di_L(\tau, z)}{d\tau} = -i_L(\tau, z) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{1/\beta} G\left(\frac{z'}{1 - \beta z'}\right) [i_L(\tau, z') + i_L(\tau, -z')]\, dz' +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\, dx \int_{-1}^{1} i_0(\tau, \mu, x)\, d\mu + S_L^0(\tau) + \lambda J_c(\tau\beta) + \lambda J_c(\tau\beta, 0). \tag{15}$$

Здесь $G = G_1$ — одна из стандартных функций, определяемых по профилю коэффициента поглощения [12].

$$G_k(z) = \begin{cases} A \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha^{k+1}(x)\,dx, & 0 \leqslant z \leqslant 1, \\ 2A \int\limits_{x(z)}^{\infty} \alpha^{k+1}(x)\,dx, & z > 1, \end{cases} \tag{16}$$

причем $\alpha(x(z)) = 1/z$, $x(z) > 0$.

Таким образом, мы получили систему трех уравнений переноса. Одно из них, а именно (9), решается отдельно и из него определяется интенсивность излучения в непрерывном спектре $I_c$. Два других (11) и (15) связаны. Из (11) видно, что единственным источником «электронной части» интенсивности служит полная средняя интенсивность излучения в узкой линии, которая размазывается по промежутку частот $\sim \Delta\nu_e$. При решении уравнения (11) следует применить преобразование Фурье по частоте $y$

$$\bar{I}_e(\tau_c, \mu, u) = 2\int\limits_0^{\infty} \cos uy\, I_e(\tau_c, \mu, y)\,dy, \tag{17}$$

которое сводит (11) к уравнению вида (9)

$$\mu \frac{d\bar{I}_e(\tau_c, \mu, u)}{d\tau_c} = -\bar{I}_e(\tau_c, \mu, u) + \lambda_e(u)\left[\bar{J}_e(\tau_c, u) + \frac{1}{\gamma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} J_L(\tau_c/\beta, x)\,dx\right], \tag{18}$$

где $\lambda_e(u) = \lambda_e \bar{R}(u)$, а $\bar{R}(u)$ — преобразование Фурье от $R(y)$. Для нахождения самой интенсивности $I_e$ надо выполнить обратное преобразование. Как следует из (12), при совместном решении уравнений (15) и (18) достаточно находить

$$I_e(\tau_c, \mu, 0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \bar{I}_e(\tau_c, \mu, u)\,du. \tag{19}$$

5. *Выходящее излучение.* Теперь, как и в разделе 3, обратимся к определению выходящего излучения. Действуем таким же способом, что и при выводе уравнения (5). Тогда для $I_c(\mu) = I_c(0, -\mu)$ найдем уравнение

$$I_e(\mu) = I_e^0(\mu) + \frac{\lambda_e}{2}\int_0^1 [I_e(\mu), \mu'] \, d\mu'. \tag{20}$$

Точно такое же уравнение получается для преобразования Фурье $\tilde{I}_e(\mu, u)$ от электронной части интенсивности $I_e(0, -\mu, y) = I_e(\mu, y)$

$$\tilde{I}_e(\mu, u) = \tilde{I}_e^0(\mu, u) + \frac{\lambda_e(u)}{2}\int_0^1 [\tilde{I}_e(\mu, u), \mu'] \, d\mu', \tag{21}$$

где обозначено

$$\tilde{I}_e^0(\mu, u) = \frac{\lambda_e(u)}{\pi}\frac{\beta}{\mu}\int_0^\infty e^{-\frac{z}{\mu}} dz \int_{-\infty}^{\infty} J_L(z, x)\, dx - \frac{\lambda_e(u)}{\pi} v\left(\frac{\mu}{\beta}\right). \tag{22}$$

Входящую сюда функцию $v(z)$ при помощи (13)—(15) выразим через уже введенные величины и $i(z) = I_L(0, -z)$

$$\begin{gathered} v(z) = \frac{1}{2A}\int_0^{1/\beta} G_e\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right)[i(z), z'] \, dz' - \\ - \int_{\frac{1}{1+\beta}}^1 x\left(\frac{1}{\beta}\frac{z'}{1-z'}\right)[I_e(\beta z) + I_e(\beta z, 0), z'] \, dz'. \end{gathered} \tag{23}$$

Здесь $x(z)$ — та же функция, что и в (16). Наконец, после довольно длинных, но простых выкладок, из (15) выводим уравнение для определения $i(z)$:

$$i(z) = i^0(z) + \frac{\lambda}{2}\int_0^{1/\beta} G\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right)[i(z), z'] \, dz', \tag{24}$$

где

$$\begin{gathered} i^0(z) = I_L^0(z) + \frac{\lambda}{\lambda_e}[I_e(\beta z) - (1 - \lambda_e) I_e^0(\beta z)] + \\ + \frac{\lambda}{\pi}\int_0^\infty [\tilde{I}_e(\beta z, u) - \tilde{I}_e^0(\beta z, u)] \frac{du}{\lambda_e(u)} - \\ - \frac{\lambda}{2}\int_{\frac{1}{1+\beta}}^1 \left[1 - G_0\left(\frac{1}{\beta}\frac{z'}{1-z'}\right)\right][I_e(\beta z) + I_e(\beta z, 0), z'] \, dz'. \end{gathered} \tag{25}$$

Функции $I_c^0(\mu)$ и $I_L(z)$ в (20) и (25) определяются выражениями (6). Интенсивность излучения $I_L(0, -\mu, x)$ находится согласно формуле (13), причем

$$i_0(0, -\mu, x) = -I_c(\mu) - I_c(\mu, 0) + \frac{\beta}{\alpha(x)+\beta}\left|I_c\left(\frac{\mu\beta}{\alpha(x)+\beta}\right) + I_c\left(\frac{\mu\beta}{\alpha(x)+\beta}, 0\right)\right|. \tag{26}$$

Решать полученные уравнения можно, например, в таком порядке. Сначала (20), из которого $I_c(\mu)$ находится сразу. Затем, задав какую-либо функцию $v(z)$, находим из (21) $I_c(\mu, u)$, а по ней $I_c(\mu, 0)$. Потом вычисляем все члены в (25) и, решая (24), определяем $i(z)$. Наконец, получаем новые значения $v(z)$ по (23) и повторяем процедуру до тех пор, пока не получим точные функции $v(z)$, $i(z)$ и $I_c(\mu, 0)$. Функция $I_c(\mu, y)$ находится после этого один раз. Хотя этот процесс кажется довольно сложным, реальное его применение вполне возможно. О решении уравнений вида (20), (21) и (24) см. Приложение. Чтобы найти $I_c(\mu, 0)$, необходимо решить уравнение (21) при всех $\lambda_c(u) \leqslant \lambda_c$. Но это решение трудно получить итерациями лишь при $\lambda_c$, близких к 1, и малых $u$. Можно также воспользоваться точным выражением $\dot{I}_c(\mu, u)$ через $v(z)$ (см. Приложение). При этом возможно использование приближенных методов типа Эддингтона.

Применение описанных методов расчета будет дано в последующих статьях этой серии.

В заключение заметим, что хотя мы считали $\beta_c$, $\beta_L$, $\alpha(x)$, $r$, $\Delta\nu_c$ и $\Delta\nu$ постоянными в атмосфере, метод „разделения" рассеяний применим и в случае, когда эти величины зависят от глубины в среде.

*Приложение*

Приведем решение уравнений (20) и (24), считая функции $I_c(\mu)$ и $i(z)$ известными. Вначале кратко скажем о способах получения этих решений на примере уравнения (20). Один из способов — воспользоваться формулой В. В. Соболева

$$I_c(\mu) = \frac{4\pi}{\lambda}\int_0^\infty p(\tau, \mu)\, S_c^0(\tau)\frac{d\tau}{\mu}, \tag{27}$$

где $p(\tau, \mu)$ — вероятность выхода фотона из полубесконечной среды с глубины $\tau$ после любого числа рассеяний [11]. Подставив в (27) явное выражение для $p(\tau, \mu)$ (см., например, [15]), получим выражение $I_\varepsilon(\mu)$ через $I_\varepsilon^0(\mu)$.

Другой способ заключается в следующем. Перенесем из правой части в левую члены, пропорциональные неизвестной функции. Тогда при $I_\varepsilon(\mu)$ слева множителем будет стоять функция

$$T_\varepsilon(\mu) = 1 - \lambda_\varepsilon \mu^2 \int_0^1 \frac{d\mu'}{\mu^2 - \mu'^2} = \begin{cases} 1 - \dfrac{\lambda_\varepsilon}{2}\mu \ln \dfrac{\mu + 1}{\mu - 1}, & \mu \bar{\in} [-1, 1], \\ 1 - \dfrac{\lambda_\varepsilon}{2}\mu \ln \dfrac{1 + \mu}{1 - \mu}, & \mu \in (-1, 1). \end{cases} \tag{28}$$

Уравнение (20) можно рассматривать при всех комплексных $\mu$ из правой полуплоскости. Однако, если $0 < \mu < 1$, то при таком разбиении интегралов на два слагаемых каждое из них становится расходящимся и их надо понимать в смысле главного значения. При этих $\mu$ в (28) надо брать второе выражение для $T_\varepsilon(\mu)$. Тогда уравнение преобразуется в сингулярное с ядром типа Коши (характеристического вида). Решить такие уравнения можно методом Карлемана [16]. При этом функция $T_\varepsilon(\mu)$ при всех $0 < \lambda_\varepsilon \leqslant 1$ имеет корень $\mu = 1/k$, $0 \leqslant k < 1$, то есть

$$T_\varepsilon\left(\frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{\lambda_\varepsilon}{2k} \ln \frac{1 + k}{1 - k} = 0. \tag{29}$$

Вследствие этого у однородного сингулярного уравнения, соответствующего (20), есть ненулевое решение и, следовательно, решение неоднородного уравнения неединственно. Для преодоления неоднозначности необходимо вернуться к исходному уравнению (20) и положить в нем $\mu = 1/k$. Тогда множитель при $I_\varepsilon(\mu)$ аннулируется и с помощью получающегося соотношения можно определить коэффициент при решении однородного уравнения и найти решение, имеющее физический смысл.

Проделав указанные операции, получим, что решение (20) можно записать в двух равносильных при $0 < \mu \leqslant 1$ формах:

$$I_\varepsilon(\mu) = \varphi(\mu) \Bigg[ I_\varepsilon^0(\mu) + \frac{C}{k} \frac{I_\varepsilon^0(1/k) - k\mu I_\varepsilon^0(\mu)}{1 - k\mu} + \frac{\lambda_\varepsilon}{2} \int_0^1 \frac{R_\varepsilon(\mu')}{\varphi(\mu')} \frac{\mu I_\varepsilon^0(\mu) - \mu' I_\varepsilon^0(\mu')}{\mu - \mu'} d\mu' \Bigg], \tag{30}$$

$$I_\varepsilon(\mu) = T_\varepsilon(\mu) R_\varepsilon(\mu) I_\varepsilon^0(\mu) + \varphi(\mu) \Bigg[ \frac{C}{k} \frac{I_\varepsilon^0(1/k)}{1 - k\mu} + \frac{\lambda_\varepsilon}{2} \int_0^1 \frac{R_\varepsilon(\mu')}{\varphi(\mu')} \frac{\mu' I_\varepsilon^0(\mu')}{\mu' - \mu} d\mu' \Bigg]. \tag{31}$$

Здесь $\varphi(\mu)$ — функция Амбарцумяна [12, 15]

$$\ln \varphi(\mu) = -\frac{\mu}{\pi} \int_0^\infty \ln T_c \left(\frac{\lambda_c}{u}\right) \frac{du}{1+\mu^2 u^2}, \tag{32}$$

изученная и табулированная [1, 17],

$$R_c(\mu) = \left[ T_c^2(\mu) + \left(\frac{\lambda_c \pi}{2}\mu\right)^2 \right]^{-1}, \tag{33}$$

$$C = \left[ \frac{\lambda_c}{2} \int_0^1 \frac{\mu \varphi(\mu)\, d\mu}{(1-k\mu)^2} \right]^{-1}. \tag{34}$$

Величины $k$ и $C$ также табулированы (см., например, [1, 11, 18]). При $\mu > 1$ первое слагаемое в (30) надо заменить на $T_c^{-1}(\mu)\, I_c^0(\mu)$. При $\mu = 1/k$ необходимо раскрыть неопределенность. Решение уравнения (21) по виду совпадает с приведенным, надо лишь заменить $\lambda_c$ на $\lambda_c(u)$.

Решение уравнения (24) находится аналогично, при этом однородное уравнение решения не имеет, т. к. функция

$$\begin{aligned} T(z) &= 1 - \lambda z^2 \int_0^{1/\beta} G\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right) \frac{dz'}{z^2 - z'^2} = \\ &= 1 - \lambda A z \int_0^\infty \alpha^2(x) \ln \frac{z\,|\alpha(x)+\beta| + 1}{z\,|\alpha(x)+\beta| - 1}\, dx \end{aligned} \tag{35}$$

не обращается в нуль вне промежутка (—1/β, 1/β). На этом промежутке при вычислении $T(z)$ в (35) надо поставить под знаком логарифма знак модуля. Решение (24) представляется в таком виде:

$$i(z) = H(z) \left[ i^0(z) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{1/\beta} G\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right) \frac{R(z')}{H(z')} \frac{z i^0(z) - z' i^0(z')}{z - z'}\, dz' \right], \tag{36}$$

$$i(z) = T(z)\, R(z)\, i^0(z) + \frac{3}{2} H(z) \int_0^{1/\beta} G\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right) \frac{R(z')}{H(z')} \frac{z' i^0(z')}{z' - z}\, dz'. \tag{37}$$

Функции $H(z)$ и $R(z)$ определяются формулами [12]

$$\ln H(z) = -\frac{z}{\pi}\int_0^\infty \ln T\left(\frac{i}{u}\right)\frac{du}{1+z^2u^2}, \tag{38}$$

$$R(z) = \left| T^+(z) + \left(\frac{\lambda\pi}{2}z\right)^2 G^2\left(\frac{z}{1-\beta z}\right)\right|^{-1}. \tag{39}$$

Для фойгтовского профиля $H$-функции табулированы [19]

Ленинградский государственный
университет

## THE BROADENING OF SPECTRAL LINES BY ELECTRON SCATTERING. I. THE METHODS OF CALCULATION

D. I. NAGIRNER, V. G. VEDMICH

Two methods are proposed for calculating line profiles formed in a semiinfinite atmosphere under simultaneous action of resonance and electron scattering. Frequency redistribution is taken into account. The first method is based on the two-dimensional linear integral equation for the emergent intensity which can be solved by successive approximations when electron scattering is relatively small. The intensity of the second one is divided into three parts which correspond to continuous spectrum, electron scattering and resonance scattering. The iterations are also nesessary but in this case for the system of two coupled one-dimensional linear integral equations. In the appendix explicit expressions are given for the solutions of these equations with known free terms.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Чандрасекар.* Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
2. *F. N. Edmonds*, Ap. J., 119, 425, 1954.
3. *L. H. Auer, D. Mihalas*, Ap. J., 153, 245, 1968.
4. *D. G. Hummer, D. Mihalas*, Ap. J., 150, L57, 1967.
5. *Я. Б. Зельдович, Е. В. Левич, Р. А. Сюняев*, ЖЭТФ, 62, 1392, 1972
6. *В. Г. Ведмич*, Астрофизика, 6, 445, 1970.
7. *А. Ф. Илларионов, Р. А. Сюняев*, Астрон. ж., 51, 698, 1974.
8. *Ю. Н. Гнедин, Р. А. Сюняев*, ЖЭТФ, 65, 102, 1973.
9. *L. H. Auer, D. Mihalas*, Ap. J., 153, 923, 1968.
10. *L. H. Auer, D. van Blerkom*, Ap. J., 178, 175, 1972.

11. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГИТТЛ, М., 1956.
12. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
13. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 61, 803, 1948.
14. *T. W. Mullikin*, Ap. J., 139, 379, 1964.
15. *Э. Г. Яновицкий*, Астрон. ж., 51, 898, 1964.
16. *Ф. Трикоми*, Интегральные уравнения, ИЛ, М., 1960.
17. *D. W. N. Stibbs, R. E. Wier*, M. N., 119, 512, 1959.
18. *А. Б. Шнейвайс*, Вести. ЛГУ, № 7, 144, 1973.
19. *Д. И. Нагирнер*, Уч. зап. ЛГУ, № 385 (Труды Астрон. обс. ЛГУ, 31), 3, 1975.