АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 12 ФЕВРАЛЬ, 1976 ВЫПУСК 1

ПЕРЕНОС МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ В ОБОЛОЧКАХ ЗВЕЗД МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

В. Н. МОРОЗОВ

Поступила 16 декабря 1974
Пересмотрена 14 апреля 1975

Получено уравнение для переноса момента количества движения в сферической оболочке в случае бессилового полоидального магнитного поля. Вычисляется тороидальная составляющая напряженности магнитного поля для сферической и цилиндрической оболочек, покоящихся в начальный момент времени. Исследуется случай сферической оболочки с радиальным магнитным полем и постоянной альвеновской скоростью соответствующей этому полю, которая вращается в начальный момент времени в соответствии с законом: $\Omega \sim r^{-2}$. Показано, что расчет тороидальной составляющей магнитного поля необходимо проводить совместно с уравнением для изменения угловой скорости вращения.

В работе [1] была решена задача о переносе момента количества движения от звезды в оболочку для простых случаев конфигураций полоидального магнитного поля:

1) в сферической системе координат: $H_p = (H_r, 0)$, $H_r \sim r^{-2}$;
2) в цилиндрической системе координат: $H_p = (H_r, 0)$, $H_r \sim r^{-1}$.

В настоящей работе получено уравнение переноса момента вращения в сферической оболочке для бессилового полоидального магнитного поля. На основе полученных решений в [1], описывающих изменение угловой скорости вращения в оболочке со временем, оценивается тороидальная составляющая магнитного поля вблизи поверхности звезды для случаев сферической и цилиндрической оболочек и вычисляется для сферической оболочки с постоянной альвеновской скоростью, соответствующей радиальной составляющей напряженности магнитного поля. В последнем случае рассматривается также решение уравнения переноса момента количества движения; в предположении, что вещество оболочки в момент времени $t=0$

вращается в соответствии с законом $\Omega \sim r^{-2}$, вычисляется тороидальная составляющая поля в оболочке. Показано, что при расчете торогенерации тороидальной составляющей необходимо привлекать уравнение для изменения угловой скорости вращения.

1. *Перенос момента количества движения в оболочке при наличии бессилового полоидального магнитного поля.* Рассмотрим вращающуюся звезду и окружающую ее плазменную оболочку с вмороженным магнитным полем. Будем предполагать, что оболочка имеет осевую симметрию. Напишем уравнения магнитной гидродинамики идеально-проводящей жидкости в сферической системе координат с центром в начале звезды, считая, что поле скоростей в оболочке: $\vec{v} = (0, 0, \Omega r \sin\theta)$, где Ω — угловая скорость вращения вещества в оболочке, а напряженность магнитного поля $\vec{H} = (H_r, H_\theta, H_\varphi)$. Считая поле по H_r и H_θ бессиловым и пренебрегая в проекциях гидродинамического уравнения на r и θ членами, содержащими Ω и H_φ, получим систему уравнений:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} = -\frac{GM}{r^2}, \tag{1}$$

$$r\sin\theta\,\frac{\partial\Omega}{\partial t} = \frac{H_\theta}{4\pi\rho}\left(\frac{H_\varphi}{r\,\mathrm{tg}\,\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{H_r}{4\pi\rho}\left(\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = r\sin\theta\, H_r\,\frac{\partial\Omega}{\partial r} + H_\theta\sin\theta\,\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 H_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, H_\theta) = 0, \tag{4}$$

Будем полагать, что давление в оболочке p и плотность вещества ρ связаны между собой политропным законом:

$$p = K\rho^\gamma \tag{5}$$

Интегрируя (1) и считая, что $((GM)/r_0)\cdot((\gamma-1)/(\gamma K\rho_0^{\gamma-1})) = 1$, получим следующий закон изменения ρ в оболочке:

$$\rho = \rho_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^k, \tag{6}$$

где $k = 1/(\gamma - 1)$, r_0 — радиус звезды, ρ_0 — плотность вещества вблизи поверхности звезды.

Дифференцируя (2) по t и пользуясь (3) и (6), найдем следующее уравнение для угловой скорости вращения в оболочке:

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} = a_1^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2} + \frac{a_{12}^2}{r}\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial\theta} + \frac{a_2^2}{r^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\theta^2} + \frac{b}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r} + \frac{c}{r^2}\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}, \tag{7}$$

где

$$a_1^2 = \frac{H_r^2}{4\pi\rho_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^k, \quad a_{12}^2 = \frac{2H_rH_\theta}{4\pi\rho_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^k, \quad a_2^2 = \frac{H_\theta^2}{4\pi\rho_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^k,$$

$$b = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{r}{r_0}\right)^k\left(\frac{2H_rH_\theta}{4\pi\rho_0}\cos\theta + \frac{H_\theta}{4\pi\rho_0}\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\sin\theta + \frac{2H_r^2}{4\pi\rho_0}\sin\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{H_r}{4\pi\rho_0}\frac{\partial H_r}{\partial r}r\sin\theta\right),$$

$$c = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{r}{r_0}\right)^k\left(\frac{2H_\theta^2}{4\pi\rho_0}\cos\theta + \frac{H_\theta}{4\pi\rho_0}\frac{\partial H_\theta}{\partial\theta}\sin\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{H_r}{4\pi\rho_0}\frac{\partial H_\theta}{\partial\theta}\sin\theta + \frac{H_rH_\theta}{4\pi\rho_0}\sin\theta\right).$$

Задача о переносе момента вращения от звезды в оболочку сводится к решению уравнения (7) при следующих начальных и граничных условиях:

$$\Omega|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \quad r > r_0, \quad \Omega|_{r=r_0} = \Omega_0, \quad \Omega \to 0 \quad r \to \infty. \tag{8}$$

Второе условие в (8) выражает отсутствие в начальный момент времени силы, действующей со стороны магнитного поля на вещество оболочки в азимутальном направлении. Фиксирование угловой скорости вращения звезды означает, что изменение момента вращения вследствие передачи его оболочке мало. В общем случае: $\Omega|_{r=r_0} = \Omega(t)$. Можно не ограничиваться случаем бессилового поля в оболочке, а рассмотреть произвольное полоидальное магнитное поле. Тогда распределение плотности вещества в ней описывается более сложным законом. Но, как будет видно из дальнейшего, качественные выводы относительно передачи момента вращения остаются теми же. Уравнение, аналогичное уравнению (7), можно получить и в цилиндрической системе координат.

Рассмотрим в качестве примера оболочку с вмороженным дипольным магнитным полем. Тогда для составляющих H_r и H_θ имеет место представление [2]:

$$H_r = 2H_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\cos\theta, \qquad H_\theta = -H_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\sin\theta, \tag{9}$$

где H — напряженность магнитного поля на поверхности звезды.

Пользуясь (9), получим для a_1^2, a_{12}^2, a_2^2, b, c следующие выражения:

$$a_1^2 = 4a_{01}^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6-k}\cos\theta, \qquad a_{12}^2 = -a_{01}^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6-k}\sin 2\theta,$$

$$a_2^2 = a_{01}^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6-k}\sin^2\theta,$$

$$b = -2a_{01}^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6-k}\cos 2\theta, \qquad c = a_{01}^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6-k}(\sin\theta\cos\theta - 2\cos^2\theta) \tag{10}$$

где

$$a_{01}^2 = \frac{H_*^2}{4\pi\rho_1}.$$

Еще раз преобразуем уравнение (7) и его коэффициенты (10). Для этого воспользуемся тем, что процесс передачи момента вращения от звезды в данное место оболочки определяется напряженностью магнитного поля вдоль силовой линии, идущей от поверхности звезды и проходящей через выбранную точку оболочки. Исключим из этого уравнения зависимость от θ, воспользовавшись уравнением силовой линии дипольного магнитного поля в сферической системе координат [2]:

$$r = r_* \sin^2\theta, \tag{11}$$

где $r_* = r_0/\sin^2\theta_0$.

Используя (11) и переходя от переменной θ к r, получим следующее уравнение, описывающее изменение угловой скорости вращения Ω вдоль силовой линии:

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} = a_{01}^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6-k}\left(1 - \frac{r}{r_0}\sin^2\theta_0\right)\times$$
$$\times\left\{\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\, 2\left[1 - \frac{2\left(1 - \frac{r}{r_0}\sin^2\theta_0\right)^{1/2}}{\left(\frac{r}{r_0}\sin^2\theta_0\right)^{1/2}}\right]\right\}, \tag{12}$$

где $r/r_0\sin^2\theta_0 \leqslant 1$.

Уравнение (12) вместе с условиями (8) определяет процесс передачи момента количества движения от звезды в данное место оболочки вдоль силовых линий дипольного магнитного поля.

Однако результаты, полученные в [1], позволяют сделать выводы о том, что процесс передачи характеризуется величиной:

$$t_0 = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{a_{Ap}}, \tag{13}$$

где ds—элемент длины силовой линии, a_{Ap} — альвеновская скорость, соответствующая полоидальной составляющей магнитного поля.

В случае сферической оболочки с квазирадиальным магнитным полем ds заменяется на dr. Для дипольного магнитного поля ds и a_{Ap} равны:

$$\begin{gathered} ds^2 = dr^2 + r^2 (d\theta)^2 = \frac{(4 - 3r/r_0 \sin^2\theta_0)}{4(1 - r/r_0 \sin^2\theta_0)}\, dr, \\ a_{Ap} = a_{01}^2 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{6-k}{2}} \left(4 - 3\frac{r}{r_0}\sin^2\theta_0\right)^{1/2}. \end{gathered} \tag{14}$$

Используя (14), имеем для t_0:

$$t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{6-k}{2}} dr}{2a_{01}\left(1 - \frac{r}{r_e}\right)^{1/2}}. \tag{15}$$

Для астрофизических приложений не обязательно решать уравнение (12), а достаточно использовать для оценки времени передачи момента вращения формулу (13).

2. Нахождение тороидальной составляющей магнитного поля H_φ для сферической оболочки. Как показано в [1], изменение угловой скорости вращения со временем в сферической оболочке с радиальным магнитным полем дается следующим выражением:

$$\begin{gathered} \Omega(r, t) = \Omega_0 - \frac{2}{\pi}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{1/2} \Omega_0 \int_0^{\infty} \frac{\cos\lambda \frac{t}{t_0}}{\lambda} \times \\ \times \frac{Y_{\frac{1}{2n}}\left[\frac{\lambda}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\right] J_{\frac{1}{2n}}\left(\frac{\lambda}{n}\right) - Y_{\frac{1}{2n}}\left(\frac{\lambda}{n}\right) J_{\frac{1}{2n}}\left[\frac{\lambda}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\right] d\lambda}{J^2_{\frac{1}{2n}}\left(\frac{\lambda}{n}\right) + Y^2_{\frac{1}{2n}}\left(\frac{\lambda}{n}\right)}, \end{gathered} \tag{16}$$

где $t_0 = \frac{r_0}{H_r}\sqrt{4\pi\rho_0}$, $J_{\frac{1}{2n}}$, $Y_{\frac{1}{2n}}$ — Бесселевы функции 1-го и 2-го родов,

$$n = \frac{6-k}{2}.$$

Выражение (16) получено в предположении, что в момент времени $t = 0$ оболочка покоится.

При вычислении H_θ будем исходить из уравнения (3). Полагая в нем $H_\theta = 0$, интегрируя его по t, в предположении $H_\theta(r, 0) = 0$, получим:

$$H_\theta(r, t) = H_r r \sin\theta \int_0^t \frac{\partial\Omega}{\partial r}\, dt. \tag{17}$$

Дифференцируя (16) по r, подставляя $\partial\Omega/\partial r$ в выражение (17) и меняя порядок интегрирования, имеем для H_θ:

$$\begin{aligned} H_\theta(r, t) = &-\frac{1}{\pi} H_r \Omega_0 t_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{1/2} \sin\theta \int_0^\infty \frac{\sin\lambda\frac{t}{t_0}}{\lambda} \times \\ &\times \frac{Y_{\frac{1}{2n}}\left[\frac{\lambda}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\right] J_{\frac{1}{2n}}\left(\frac{\lambda}{n}\right) - Y_{\frac{1}{2n}}\left(\frac{\lambda}{n}\right) J_{\frac{1}{2n}}\left[\frac{\lambda}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\right]}{J^2_{\frac{1}{2n}}\left(\frac{\lambda}{n}\right) + Y^2_{\frac{1}{2n}}\left(\frac{\lambda}{n}\right)} d\lambda - \\ &-\frac{2}{\pi} H_r \Omega_0 t_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n+\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{\sin\lambda\frac{t}{t_0}}{\lambda} \times \\ &\times \frac{Y'_{\frac{1}{2n}}\left[\frac{\lambda}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\right] J_{\frac{1}{2n}}\left(\frac{\lambda}{n}\right) - Y_{\frac{1}{2n}}\left(\frac{\lambda}{n}\right) J'_{\frac{1}{2n}}\left[\frac{\lambda}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\right]}{J^2_{\frac{1}{2n}}\left(\frac{\lambda}{n}\right) + J^2_{\frac{1}{2n}}\left(\frac{\lambda}{n}\right)} d\lambda \end{aligned} \tag{18}$$

Вычислим выражение (18) при $n = 1$. В этом случае для H_φ найдем:

$$H_\varphi(r, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \dfrac{r - r_0}{a_0} \\ -H_r \sin\vartheta\, \Omega_0 t_0 \left(\dfrac{r}{r_0}\right) & \text{при } t > \dfrac{r - r_0}{a_0}, \end{cases} \tag{19}$$

где $a_0 = \dfrac{H_r^0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$.

Приведем решение (19) к другому виду, воспользовавшись тем, что $H_r = H_r^0\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^2$ и $t_0 = \dfrac{r_0}{H_r^0}\sqrt{4\pi\rho_0}$. Подставляя эти соотношения в (19), имеем:

$$H_\varphi(r, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \dfrac{r - r_0}{a_0} \\ -v^0 \sqrt{4\pi\rho_0}\left(\dfrac{r_0}{r}\right) \sin\vartheta & \text{при } t > \dfrac{r - r_0}{a_0}, \end{cases} \tag{20}$$

где $v^0 = \Omega_0 r_0$.

Выражение (20) показывает, что величина тороидальной составляющей напряженности магнитного поля определяется вращением звезды.

В случае переменной альвеновской скорости в оболочке интегралы, стоящие в правой части (18), не выражаются через элементарные функции. Исследуем (18) вблизи поверхности звезды, т. е. при $r = r_0$. Тогда получим для H_φ:

$$H_\varphi^0(r_0, t) = -\frac{2}{\pi} H_r^0 \Omega_0 t_0 \sin\vartheta \int_0^\infty \frac{\sin\lambda \dfrac{t}{t_0}}{\lambda} \times$$
$$\times \frac{Y'_{\frac{1}{2n}}\left(\frac{\lambda}{n}\right) J_{\frac{1}{2n}}\left(\frac{\lambda}{n}\right) - Y_{\frac{1}{2n}}\left(\frac{\lambda}{n}\right) J'_{\frac{1}{2n}}\left(\frac{\lambda}{n}\right)}{J^2_{\frac{1}{2n}}\left(\frac{\lambda}{n}\right) + Y^2_{\frac{1}{2n}}\left(\frac{\lambda}{n}\right)}\, d\lambda \tag{21}$$

Переходя в (21) к пределу под знаком интеграла при $t/t_0 \to \infty$ и пользуясь выражениями для $J_{1/2n}$ и $Y_{1/2n}$ при малых значениях аргумента (3), придем к следующему представлению для H_φ^0 при $t/t_0 \gg 1$:

$$H_\varphi^0 \approx -\frac{4n}{\Gamma^2\left(\frac{1}{2n}\right)\sqrt{\pi}} H_r \Omega_0 t_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1-\frac{1}{n}} \sin\theta, \tag{22}$$

где $\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)$ — гамма-функция.

Используя выражение для t_0, найдем, что:

$$H_\varphi^0 \approx -\frac{4n}{\Gamma^2\left(\frac{1}{2n}\right)\sqrt{\pi}} v_a^0 \sqrt{r t_0} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1-\frac{1}{n}} \sin\theta. \tag{23}$$

Возрастание H_φ^0 со временем в данном случае связано с тем, что угловая скорость вращения в оболочке возрастает непрерывно [1], в то время, как в случае постоянной альвеновской скорости Ω возрастает скачком. Верхняя граница для t в (22) определяется размером оболочки и равна времени прохождения альвеновской волны через нее.

3. Оценка тороидальной составляющей магнитного поля H_φ для цилиндрической оболочки с $H_r \sim r^{-k}$. В работе [1] была получена для цилиндрической оболочки с $H_r \sim r^{-k}$ и $H_\varphi = 0$, покоящейся в момент времени $t=0$ следующая формула, которая описывает изменение Ω со временем:

$$\Omega(r, t) = \Omega_0 - \frac{2}{\pi}\Omega_0 \int\limits_0^\infty \frac{\cos\lambda\frac{t}{t_0}}{\lambda} \times$$

$$\times \frac{Y_0\left[\frac{\lambda}{m}\left(\frac{r}{r_0}\right)^m\right] J_0\left(\frac{\lambda}{m}\right) - Y_0\left(\frac{\lambda}{m}\right) J_0\left[\frac{\lambda}{m}\left(\frac{r}{r_0}\right)^m\right]}{J_0^2\left(\frac{\lambda}{m}\right) + Y_0^2\left(\frac{\lambda}{m}\right)}\, d\lambda, \tag{24}$$

где $m = \frac{4-k}{2}$.

Тороидальная составляющая поля H_φ при $H_\varphi(r, 0) = 0$ имеет вид:

$$H_\varphi(r, t) = rH_r \int\limits_0^t \frac{\partial\Omega}{\partial r}\, dt. \tag{25}$$

Вычисляя производную $\partial\Omega/\partial r$ с помощью (24), подставляя ее в (25) и меняя порядок интегрирования, получим следующее представление для H_φ:

$$H_\varphi = -\frac{2}{\pi} H_r \Omega_0 t_0 r \int\limits_0^\infty \frac{\dfrac{\sin \lambda \dfrac{t}{t_0}}{\lambda^2} \dfrac{d}{dr} \varphi_\lambda \left[\dfrac{1}{m} \left(\dfrac{r}{r_0} \right)^m \right] d\lambda}{J_0^2\left(\dfrac{\lambda}{m}\right) + Y_0^2\left(\dfrac{\lambda}{m}\right)} . \tag{26}$$

Функция $d\varphi_\lambda/dr$ определяется выражением:

$$\frac{d\varphi_\lambda}{dr} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^m \frac{\lambda}{m} \left\{ Y_0' \left[\frac{\lambda}{m} \left(\frac{r}{r_0}\right)^m \right] J_0\left(\frac{\lambda}{m}\right) - Y_0\left(\frac{\lambda}{m}\right) J_0' \left[\frac{\lambda}{m} \left(\frac{r}{r_0}\right)^m \right] \right\} \tag{27}$$

Рассмотрим (26) вблизи поверхности звезды. Подставляя (27) в (26) и производя замену переменных $z = \lambda (t/t_0)$, придем к следующему выражению для H_φ^0:

$$H_\varphi^0 = -\frac{4m}{\pi^2} H_r^0 \Omega_0 t \int\limits_0^\infty \frac{\sin z}{z^2} \frac{dz}{J_0^2\left(\dfrac{t_0}{t} \dfrac{z}{m}\right) + Y_0^2\left(\dfrac{t_0}{t} \dfrac{z}{m}\right)} . \tag{28}$$

Оценим H_φ^0 при больших t/t_0. Для этого разобьем интеграл в (28) на два: $\int\limits_0^\infty = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^\infty$. При $t/t_0 \gg 1$, переходя в интеграле к пределу при $t/t_0 \to \infty$, получим для него представление:

$$H_\varphi^0 \simeq -0.5\, m H_r^0 \Omega_0 \frac{t}{\ln^2 \dfrac{2mt}{\gamma_1 t_0}} . \tag{29}$$

где γ_1 — постоянная Эйлера ($\gamma_1 = 0.5772\ldots$).

Из выражения (29) следует, что в процессе передачи момента вращения от звезды в оболочку H_φ^0 возрастает. Предельная величина тороидальной составляющей напряженности магнитного поля вблизи поверхности звезды определяется временем прохождения альвеновской волны через оболочку.

4. Генерация тороидальной составляющей магнитного поля в сферической вращающейся оболочке. При $\vec{H} = (H_r,\ 0,\ H_\varphi)$ и $k=4$, уравнение (7) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} . \tag{30}$$

Рассмотрим решение этого уравнения при следующих начальных и граничных условиях:

$$\Omega\big|_{t=0} = \Omega_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^2, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad \Omega\big|_{r=r_0} = \Omega_0. \tag{31}$$

Произведем в (30) замену переменных: $r_1 = r - r_0$. Это преобразование не меняет уравнения (30), а условия (31) принимают следующий вид:

$$\Omega\big|_{t=0} = \Omega_0\left(\frac{r_0}{r_0 + r_1}\right)^2, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad \Omega\big|_{r_1=0} = \Omega_0. \tag{32}$$

Решение уравнения (30) при условиях (32) можно написать сразу [4]:

$$\Omega(r, t) = \Omega_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \frac{1 + \dfrac{a_0^2t^2}{r^2}}{\left(1 - \dfrac{a_0^2t^2}{r^2}\right)^2} \quad \text{при} \quad t < \frac{r - r_0}{a_0}, \tag{33}$$

$$\Omega(r, t) = \Omega_0\left[1 - \frac{r_0^2}{(r + a_0t)^2} + \frac{r_0^2}{(a_0t - r + 2r_0)^2}\right] \quad \text{при} \quad t > \frac{r - r_0}{a_0}. \tag{34}$$

Второй и третий члены в правой части выражения (34) при $t \to \infty$ стремятся к 0, поэтому $\Omega \to \Omega_0$.

Обратимся теперь к задаче о генерации тороидальной составляющей магнитного поля дифференциальным вращением оболочки. Обычно предполагается [5], магнитное поле не влияет на вращение и в уравнение (17) подставляют следующий закон вращения среды: $\Omega = \Omega_0(r_0/r)^2$. Решение (33) показывает, что так можно делать только при $t \ll (r/a_0)$. В общем случае для нахождения H_φ необходимо использовать решения (33) и (34).

Вычислим H_φ при $t < (r - r_0)/a_0$. Дифференцируя (33) по r и подставляя $(\partial\Omega/\partial r)$ в (17), получим для H_φ

$$H_\varphi = -2H_r \sin\theta\,\Omega(r, 0)\int_0^t \frac{1 + 3\dfrac{a_0^2t^2}{r^2}}{\left(1 - \dfrac{a_0^2t^2}{r^2}\right)^3}\,dt \tag{35}$$

где $t < \dfrac{r - r_0}{a_0}$.

Вычисляя интеграл, стоящий в правой части (35), найдем, что:

$$H_\varphi = -2H_r \sin\theta\,\Omega(r, 0)\frac{t}{\left(1 - \dfrac{a_0^2t^2}{r^2}\right)^2}. \tag{36}$$

Формула (36) показывает, что при $t \ll (r/a_0)$ она не отличается от выражения $H_\varphi = -2H_r\Omega(r, 0)\, t \sin\theta$, которое обычно используется при оценке величины цороидальной составляющей магнитного поля [5], но когда величина $(a_0^2 t^2)/r^2$ близка к единице, приведенное выражение и соотношение (36) могут различаться на порядок величины.

Величина $t_* = (r - r_0)/a_0$ является верхней временной границей, в пределах которой справедливо (36). При $t > t_*$ на оболочку начинает влиять присутствие вращающейся звезды и H_φ вычисляется с использованием выражений (34) и (20). Поскольку вычисления довольно просты, то приведем окончательное выражение для H_φ при $t \gg (r/a_0) \gg t_*$. Оно имеет следующий вид:

$$H_\varphi \approx -H_r \sin\theta\, \Omega_0 t_0 \frac{r}{r_0} - 2H_r \sin\theta \frac{\Omega(r, 0)\, t_*}{\left(1 - \dfrac{a_0^2 t^2}{r^2}\right)^2} - \tag{37}$$

$$- H_r \sin\theta\, \Omega(r, 0) \frac{r}{a_0}\left[\frac{1}{\left(1 + \dfrac{a_0 t_*}{r}\right)^2} + \frac{1}{\left(\dfrac{a_0 t_*}{r} - 1 + 2\dfrac{r_0}{r}\right)^2}\right].$$

5. *Обсуждение результатов и их применение.* В работе [1] полученные оценки для времени передачи момента вращения от звезды оболочке магнитным полем использовались для интерпретации сброса оболочки у звезды типа Be—γ Кассиопеи. Предполагалось, что время между появлением и исчезновением оболочки определяется характерным временем передачи момента вращения. Это дает возможность оценить магнитное поле вблизи поверхности звезды. Оценки проводились для случаев, когда полоидальное магнитное поле в оболочке меняется как $r^{-\nu}$, где $\nu = 1.2$. Оценим напряженность дипольного магнитного поля вблизи поверхности звезды, пользуясь формулой [15] при $k = 4$, значению которого соответствует $\gamma = 5/4$. Характерное время t_* при заданном внешнем радиусе оболочки находится из условия: $r_{об} = r_*$. Вычисляя [15], найдем:

$$t_* = \frac{r_{об}}{a_0}\left(\frac{r_{об}}{r_0}\right)\left(1 - \frac{r_0}{r_{об}}\right)^{1/2} \frac{1}{3}\left(2 + \frac{r_0}{r_{об}}\right) \tag{38}$$

Полагая $t_* \sim 10^7$ *сек*, $r_{об} \sim 10\, r_0$, $r_0 = 7 \cdot 10^{11}$ *см*, $\rho_0 \sim 10^{-12}$ *г/см*^{3}, получим, что $H_0 \sim 10$ *гс*.

Для полного исследования динамики оболочки звезды типа Be в магнитном поле этих оценок недостаточно. Необходимо в систему уравнений магнитной гидродинамики включить центробежную силу и силу магнитного поля $\dfrac{H_\varphi}{4\pi\rho}\dfrac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)$, как это было сделано в работе [6], посвященной динамике сброса оболочки у Сверхновой.

Выражения (20), (23), (29), (36) для $H_\cdot$ получены в результате совместного рассмотрения процессов передачи момента вращения и генерации тороидальной составляющей магнитного поля дифференциальным вращением оболочки. Обычно при исследовании генерации магнитного поля ограничиваются заданием поля скоростей в среде. Динамические эффекты, связанные с влиянием магнитного поля на поле скоростей не учитываются, так как задача становится сложной. В настоящей работе решена задача, в которой учитывается влияние генерируемого тороидального магнитного поля на угловую скорость вращения среды. Полученные результаты отличны от обычных [5], что нашло отражение, например, в формуле (36). Действительно при

$$t = t_* = \frac{r - r_0}{a_0}, \qquad 1 - \frac{a_*^2 t^2}{r^2} = \left(2 - \frac{r_0}{r}\right)\left(\frac{r_0}{r}\right) \text{ и при } \frac{r_0}{r} \ll 1$$

тороидальная составляющая $H_\cdot$ может достигать больших величин. Это обстоятельство может оказаться важным при исследовании проблемы возникновения магнитного поля в Галактике, в звездах, на Солнце.

Ухтинский индустриальный
институт

TRANSFER OF ROTATIONAL MOMENTUM IN STELLAR ENVELOPES BY MAGNETIC FIELD

V. N. MOROZOV

The equation of transfer of rotational momentum in a spherical envelope for a force-free poloidal magnetic field is derived. The toroidal component of the strength of magnetic field for spherical and cylindrical envelopes being equilibrium at the initial moment is calculated. The example of spherical envelope with radial component and its constant alfven velocity rotating in accordance with the law: $\Omega \sim r^{-2}$ is investigated. The calculation of the toroidal component of the magnetic field is shown to be made necessarily together with the equation describing the change of the angular velocity of rotation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Н. Морозов*, Астрофизика, 9, 567, 1973.
2. *Г. Альвен, К.-Г. Фельтхаммер*, Космическая электродинамика, Мир, М., 1967.
3. *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Наука, М., 1971.
4. *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский*, Уравнения математической физики, Наука, М., 1966.
5. *С. Б. Пикельнер*, Основы космической электродинамики, Наука, М., 1966.
6. *Г. С. Бисноватый-Коган, Ю. П. Попов, А. А. Самохин*, Препринт № 16, ИПМ АН СССР, 1975.