

# АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

## АСТРОФИЗИКА

ТОМ 11

НОЯБРЬ, 1975

ВЫПУСК 4

### ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ПЛОСКОГО ОДНОРОДНОГО СЛОЯ

Р. М. АВАКЯН, Я. ГОРСКИН

Поступила 9 декабря 1974

Исследовано гравитационное поле, создаваемое плоским однородным слоем. Внутри конфигурации найдены компоненты метрического тензора и распределение давления. Произведена связь с внешним решением Тауба. Для малых центральных давлений найдено приближенное аналитическое выражение и выяснен физический смысл постоянной во внешнем решении.

Задачам со сферически-симметричным распределением материи посвящен ряд работ. Детальный анализ их проведен в [1, 2]. В последние годы, по существу, решена также задача вращения. В [3, 4] исследовалось внешнее решение для вращающихся конфигураций и найдены внутренние численные решения.

Представляет определенный интерес рассмотрение конфигураций, обладающих плоской симметрией [5]. В настоящей работе исследуется гравитационное поле, создаваемое плоским однородным слоем.

1. В статическом случае пространственно-временную метрику можно записать в виде (ось  $Oz$  перпендикулярна слою, а плоскость  $xy$  расположена в середине слоя):

$$ds^2 = e^{2\lambda(z)} dt^2 - e^{2\mu(z)} (dx^2 + dy^2) - dz^2 \quad (1.1)$$

Функции  $\nu(z)$ ,  $\lambda(z)$ , а также распределение плотности энергии  $\rho(z)$  и давления  $P(z)$  внутри конфигурации находятся из решения уравнений Эйнштейна и гидродинамики:

$$\lambda'' + \frac{3}{4} \lambda'^2 = -\frac{8\pi k}{e^{\lambda}} \rho \quad (1.2)$$

$$\frac{\lambda'^2}{4} + \frac{\lambda'\nu'}{2} = \frac{8\pi k}{c^4} P, \quad (1.3)$$

$$\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda''}{2} + \frac{\lambda'^2}{4} + \frac{\lambda'\nu'}{4} = \frac{8\pi k}{c^4} P, \quad (1.4)$$

$$P' = -\frac{\nu'}{2} (P + \rho), \quad (1.5)$$

где штрих означает дифференцирование по  $z$ . К полученной системе необходимо добавить уравнение состояния  $P = P(\rho)$ . Отметим, что одно из уравнений системы является следствием остальных, поэтому в качестве исходных удобно взять (1.2), (1.3), (1.5) и уравнение состояния.

2. Рассмотрим модели с несжимаемой жидкостью:  $\rho = \text{const}$ . В этом случае (1.2) и (1.5) легко интегрируются:

$$e^{-(z)} = \left| C_1 \sin \sqrt{\frac{6\pi k_0}{c^4}} (|z| - z_0) \right|^{4/3}, \quad (2.1)$$

$$P(z) = -\rho + C_2 e^{-\frac{2(z)}{3}}, \quad (2.2)$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  и  $z_0$  — постоянные интегрирования.

Подставив (2.1) и (2.2) в (1.3), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{9} \beta^2 \text{ctg}^2 \beta (|z| - z_0) + \frac{4}{3} \beta \text{ctg} \beta (|z| - z_0) \frac{\nu'}{2} = \\ & = -\frac{4}{3} \beta^2 + \frac{4}{3} \beta^2 \frac{C_2}{\rho} e^{-2z}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\beta^2 = \frac{6\pi k_0}{c^4}$ .

Подстановкой  $v = 2\pi\mu(z)$  и заменой независимой переменной  $\xi = \cos^2 \beta (|z| - z_0)$  уравнение (2.3) сводится к следующему виду:

$$\mu' - \left( \frac{1}{2\xi} - \frac{1}{6(1-\xi)} \right) \mu = -\frac{C_2}{2\rho\xi}. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) легко интегрируется, в результате для метрического коэффициента  $e^{-(z)}$  получаем:

$$e^{-(z)} = \frac{\left| C_3 \cos^2 \beta (|z| - z_0) + \frac{C_2 \beta}{\rho} F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \cos^2 \beta (|z| - z_0)\right) \right|^2}{\sin^{2/3} \beta (|z| - z_0)} \quad (2.5)$$

где  $C$ , — постоянная интегрирования, а  $F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$  — гипергеометрическая функция.

3. Решение (2.1) и (2.5) на границе конфигурации, определяемой из условия  $P(L) = 0$ , должно быть сшито с внешним решением, которое имеет вид [6]:

$$e^{v(z)} = \frac{A}{(C - B|z|)^{2\beta}}, \quad (3.1)$$

$$e^{\lambda(z)} = (C - B|z|)^{4\beta}. \quad (3.2)$$

На границе конфигурации мы должны потребовать непрерывность компонент метрического тензора и их первых производных, в результате этого найдем значения постоянных интегрирования  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Однако, поскольку (2.2) имеет сложный вид, явное нахождение границы конфигурации невозможно и по этой причине практически сшивка не может быть проведена. Поэтому удобно внутреннее решение находить численным интегрированием. С этой целью сделаем упрощающую замену независимой переменной

$$z = \sqrt{\frac{c^2}{8\pi k}} z^*, \quad (3.3)$$

после чего система уравнений примет вид:

$$k^* + \frac{3}{4} k^{*2} = -1, \quad (3.4)$$

$$\frac{k^{*2}}{4} + \frac{k^{*3}}{2} = p, \quad (3.5)$$

$$p^* = -\frac{\gamma}{2}(1 + p), \quad (3.6)$$

где  $P = p_1$ , а штрих означает дифференцирование по  $z^*$ .

Наряду с  $v(z)$ ,  $\lambda(z)$  и  $\rho(z)$  целесообразно вычислять величину

$$\sigma(z) = \frac{2}{c^2} \int_0^z (T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 - T_0^0) \frac{1}{\sqrt{g}} dz = \frac{2}{c^2} \int_0^z (3P + \rho) e^{\frac{\lambda}{2}} dz, \quad (3.7)$$

имеющую смысл «накопленной» поверхностной плотности массы. Величина  $\sigma(L)$  имеет смысл эффективной поверхностной плотности массы. Уравнение, определяющее величину  $\sigma^0 = \sqrt{\frac{8\pi k}{\gamma}} \sigma$ , имеет вид:

$$\sigma^* = 2(1 + 3\rho)e^{\frac{2}{3}v^*}. \quad (3.8)$$

Для численного интегрирования от центра конфигурации  $z^* = 0$  необходимо задать значения  $p(0)$ ,  $v(0)$ ,  $i(0)$ ,  $i'(0)$  и  $\sigma^*(0)$ . Очевидно,  $\sigma^*(0) = 0$ , кроме того,  $p(0) = p_0$ . Поскольку  $v$  и  $i$  явным образом в (3.4), (3.5) и (3.6) не входят, значения  $v(0)$  и  $i(0)$  можно задавать произвольно. Функции  $v(z)$  и  $i(z)$  определены с точностью до аддитивной постоянной, которую можно устранить простым масштабным преобразованием:  $t \rightarrow \alpha t$ ,  $x \rightarrow \beta x$ ,  $y \rightarrow \gamma y$ . Поэтому, не умаляя общности задачи, можно положить  $v(0) = i(0) = 0$  (ниже будет показано, как можно точно определить значения этих функций в центре конфигурации). Нам необходимо знать также и значение  $i'(0)$ . Из симметрии очевидно, что в центре конфигурации сила равна нулю, поэтому  $p'(0) = v'(0) = 0$ . Давление монотонно убывает ( $p' < 0$ ), а  $v(z)$  — монотонно возрастает ( $v' > 0$ ) внутри конфигурации. В точке  $z = L$  давление равно нулю, поэтому  $i'(L) = -2v'(L) < 0$ . Функция  $e^{i(z)}$  внутри конфигурации монотонна и не должна иметь особенности, поэтому и в центре конфигурации  $i'(0) < 0$ . Из (3.5) тогда следует, что  $i'(0) = -2|p_0|$ . Таким образом, система (3.4), (3.5), (3.6) и (3.8) интегрируется от центра  $z^* = 0$  с начальными условиями:  $p(0) = p_0$ ;  $v(0) = 0$ ;  $i(0) = 0$ ;  $i'(0) = -2|p_0|$ ;  $\sigma^*(0) = 0$  до границы конфигурации, в которой выполнено условие  $P(L^*) = 0$ . Имея в точке  $L^*$  значения  $v(L^*)$ ,  $i(L^*)$  и  $i'(L^*)$ , мы можем из сшивки решений определить постоянные А, В и С как функции  $p_0$ . После этого внешняя метрика преобразованием

$$\frac{A}{C^{2/3}} dt^2 \rightarrow dt^2; \quad (3.9)$$

$$C^{4/3} dx^2 \rightarrow dx^2; \quad C^{4/3} dy^2 \rightarrow dy^2 \quad (3.10)$$

может быть приведена к более удобному виду:

$$ds^2 = \frac{dt^2}{(1 - b|z|)^{2/3}} - (1 - b|z|)^{4/3} (dx^2 + dy^2) - dz^2, \quad (3.11)$$

где  $b = \frac{B}{C}$ .

Внутренняя же метрика принимает вид:

$$ds^2 = \frac{C^{2/3}}{A} e^{i(z)} dt^2 - C^{-4/3} e^{i(z)} (dx^2 + dy^2) - dz^2. \quad (3.12)$$

а поверхностная плотность преобразуется как

$$\sigma \rightarrow \frac{C^{1,3}}{\sqrt{A}} \sigma \quad (3.13)$$

При получении (3.13) необходимо учесть, что в плоскости  $xu$  площадь преобразуется как  $S \rightarrow C^{4,5} S$ .

Численное интегрирование уравнений было проведено на ЭВМ «Нанри-2» для конфигураций со значениями параметра  $\rho_0 = 1; 10^{-2}; 10^{-4}; 10^{-6}$ . Результаты численных расчетов приведены на рис. 1 и 2 и в табл. 1. Для

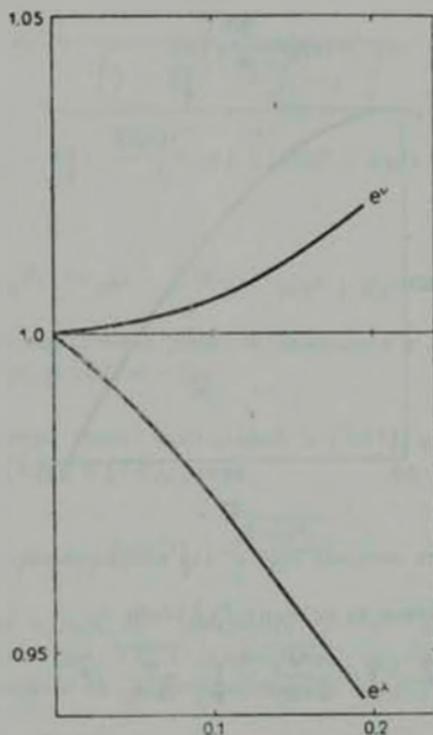


Рис. 1. Зависимость функций  $e^u$  и  $e^v$  от безразмерной координаты  $z^*$  для конфигурации с  $\rho_0 = 10^{-2}$ . Точка  $z^* = 0.195$  соответствует границе конфигурации.

всех конфигураций величина  $z_g = b^{-1}$  ( $z = z_g$  — плоскость, на которой метрика имеет особенность) оказывается больше размеров конфигурации  $L$ , т. е. статическая конфигурация находится внутри сингулярных «плоскостей»

$$z_g = \pm b^{-1}.$$

4. Учитывая вышеприведенный анализ поведения функций  $v(z)$ ,  $\lambda(z)$  и  $p(z)$  внутри конфигурации, результаты численных расчетов при  $p_0 < 10^{-2}$  можно с достаточной степенью точности аппроксимировать следующими формулами:

$$v(z) = \frac{4\pi k p_0}{c^4} z^2, \quad (4.1)$$

$$\lambda(z) = - \sqrt{\frac{32\pi k P_0}{c^4 p_0}} |z| - \frac{4\pi k p_0}{c^4} z^2, \quad (4.2)$$

$$P(z) = P_0 - \frac{2\pi k p_0}{c^4} z, \quad (4.3)$$

$$z(z) = \frac{2}{c^2} p |z|. \quad (4.4)$$

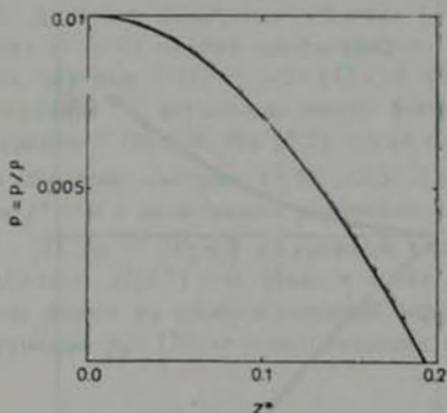


Рис. 2. Зависимость давления  $p$  от  $z^*$  для конфигурации с  $p_0 = 10^{-2}$ .

Граница  $z=L$  определяется из условия  $P(L)=0$ :

$$L = \sqrt{\frac{c^4 P_0}{2\pi k p_0^2}} = \sqrt{\frac{c^4}{8\pi k p_0}} L^0. \quad (4.5)$$

В точке  $z=L$  имеем

$$\begin{aligned} v_L &= v(L) = 2 \frac{P_0}{p}; & e^{iL} &\approx 1 + 2 \frac{P_0}{p}; \\ v_L &\equiv v'(L) = -6 \frac{P_0}{p}; & e^{iL} &\approx 1 - 6 \frac{P_0}{p}; \\ \lambda_L &\equiv \lambda'(L) = -4 \sqrt{\frac{P_0}{p}}; & z(L) &= \frac{2}{c^2} p L = \sqrt{\frac{2P_0}{\pi k}}; \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из условия сшивки компонент метрического тензора и их первых производных в точке  $z=L$  получаем значения постоянных  $A$ ,  $B$  и  $C$

$$A = 1 - \frac{P_0}{2}; \quad B = 3 \sqrt{\frac{P_0}{2}}; \quad C = 1 + \frac{3}{2} \frac{P_0}{c^2}. \quad (4.7)$$

Преобразованием

$$e^{-P_0} dt \rightarrow dt; \quad e^{P_0} dx \rightarrow dx; \quad e^{P_0} dy \rightarrow dy$$

внешняя метрика сводится к виду:

$$ds^2 = \frac{dt^2}{\left(1 - 3 \sqrt{\frac{8\pi k P_0}{c^4} |z|}\right)^{2/3}} - \left(1 - 3 \sqrt{\frac{8\pi k P_0}{c^4} |z|}\right)^{4/3} (dx^2 + dy^2) - dz^2, \quad (4.8)$$

а внутренняя:

$$ds^2 = e^{2P_0 \cdot \lambda(z)} dt^2 - e^{-2P_0 \cdot \lambda(z)} (dx^2 + dy^2) - dz^2, \quad (4.9)$$

откуда следует, что внутреннее решение сшивается с (4.8) при значениях постоянных  $\nu(0) = 2p_0$  и  $\lambda(0) = -2p_0$ .

5. Выясним теперь смысл постоянной в (3.11), которая, как это следует из сравнения (3.11) и (4.8), равна:

$$b = 3 \sqrt{\frac{8\pi k P_0}{c^4}} \quad (5.1)$$

Для конфигураций с  $p_0 < 10^{-2}$  величина  $z_g = b^{-1}$  намного больше размера конфигурации; при  $z \geq L$  выполнено условие  $bz \ll 1$ . Разлагая  $e^{4/3}$  в ряд по степеням  $bz$  и ограничиваясь первыми двумя членами, получаем

$$e^{4/3} \approx 1 + \frac{2}{3} bz = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}, \quad (5.2)$$

где  $\varphi(z)$  гравитационный потенциал, создаваемый слоем и равный  $\varphi = 2\pi k z z$ . Отсюда получаем значение  $b$ :

$$b = \frac{6\pi k z}{c^2}. \quad (5.3)$$

Из сравнения (5.1) и (5.3) находим:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2P_0}{\varepsilon k}},$$

что согласуется с (4.6).

Метрика пространства—времени для конфигураций с  $p_0 < 10^{-2}$  вблизи поверхности мало отличается от плоской, поэтому для них «накопленная» поверхностная плотность пропорциональна толщине слоя. В случае же  $P_0 \sim 1$  такая связь не имеет места:  $\sigma(z) \neq (2/c^2) \rho |z|$ .

Таблица 1  
ПАРАМЕТРЫ ПЛОСКИХ КОНФИГУРАЦИЙ ИЗ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

$P_0$	$L^*$	$\sigma^* (L^*)$
1	0.554	2.04
$10^{-2}$	0.195	0.39
$10^{-4}$	0.02	0.04
$10^{-6}$	0.002	0.004

*Примечания.*  $p_0 = P_0/\rho$ ,  $P_0$  — давление в центре,  $\rho$  — плотность энергии,  $L^*$  — граница конфигурации, а  $\sigma^* (L^*)$  — эффективная поверхностная плотность в безразмерных единицах.

6. Радиус  $R$  статических сферически-симметричных конфигураций больше их гравитационного радиуса  $R_g$ . Особенность метрики в точке  $R_g$  не физическая (в этой точке отличен от нуля детерминант метрического тензора  $|g_{ik}|$ ). Существенным отличием статических конфигураций с плоской симметрией от сферических является то, что конфигурация находится внутри сингулярных плоскостей. В точке  $z = \pm b^{-1}$  детерминант имеет особенность:  $|g_{ik}| = 0$ . Вопрос устойчивости плоских конфигураций относительно малых возмущений будет исследован в дальнейшем.

В заключение выражаем глубокую благодарность профессору Г. С. Саакяну и доценту Э. В. Чубаряну за полезные обсуждения.

Ереванский государственный  
университет

Университет Пуряние.  
Брно, ЧССР

THE GRAVITATIONAL FIELD OF THE HOMOGENEOUS  
PLANE DESK

R. M. AVAKIAN, J. HORSKY

The gravitational field generated by a static homogeneous plane desk is studied. The metric tensor inside such a configuration is found as well as the pressure distribution in the desk. Our internal solution and Taub's external solution are matched on the boundary. For a small central pressure the metric tensor in the analytical form is presented and the physical context of the  $b$  constant is given.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Савкян, Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс, Наука, М., 1972.
2. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, Релятивистская астрофизика, Наука, М., 1967.
3. Д. М. Седракян, Докторская диссертация, Ереван, 1972.
4. Э. В. Чубарян, Докторская диссертация, Ереван, 1972.
5. J. Horský, I. Novotný, J. Phys. A, 2, 251, 1969.
6. A. H. Taub, Ann. Math., 53, 472, 1951.