

# АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

# АСТРОФИЗИКА

ТОМ 12

МАЙ, 1976

ВЫПУСК 2

## ЧАСТОТНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ ПРИ МНОГОКРАТНОМ РАССЕЯНИИ ЛИНЕЙЧАТОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В. В. ИВАНОВ, А. Б. ШНЕЙВАЛС

Поступила 19 июня 1975

Исследуется изменение спектрального состава первоначально строго монохроматического излучения в ходе многократных рассеяний. С ростом числа рассеяний, испытанных фотоном, информация о его первоначальной частоте размывается (частотная релаксация). Показано, что частотная релаксация, тесно связанная с релаксацией распределения скоростей возбужденных атомов и максвелловскому, происходит очень быстро. Этим объясняется высокая точность приближения полного перераспределения по частотам, широко используемого в теории образования спектральных линий.

1. Численные эксперименты показывают (см., в частности [1—3]), что в задачах о переносе линейчатого излучения предположение о полном перераспределении по частотам (ППЧ) является разумным приближением и тогда, когда между частотами фотона до и после рассеяния есть корреляция. В настоящей заметке показывается, что причиной этого является существование частотной релаксации, состоящей в том, что хотя при каждом рассеянии корреляция и существует, за несколько рассеяний она практически полностью размывается. Частотная релаксация, как оказывается, происходит очень быстро, в чем и состоит причина высокой точности и широкой области применимости приближения ППЧ.

2. Изменение спектрального состава излучения в пределах линии в ходе рассеяний обусловлено двумя факторами: во-первых, пространственными градиентами интенсивности (из-за влияния границ и неоднородности в распределении первичных источников в среде) и, во-вторых, собственно процессом частотной релаксации. Чтобы изучить релаксацию по частоте в чистом виде, нужно рассмотреть эволюцию при последовательных рассеяниях спектрального состава однородного и изотропного поля излучения в бесконечной среде.

Пусть  $R_n(x, x_0)dx$  — вероятность того, что фотон, имевший первоначально (в полете) частоту  $x_0$ , после  $n$  актов рассеяния в бесконечной однородной среде окажется переизлученным в интервале частот  $(x, x+dx)$ . Нормировка  $R_n$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_n(x, x_0) dx = 1. \quad (1)$$

Корреляция частот фотона до и после единичного акта взаимодействия с веществом определяется функцией  $R_1$ . Ее явный вид обусловлен многими деталями процесса рассеяния (ролью столкновений, отношением естественной ширины линии к доплеровской и т. п.), и поэтому в различных случаях оказывается разным [4, 5]. Впрочем, пока для нас конкретный вид  $R_1$  несущественен.

Очевидно, что

$$R_n(x, x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{n-m}(x, x') R_m(x', x_0) dx', \quad m \leq n, \quad (2)$$

поскольку многократное рассеяние — марковский процесс. С увеличением числа рассеяний информация о начальной частоте фотона постепенно замыкается, так что зависимость от  $x_0$  в  $R_n(x, x_0)$  при  $n \rightarrow \infty$  должна исчезать. Устремляя в (2) одновременно  $n \rightarrow \infty$  и  $m \rightarrow \infty$  и учитывая (1), получаем

$$R_n(x, x_0) = A\alpha(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где  $\alpha(x)$  — некоторая пока неизвестная функция с вытекающей из (1) нормировкой

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x) dx = 1. \quad (4)$$

В рассматриваемой задаче фигурирует единственная имеющая непосредственный физический смысл функция одной частотной переменной — коэффициент поглощения в линии. Следует ожидать, что им и будет поэтому функция  $\alpha(x)$ .

Приближение ППЧ состоит в том, что  $R_1$  берется равным  $R_1(x, x_0) = R_{-1}(x, x_0) = A\alpha(x)$ , т. е. принимается, что для того, чтобы информация о первоначальной частоте фотона полностью исчезла, достаточно одного рассеяния. Понятно, что точность и область применимости этого приближения должны определяться скоростью сходимости  $R_n$  при  $n \rightarrow \infty$  к своему пределу  $R_{-1}$ .

3. Более формальный вывод (3) можно дать, исходя из уравнения переноса

$$\begin{aligned} \omega \nabla I(r, \omega, x) = -\alpha(x) I(r, \omega, x) + \\ + \frac{i}{4\pi} \int_{-4\pi}^{4\pi} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x; \omega \omega') I(r, \omega', x') dx' + I_0(r, \omega, x), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $I(r, \omega, x)$  — интенсивность излучения в точке  $r$  в направлении  $\omega$  на частоте  $x$ ,  $r(x', x; \omega \omega')$  — функция перераспределения фотонов по частотам и направлениям,  $i$  — альбеда однократного рассеяния,  $I_0(r, \omega, x)$  — интенсивность прямого излучения первичных источников. Если расстояния измеряются в длинах свободного пробега фотона центральной частоты линии ( $x=0$ ), то  $\alpha(x)$  есть профиль коэффициента поглощения в линии с нормировкой  $\alpha(0) = 1$ . В интересующем нас однородном и изотропном поле излучения интенсивность не зависит от  $r$  и  $\omega$ . Если ее при  $I_0 = \delta(x - x_0)$  обозначить через  $I(x, x_0)$ , то (5) примет вид

$$\alpha(x) I(x, x_0) = i \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x) I(x', x_0) dx' + \delta(x - x_0), \quad (6)$$

где

$$r(x_0, x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-4\pi}^{4\pi} r(x_0, x; \omega \omega_0) d\omega_0, \quad (7)$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x_0, x) dx = \alpha(x_0). \quad (8)$$

Представим  $I$  в виде разложения

$$I(x, x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n I_n(x, x_0), \quad (9)$$

$n$ -ый член которого дает вклад в интенсивность за счет  $n$ -кратно рассеянных фотонов. Подстановка (9) в (6) дает

$$\alpha(x) I_n(x, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x) I_{n-1}(x', x_0) dx'. \quad (10)$$

Величина  $I_n(x, x_0)$  с точностью до постоянного множителя есть вероятность обнаружить в чисто рассеивающей среде среди  $n$ -кратно рассеянных фотонов фотон с частотой  $(x, x+dx)$ . Так как время, проводимое таким фотоном в пути между рассеяниями, пропорционально  $1/a(x)$ , то  $I_n(x, x_0)$  должно зависеть от  $x$  как  $R_n(x, x_0)/a(x)$ , так что  $a(x)I_n(x, x_0) = C_n(x_0)R_n(x, x_0)$ . Вводя это в (10) и интегрируя по всем  $x$ , получаем  $C_n(x_0) = C_{n-1}(x_0)$ , так что  $C_n(x_0)$  от  $n$  не зависит. При  $n=0$  мы имеем  $I_0(x, x_0) = \delta(x-x_0)$  и  $R_0(x, x_0) = \delta(x-x_0)$ , и из условия нормировки (1) таким же образом находим  $C_0(x_0) = a(x_0)$ , так что окончательно

$$a(x)I_n(x, x_0) = a(x_0)R_n(x, x_0). \quad (11)$$

Подстановка (11) в (10) дает

$$R_n(x, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x) R_{n-1}(x', x_0) \frac{dx'}{a(x')}. \quad (12)$$

При  $n=1$  отсюда следует, что

$$R_1(x, x_0) = r(x_0, x)/a(x_0), \quad (13)$$

и поэтому (12) можно переписать также в виде

$$R_n(x, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_1(x, x') R_{n-1}(x', x_0) dx'. \quad (14)$$

Мы пришли, таким образом, к соотношению (2) с  $m=1$ .

Как известно (см., например, [5—6]), функция перераспределения симметрична:  $r(x_0, x) = r(x, x_0)$ , что с учетом (13) дает  $a(x_0)R_1(x, x_0) = a(x)R_1(x_0, x)$ . Интегрируя это равенство по всем  $x_0$  и учитывая (1), получаем

$$a(x) = \int_{-\infty}^{\infty} R_1(x, x_0) a(x_0) dx_0. \quad (15)$$

Формула (15) показывает, что существует стационарное распределение фотонов по частотам, не меняющееся при рассеяниях. С точностью до постоянного множителя оно дается функцией  $a(x)$ . Согласно общим свойствам марковских процессов можно утверждать, что функция  $R_n(x, x_0)$  должна тогда при  $n \rightarrow \infty$  становиться пропорциональной  $a(x)$ , т. е. должно выполняться (3).

4. Существование описываемой (3) частотной релаксации не зависит от вида  $R_1$ , однако для оценки ее скорости конкретизация формы  $R_1$  необходима.

Рассмотрим случай, когда в системе покоя атома частота при рассеянии сохраняется, а естественной шириной линии можно пренебречь по сравнению с доплеровской. Если кроме того принять, что рассеяние изотропно (случай I—A по терминологии [5]), то

$$R_1(x, x_0) = e^{-x^2} \int_{|x|}^{\infty} e^{-t^2} dt, \quad |x| = \max(|x|, |x_0|). \quad (16)$$

Согласно [7],

$$R_1(x, x_0) = \pi^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} [2^{2k} (2k+1)!]^{-1} e^{-x^2} H_{2k}(x) H_{2k}(x_0), \quad (17)$$

где  $H_i(x)$  — полиномы Эрмита:

$$H_i(x) = (-1)^i e^{x^2} \frac{d^i}{dx^i} e^{-x^2}.$$

При таком  $R_1$  для  $R_n$  легко получить разложение, обобщающее (17). Пользуясь ортогональностью полиномов Эрмита, из (2) находим

$$R_n(x, x_0) = \pi^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} [2^{2k} (2k+1)^n (2k)!]^{-1} e^{-x^2} H_{2k}(x) H_{2k}(x_0). \quad (18)$$

и, в частности, в согласии с (3),  $R_n(x, x_0) \rightarrow \pi^{-1/2} e^{-x^2}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Приближение ППЧ в рассматриваемом случае эквивалентно отбрасыванию в (17) всех членов с  $k > 0$ . Как видно из (18), с ростом  $n$  вклад членов с  $k \neq 0$  убывает очень быстро (экспоненциально по  $n$ ). Наглядное представление о скорости описываемого (18) процесса частотной релаксации дает рис. 1. На нем показано изменение  $R_n(x, x_0)$  с ростом  $n$  для трех значений  $x$  (указанных у кривых) и  $x_0 = 0$  и 1. На рис. 2—4 приведены графики  $R_n(x, x_0)$  в функции  $x$  для трех значений  $x_0$  ( $x_0 = 0; 1$  и 2). При  $n > 2$  для  $x_0 = 0$  и 1 и при  $n > 3$  для  $x_0 = 2$  в масштабе рисунков кривые  $R_n$  практически сливаются с предельной кривой  $\pi^{-1/2} e^{-x^2}$ , соответствующей  $n = \infty$ .

Из рис. 2—4 видно, что в пределах доплеровского ядра линии частотная релаксация успевает сработать всего за два-три рассеяния. Поэтому когда размеры области, занятой газом, превосходят несколько длин пробега фотона центра линии, приближение ППЧ должно давать хорошую точ-

ность. Так как частотная релаксация происходит столь быстро, точность можно существенно повысить, если решение уравнения переноса, полученное в приближении ППЧ, один раз проинтерполировать с использованием «точ-

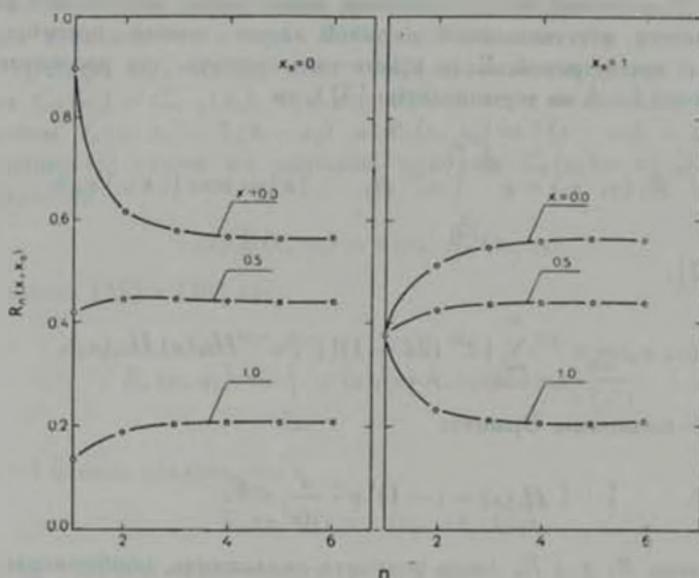


Рис. 1.

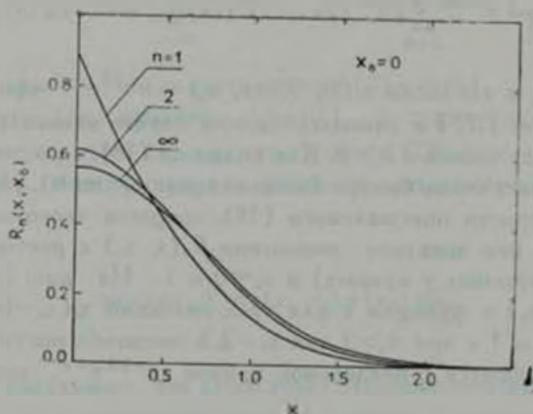


Рис. 2.

ной» функции перераспределения (16) — факт, обнаруженный эмпирически в численных экспериментах [3].

При нулевой естественной ширине линии частота фотона однозначно определяется проекцией скорости излучившего его атома на луч зрения.

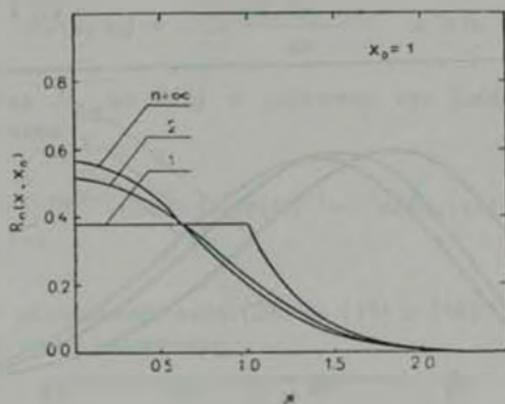


Рис. 3.

Стремление  $R_n$  к  $\frac{1}{2}e^{-x^2}$  означает поэтому, что распределение скоростей тех атомов, которые возбуждены  $n$ -кратно рассеянными фотонами,  $n$

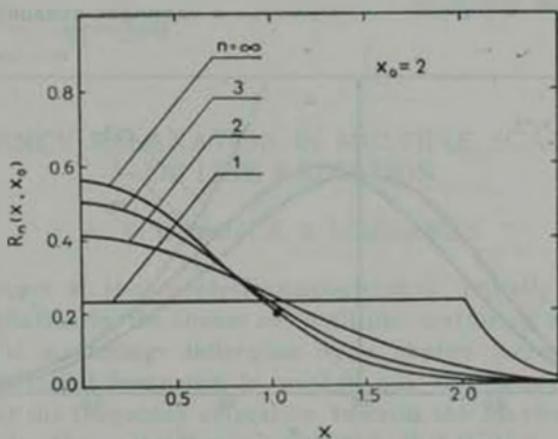


Рис. 4.

ростом  $n$  приближается к максвелловскому. У атомов, возбужденных первичным строго монохроматическим излучением частоты  $x_0$ , оно совершенно не похоже на максвелловское — атомов со скоростями  $v < v_{1A} |x_0|$ , где  $v_{1A}$  —

тепловая скорость, нет вовсе, и т. п. (подробнее см. [6], § 1.5). Рассмотрим релаксацию распределения скоростей возбужденных атомов немного подробнее.

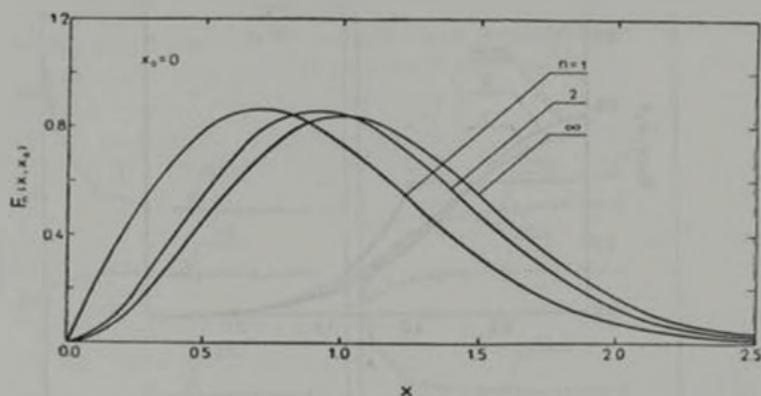


Рис. 5.

Функция  $R_n(x, x_0)$  есть функция распределения проекций на произвольную ось скоростей атомов, которые возбуждены фотонами, испытавшими  $n-1$  рассеяние (скорости  $x$  измеряются в единицах тепловой скорости).

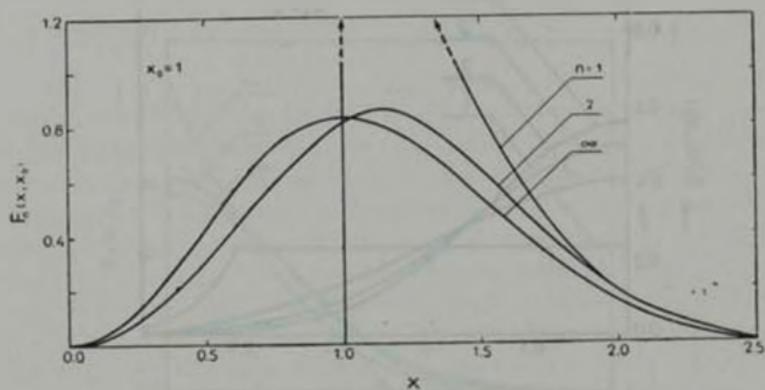


Рис. 6.

$\lambda$  — безразмерная частота излучения, первично возбуждавшего атомы). Обозначим через  $F_n(x, x_0)$  функцию распределения абсолютных значений скорости таких атомов. Связь между функцией распределения  $R_n(x, x_0)$  проекции случайно ориентированного вектора скорости атомов с функцией

распределения  $f_n(x, x_0)$  длины этого вектора дается следующим общим соотношением ([8], гл. I, § 10):

$$F_n(x, x_0) = -2x \frac{dR_n(x, x_0)}{dx}, \quad x > 0. \quad (19)$$

Подставляя сюда  $R_n$  из (18) и учитывая, что  $2xH_1(x) - H_1(x) = H_0(x)$ , получаем

$$F_n(x, x_0) = \pi^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} [2^{2k-1} (2k-1)! (2k)!]^{-1} e^{-x^2} x H_{2k+1}(x) H_{2k}(x_0), \quad (20)$$

$$x \geq 0.$$

Для  $F_1$  наряду с разложением вида (20) из (19) и (16) легко получить также следующее явное выражение:

$$F_1(x, x_0) = \begin{cases} 0, & x < |x_0|, \\ 2xe^{x_0^2 - x^2}, & x > |x_0|. \end{cases} \quad (21)$$

Результаты расчетов  $F_n$  иллюстрируются рис. 5 и 6. Видно, как с ростом  $n$  распределение скоростей возбужденных атомов быстро релаксирует к максвелловскому.

Ленинградский государственный  
университет

## FREQUENCY RELAXATION IN MULTIPLE SCATTERING OF LINE RADIATION

V. V. IVANOV, A. B. SCHNEEWEIS

The changes of the spectral composition of initially exactly monochromatic radiation in the course of multiple scattering are studied. As the number of scatterings undergone by a photon increases, the information on its initial frequency is washed out (frequency relaxation). It is shown that the frequency relaxation towards the Maxwellian is intimately related to the relaxation of velocity distribution of that of the excited atoms. It is a very fast process. This is the reason of the high accuracy of approximation of complete frequency redistribution widely used in the theory of spectral line formation.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГТТИ, М., 1956.
2. A. G. Hearn, Proc. Phys. Soc., 84, 11, 1964.
3. D. G. Hummer, M. N., 145, 95, 1969.
4. J. T. Jefferies, Spectral Line Formation, Blaisdell Publ. Co., Waltham, Mass., 1968.
5. D. G. Hummer, M. N., 125, 21, 1962.
6. В. И. Иванов, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
7. W. Unno, Ap. J., 129, 388, 1959.
8. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. II, Мир, М., 1967.