АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 11 НОЯБРЬ, 1975 ВЫПУСК 4

КВАЗИАСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В СЛОЕ КОНЕЧНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ТОЛЩИНЫ
I. КОНСЕРВАТИВНОЕ РАССЕЯНИЕ

М. А. МНАЦАКАНЯН

Поступила 6 июня 1975
Пересмотрена 3 октября 1975

Получены квазиасимптотические решения задачи переноса излучения в слое конечной оптической толщины для консервативного случая монохроматического рассеяния со сферической индикатрисой. Эти решения по существу являются асимптотическими, но более точными, чем асимптотические решения Соболева, и практически применимы для слоя любой толщины. При больших толщинах квазиасимптотические решения переходят в известные асимптотики Соболева.

1. *Введение.* В недавней заметке [1] автор установил принципиальную возможность сведения задачи о диффузии света в слое конечной оптической толщины к соответствующей задаче для полубесконечного слоя. Идея заключается в том, что к рассматриваемому слою конечной толщины мысленно добавляется полубесконечный слой. В результате того, что суммарная среда также является полубесконечной, решения задач для конечной и полубесконечной сред связываются друг с другом посредством линейных соотношений. Такой подход фактически представляет собой предельный случай метода сложения слоев Амбарцумяна [2], когда добавляемый слой имеет бесконечно большую оптическую толщину. В работе [3] автор иллюстрирует этот путь решения задач для конечного слоя на примере монохроматического рассеяния в однородной среде, а в [4] рассматривается уже трехмерная среда со сферической индикатрисой рассеяния. Эти примеры достаточно убедительно говорят в пользу эффективности предлагаемого пути исследования задач переноса в слое конечной оптической толщины.

Что касается задач переноса в полубесконечных средах, то можно считать, что они в основном практически разрешены. Для решения этих задач используется принцип инвариантности Амбарцумяна [5], представляющий собой другой предельный случай метода сложения слоев, когда добавляемый слой является бесконечно тонким. Задача для полубесконечной среды, являясь частным случаем задачи о конечном слое, сравнительно проще последней и во многих случаях допускает даже точное аналитическое решение в замкнутой форме [7—9].

Получение аналитических решений в замкнутой форме для задач о конечном слое представляется особенно важным и, строго говоря, пока это удается сделать только для частного случая монохроматического рассеяния в однородной одномерной среде. Поэтому для более сложных задач желательно было бы иметь приближенные решения, достаточно точные и достаточно простые, позволяющие судить об аналитических свойствах решений этих задач.

Первые аналитические результаты для слоя конечной толщины, носящие приближенный характер, принадлежат В. В. Соболеву [6]. Им получены асимптотические решения для слоя большой толщины, то есть решения, которые являются тем более точными, чем больше толщина слоя τ_0. Такие решения найдены почти во всех прикладных задачах теории переноса и хорошо исследованы [7—9]. В частности, соболевские асимптотики получены для задачи монохроматического рассеяния в однородной трехмерной среде с асферической индикатрисой для произвольного значения λ (при наличии истинного поглощения).

Будучи асимптотическими по своему физическому смыслу, соболевские решения для слоя данной толщины τ_0 выполняются тем точнее, чем ближе λ к 1 и чем ближе к сферической индикатриса рассеяния. В лучшем, в смысле точности, случае — чистого рассеяния и сферической индикатрисы, асимптотические решения, например, для функции Амбарцумяна $\varphi(\tau_0, \eta)$, гарантируют точность до единицы третьего знака, начиная с толщины $\tau_0 \approx 2$. С уменьшением λ и ростом вытянутости индикатрисы эти решения сохраняют данную точность лишь при переходе к слоям большей оптической толщины. Именно поэтому представляется важным получение таких приближенных решений, которые были бы более точными, чем соболевские, а следовательно, и были применимы к слоям меньшей оптической толщины.

Оказывается, что, исходя из полученных в работе [1] уравнений, устанавливающих связь между решениями соответствующих задач переноса в конечном и полубесконечном слоях, можно получить асимптотические решения, являющиеся более точными, чем соболевские. Для случая чистого рассеяния и при сферической индикатрисе рассеяния получаемые нами решения, например, для функции Амбарцумяна $\varphi(\tau_0, \eta)$, обладают точностью до нескольких процентов, начиная уже с толщины слоя $\tau_0 = 0$. При $\tau_0 \approx 2$ точность этих решений на порядок выше точности соответствующих соболевских решений. При $\tau_0 \gg 1$ наши решения переходят в асимптотические решения Соболева.

Аналогичное решение для частной задачи (для функции источников при чистом рассеянии и сферической индикатрисе) было «интуитивно» написано Ямамото [10] в 1955 г. Некоторое время подозревалось, что это решение является точным, так как вычисления по нему давали точность до третьего знака [11], пока в 1962 г. В. В. Соболев не показал [12], что решение Ямамото не является точным.

Тем не менее, формула Ямамото продолжает привлекать к себе внимание своею загадочностью. Определенно, было бы интересно выяснить суть приближения, лежащего в основе формулы Ямамото, с тем чтобы получить аналогичные решения для более общих задач переноса в слое конечной толщины. Получаемые нами здесь и в последующих работах решения как раз и являются такими обобщениями формулы Ямамото для более общих по постановке задач переноса на случаи произвольного λ, асферической индикатрисы, а также наличия перераспределения по частотам.

Получаемые нами, по существу асимптотические, решения мы будем называть квазиасимптотическими решениями, с тем, чтобы в дальнейшем отличать их от асимптотических решений Соболева. Настоящая статья посвящена выводу квазиасимптотических решений задачи об изотропном монохроматическом рассеянии света в однородной трехмерной среде конечной оптической толщины для случая чистого рассеяния. Неконсервативное рассеяние будет рассмотрено во второй части — продолжении данной статьи

2. *Уравнения для задачи о внутреннем световом режиме.* Пусть $r(\tau', \tau, \tau_0, \eta, \zeta)$ есть вероятность того, что квант, движущийся на глубине τ в направлении ζ в слое конечной толщины τ_0, когда-либо пролетит на глубине τ' в направлении η. Эту же величину для полубесконечной среды обозначим через $\Gamma(\tau', \tau, \eta, \zeta)$. Добавляя мысленно к слою конечной толщины полубесконечный слой [1], получаем

$$\Gamma(\tau', \tau, \eta, \zeta) = r(\tau', \tau, \tau_0, \eta, \zeta) + \int_0^1 \Gamma(\tau', \tau_0, \eta, \mu)\, r(\tau_0, \tau, \tau_0, \mu, \zeta)\, d\mu. \quad (A)$$

Это соотношение выражает функцию Грина $r(\tau', \tau, \tau_0, \eta, \zeta)$ задачи переноса в слое конечной толщины через ее частное значение $r(\tau_0, \tau, \tau_0, \eta, \zeta)$ на границе слоя и функцию Грина $\Gamma(\tau', \tau, \eta, \zeta)$ задачи переноса в полубесконечной среде.

Поверхностная функция Грина $r(\tau_0, \tau, \tau_0, \eta, \zeta)$ в зависимости от знака ζ совпадает с одной из величин $y(\tau, \tau_0, \eta, \zeta)$ или $z(\tau, \tau_0, \eta, \zeta)$, введенных в [1]. Напомним смысл этих величин. Если в слое толщины τ_0 на глубине τ первоначально летит квант в направлении ζ, то вероятность этому кванту выйти с той границы, в направлении которой первоначально летит квант, равна $y(\tau, \tau_0, \eta, \zeta)$, а с противоположной — $z(\tau_0 - \tau, \tau_0, \eta, \zeta)$. Те же величины для полубесконечной среды обозначим через Y и Z. При $\tau' = \tau_0$ из (А) следуют уравнения*

$$
\begin{aligned}
Y(\tau, \eta, \zeta) &= y(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) + \int_0^1 Z(\tau_0, \eta, \mu)\, z(\tau_0 - \tau, \tau_0, \mu, \zeta)\, d\mu, \\
Z(\tau_0 - \tau, \eta, \zeta) &= z(\tau_0 - \tau, \eta, \zeta) + \int_0^1 Z(\tau_0, \eta, \mu)\, y(\tau, \tau_0, \mu, \zeta)\, d\mu.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Если решена частная задача (1), то есть найдены y и z, то соотношение (А) позволяет явным образом выразить функцию Грина $\Gamma(\tau', \tau, \tau_0, \eta, \zeta)$ для слоя конечной толщины через функцию Грина $\Gamma(\tau', \tau, \eta, \zeta)$ для полупространства. Поэтому мы будем рассматривать только задачу (1).

В частном случае $\tau_0 = \tau$ наша задача переходит в задачу о вероятностях отражения $R(\tau, \eta, \zeta)$ и пропускания $Q(\tau, \eta, \zeta)$ слоем толщины τ, а при $\zeta = 0$ — в задачу о вероятности $p(\tau, \tau_0, \eta)$ выхода поглощенного кванта из слоя толщины τ_0. В более частном случае, когда одновременно и $\tau = 0$ и $\zeta = 0$, мы имеем задачу о φ- и ψ-функциях Амбарцумяна.

Складывая и вычитая уравнения (1), получаем независимые уравнения

$$
\begin{aligned}
S(\eta) &= s(\eta) + \int_0^1 Z(\tau_0, \eta, \mu)\, s(\mu)\, d\mu, \\
H(\eta) &= h(\eta) - \int_0^1 Z(\tau_0, \eta, \mu)\, h(\mu)\, d\mu,
\end{aligned} \tag{2}
$$

для суммы и разности искомых величин

$$
\begin{aligned}
s(\eta) &\equiv s(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) = y(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) + z(\tau_0 - \tau, \tau_0, \eta, \zeta), \\
h(\eta) &\equiv h(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) = y(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) - z(\tau_0 - \tau, \tau_0, \eta, \zeta),
\end{aligned} \tag{3}
$$

связывающие их с соответствующими величинами для полупространства

$$
\begin{aligned}
S(\eta) &\equiv S(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) = Y(\tau, \eta, \zeta) + Z(\tau_0 - \tau, \eta, \zeta), \\
H(\eta) &\equiv H(\tau, \tau_0, \eta, \zeta) = Y(\tau, \eta, \zeta) - Z(\tau_0 - \tau, \eta, \zeta).
\end{aligned} \tag{4}
$$

* Величины, относящиеся к среде конечной толщины, ниже обозначаются строчными буквами, а к полубесконечной среде ($\tau_0 = \infty$) — заглавными.

Итак, мы рассматриваем уравнения (2) в общем случае, отвлекаясь от того, какая конкретная задача решается — о внутреннем световом режиме или об отражении и пропускании, поскольку все они описываются одним и тем же уравнением (2). Уравнениями (2) могут описываться и другие задачи [1], например, о выходящем излучении при заданном распределении внутренних источников в слое толщины τ_0. При этом соответствующие величины S и H для полубесконечной среды должны считаться известными.

Уравнения (2) справедливы и для случая асферической индикатрисы рассеяния, но для вероятностей, проинтегрированных по азимуту. Они представляют собой независимые линейные интегральные уравнения. Замечательно, что в этих уравнениях τ, τ_0 и ζ являются параметрами, причем известные величины Y и Z зависят, вообще говоря, от трех аргументов. Для сферической же индикатрисы рассеяния ядро $Z(\tau, \eta, \zeta)$, как и $Y(\tau, \eta, \zeta)$, выражается через функции всего лишь от двух аргументов [4]. По указанным причинам уравнения (2) особенно удобны для численного решения поставленной задачи.

Таким образом, нахождение точного решения задачи для слоя конечной толщины τ_0 сводится к решению интегрального уравнения (2), ядро которого при изотропном рассеянии, как показано в [1, 4], имеет вид

$$Z(\tau, \eta, \zeta) = \frac{\lambda}{2}\eta\varphi(\eta)\frac{F(\tau, \eta) + \tilde{F}(\tau, \zeta)}{\eta + \zeta}, \tag{5}$$

где

$$F(\tau, \eta) = \frac{P(\tau, \eta)}{P(0, \eta)}, \qquad \tilde{F}(\tau, \zeta) = \zeta\varphi(\zeta)\int_0^1 \frac{P(\tau, \mu)}{\zeta + \mu}\, d\mu, \tag{6}$$

а $P(\tau, \eta)$ — вероятность выхода кванта, поглощенного на глубине τ полубесконечной среды, в направлении η, причем, $P(0, \eta) = (\lambda/2)\varphi(\eta)$, φ — функция Амбарцумяна. В работе [4] функции F и $\tilde{F}$ определены как

$$F(\tau, \zeta) = \zeta\int_0^1 \frac{Y(\tau, \mu, \zeta)}{\mu}\, d\mu, \qquad \tilde{F}(\tau, \zeta) = \zeta\int_0^1 \frac{Z(\tau, \mu, \zeta)}{\mu}\, d\mu. \tag{7}$$

Одновременно эти функции являются решениями дифференциальных уравнений, приведенных в [4], с начальными условиями

$$F(0, \eta) = 1, \quad \tilde{F}(0, \eta) = \varphi(\eta) - 1, \tag{8}$$

и соответственно представляются интегралами

$$F(\tau, \eta) = e^{-\tau/\eta} + \int_0^{\tau} e^{-\frac{\tau-\tau'}{\eta}} \Phi(\tau')\, d\tau', \quad \tilde{F}(\tau, \zeta) = \int_{\tau}^{\infty} e^{-\frac{\tau'-\tau}{\zeta}} \Phi(\tau')\, d\tau', \tag{9}$$

где $\Phi(\tau)$ — резольвентная функция Соболева.

Подставляя в (9) известную асимптотику для $\Phi(\tau)$

$$\Phi(\tau) \approx Ae^{-k\tau},$$

получаем асимптотические выражения для F и $\tilde{F}$ при $\tau \gg 1$:

$$F(\tau, \eta) \approx A\frac{\eta}{1 - k\eta} e^{-k\tau}, \quad \tilde{F}(\tau, \zeta) \approx A\frac{\zeta}{1 + k\zeta} e^{-k\tau}. \tag{10}$$

Здесь A и k — постоянные, определяемые соотношениями [6, 7]

$$\frac{\lambda}{2} A \int_0^1 \frac{\eta\varphi(\eta)}{(1 - k\eta)^2} d\eta = 1, \quad \frac{\lambda}{2k} \ln\frac{1 + k}{1 - k} = 1.$$

3. *Асимптотические выражения.* Приближенные решения интегрального уравнения (2) получаются использованием того или иного приближенного выражения для ядра Z. Обратимся, например, к выводу асимптотических решений Соболева. Они получаются при замене $Z(\tau, \eta, \zeta)$ его асимптотическим выражением при $\tau \gg 1$ [6, 7]:

$$Z(\tau, \eta, \zeta) = \frac{\lambda}{2} A \frac{\eta\varphi(\eta)}{(1 - k\eta)(1 + k\zeta)} e^{-k\tau}, \tag{11}$$

следующим из (10) и (5). Асимптотику $\tilde{F}$ можно получить также подстановкой в (6) известной асимптотики $P(\tau, \eta)$:

$$P(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{2} A \frac{\eta\varphi(\eta)}{1 - k\eta} e^{-k\tau}. \tag{12}$$

В приближении (11) уравнение (2) имеет вид

$$S(\eta) = s(\eta) + P(\tau_0, \eta)\, s_k, \quad H(\eta) = h(\eta) - P(\tau_0, \eta)\, h_k, \tag{13}$$

где введено обозначение

$$f_k = \int_0^1 \frac{f(\mu)}{1 + k\mu} d\mu. \tag{14}$$

Из уравнений (13) делением на $1 - k\eta$ и интегрированием по η определяются и величины s_k и h_k:

$$s_k = \frac{S_k}{1 + P_k(\tau_0)}, \qquad h_k = \frac{H_k}{1 - P_k(\tau_0)}. \tag{15}$$

Выражения (13) совместно с (15) и определяют асимптотические решения Соболева для величин s и h, характеризующих внутренний режим в слое большой конечной толщины, через соответствующие величины S и H для полубесконечной среды. Величины S_k и H_k можно вычислить по формулам, приводимым в Приложении.

Для получения же более точных асимптотических решений, или, как мы их называем, квазиасимптотических решений, поступим следующим образом. Заметим, что в уравнении (2) ядро $Z(\tau, \eta, \zeta)$ интегрируется по второму угловому аргументу ζ. Имея в виду (5), замечаем, что на неизвестную функцию умножается и интегрируется величина $\bar{F}(\tau, \zeta)$, в то время как функция $F(\tau, \eta)$ выходит из-под знака интеграла. Вся трудность решения уравнения (2) как раз и состоит в нахождении указанного интеграла, содержащего $\bar{F}$.

Вспомним определения (7) функций F и $\bar{F}$. Функции $Y(\tau, \eta, \zeta)$ и $Z(\tau, \eta, \zeta)$ описывают одну и ту же физическую величину, но при разных знаках ζ: это — вероятность выхода кванта, движущегося в полубесконечной среде на глубине τ в направлении ζ (положительном, к выходу — Y, и отрицательном, вглубь — Z). Поэтому физически F и $\bar{F}$ также представляют собой одну и ту же величину, первая относится к выходящему кванту, первоначально двигавшемуся в сторону границы, вторая — внутрь среды.

Величинам F и $\bar{F}$ можно придать следующий физический смысл. Пусть на глубине τ в полубесконечной среде в направлении ζ движется квант. Тогда вероятность этому кванту поглотиться в бесконечном тонком слое толщины $d\tau$, лежащем у границы среды, в зависимости от знака ζ, согласно физическому смыслу правых частей (7), равна $F(\tau, \zeta)\frac{d\tau}{\zeta}$ или $\bar{F}(\tau, \zeta)\frac{d\tau}{\zeta}$ (При $\zeta = 0$ эта вероятность есть $\Phi(\tau)\,d\tau$).

Сделанное выше замечание очень важно, и вот почему. Дело в том, что из-за указанной разницы в направлениях первоначального движения кванта, величина $\bar{F}$, описывающая выходящий квант, первоначально двигавшийся на глубине τ внутрь полубесконечной среды, естественно, должна выходить на свой асимптотический режим при меньших τ, чем величина F, описывающая квант, первоначально двигавшийся в направлении к границе. Ведь квант, движущийся вглубь среды, до первого своего поглощения успеет достаточно глубоко проникнуть в среду и прежде чем выйти из среды — «асимптотизироваться». Точнее, асимптотики этих величин для данной глубины τ выполняются тем лучше, чем ближе ζ к -1, и тем хуже, чем ближе ζ к $+1$.

Итак, наше основное заключение, на которое опираются дальнейшие выводы, состоит в том, что асимптотика функции $\bar{F}(\tau, \zeta)$ достигается при гораздо меньших τ, чем асимптотика $F(\tau, \eta)$.

Для приближенного решения уравнения (2) для нас важно, чтобы в функции $\bar{F}(\tau, \zeta)$ происходило разделение переменных. Формула (10) дает асимптотическое разделение переменных у функции $\bar{F}$ при больших τ. Поскольку мы ожидаем, что оно приближенно будет иметь место и при меньших τ, то напишем для $\bar{F}(\tau, \zeta)$ следующее квазиасимптотическое выражение

$$\bar{F}(\tau, \zeta) \approx A(\tau)\, e^{-k\tau} \frac{\zeta}{1+k\zeta} \equiv C(\tau) \frac{\zeta}{1+k\zeta}, \tag{16}$$

то есть примем, что A, вообще говоря, зависит от τ. Если предположить, что представление (16) имеет место, то подстановка его в выражение (5) для ядра Z позволит решить интегральное уравнение (2). При этом выражение для $F(\tau, \eta)$ будет сохраняться точным. Получаемое таким путем решение будет более точным и справедливым при меньших толщинах слоя, чем соболевские асимптотики. При больших же толщинах слоя, когда для $F(\tau, \eta)$ можно взять асимптотику (10), наше решение переходит в асимптотическое решение Соболева.

Для того, чтобы получить количественное представление о точности приближения (16) для случая чистого рассеяния:

$$\bar{F}(\tau, \zeta) \approx C(\tau) \cdot \zeta, \tag{17}$$

мы приводим таблицу 1 значений функции $\bar{F}(\tau, \zeta)$, вычисленной нами по формуле (9) (с точностью до единицы последнего знака). Мы видим, что приближение (17) прекрасно выполняется почти для всех $\tau \geqslant 0$, исключая разве лишь область малых ζ при малых τ. Это отклонение поведения $\bar{F}$ от квазиасимптотического (17) при малых ζ для малых τ не может сильно повлиять на точность квазиасимптотических решений, по той причине, что функция $\bar{F}$ фигурирует в основном под знаком интеграла, и кроме того, помноженная на величины, в свою очередь также стремящиеся к нулю при $\zeta \to 0$.

Таблица 1

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $\tilde F(\tau, \eta)$ ДЛЯ СЛУЧАЯ ЧИСТОГО РАССЕЯНИЯ

$\eta \backslash \tau$	0	0.02	0.05	0.1	0.2	0.4	0.7	1	∞
0.1	0.25	0.23	0.22	0.21	0.20	0.19	0.18	0.18	0.17
0.2	0.45	0.43	0.42	0.40	0.38	0.37	0.36	0.35	0.35
0.3	0.64	0.62	0.60	0.59	0.57	0.55	0.53	0.53	0.52
0.4	0.83	0.81	0.79	0.77	0.75	0.72	0.71	0.70	0.69
0.5	1.01	1.00	0.97	0.95	0.93	0.90	0.88	0.88	0.87
0.6	1.19	1.18	1.15	1.13	1.10	1.08	1.06	1.05	1.04
0.7	1.37	1.36	1.33	1.31	1.28	1.25	1.23	1.22	1.21
0.8	1.55	1.53	1.51	1.49	1.46	1.43	1.41	1.40	1.39
0.9	1.73	1.71	1.69	1.66	1.63	1.60	1.58	1.57	1.56
1.0	1.91	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.76	1.75	1.73

Если же сравнить асимптотическое выражение функции $F(\tau, \eta)$ с точными значениями по таблице 22 из [7], то увидим, что согласие может считаться удовлетворительным только начиная с $\tau \approx 2$.

Относительно хуже всего квазиасимптотическое выражение (17) выполняется при $\tau = 0$: при этом согласно (8) оно соответствует приближению

$\tilde F(0, \eta) = \varphi(\eta) - 1 = C(0)\eta$ или (см. табл. 2)

$$\varphi(\eta) \approx 1 + 1.91\eta. \tag{18}$$

Этот линейный рост $\varphi(\eta)$ при чистом рассеянии, как известно, неплохо выполняется [13].

Приближенное выражение (17) выполняется тем точнее, чем больше τ, поэтому оно по существу асимптотическое, и все последующие наши выводы, основывающиеся на единственном приближении (17), также носят асимптотический характер, то есть выполняются тем точнее, чем больше значение τ.

4. *Решение уравнений.* Итак, мы рассматриваем трехмерную задачу о внутреннем световом режиме в слое конечной оптической толщины τ_0. Среда предполагается однородной и изотропной, рассеяние — монохроматическим со сферической индикатрисой. Ниже рассматривается случай консервативного, или чистого рассеяния, $\lambda = 1$.

Конечно, случай чистого рассеяния может быть получен предельным переходом $\lambda \to 1$ в общем решении для произвольного λ, но этот путь представляется довольно громоздким. Как известно, в случае чистого рассеяния мы сталкиваемся с процедурой раскрытия неопределенности при решении уравнений. Мы рассматриваем уравнения (2), а не (1), по той причине, что эта неопределенность содержится только в одном из уравнений (2) — в уравнении для h.

Наша задача состоит в решении уравнений (2) в квазиасимптотическом приближении (17). В этом приближении ядро (5) интегрального уравнения (2) переписывается в виде

$$Z(\tau, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}\eta\varphi(\eta)\frac{F(\tau, \eta) + C(\tau)\zeta}{\eta + \zeta}. \tag{19}$$

Преобразуем это выражение к более удобному виду

$$Z(\tau, \eta, \zeta) = a(\tau, \eta) + \frac{b(\tau, \eta)}{\eta + \zeta}, \tag{20}$$

где введены обозначения

$$a(\tau, \eta) = \frac{1}{2}C(\tau)\eta\varphi(\eta), \tag{21}$$

$$b(\tau, \eta) = \eta[P(\tau, \eta) - a(\tau, \eta)]. \tag{22}$$

При больших τ имеем $a \to P \to \frac{\sqrt{3}}{2}\eta\varphi(\eta)$, а величина $b(\tau, \eta)$ обращается в нуль, так что мы приходим к приближению для Z, использованному в асимптотических решениях Соболева. В этом смысле величина $b(\tau, \eta)$ служит квазиасимптотической поправкой к соболевским асимптотикам. Введем обозначения*

$$f_0 = \int_0^1 f(\mu)\,d\mu, \qquad f_\eta = \int_0^1 \frac{f(\mu)}{\eta + \mu}\,d\mu. \tag{23}$$

Используя квазиасимптотическое выражение (20) для Z, перепишем уравнения (2) в виде

$$S(\eta) = s(\eta) - a(\tau_0, \eta)s_0 + b(\tau_0, \eta)s_\eta, \tag{24}$$

$$H(\eta) = h(\eta) - a(\tau_0, \eta)h_0 - b(\tau_0, \eta)h_\eta. \tag{25}$$

Займемся определением величин s_0, h_0, s_η и h_η.

Так как при чистом рассеянии квант наверняка выходит из слоя, то

$$s_0 = 1. \tag{26}$$

* Во избежание недоразумений заметим, что обозначения (23) и (14) не переходят друг в друга при $\zeta = 0$ или $\eta = 1/k$.

Для того, чтобы найти s_ζ и h_ζ, разделим уравнения (24), (25) на $\eta+\zeta$ и проинтегрируем по η:

$$S_\zeta = s_\zeta + a_\zeta(\tau_0) + \int_0^1 \frac{b(\tau_0, \eta)}{\eta+\zeta} s_\eta d\eta, \tag{27}$$

$$H_\zeta = h_\zeta - a_\zeta(\tau_0) h_0 - \int_0^1 \frac{b(\tau_0, \eta)}{\eta+\zeta} h_\eta d\eta. \tag{28}$$

Покажем, что интегралы в правых частях (27), (28) в квазиасимптотическом приближении равны нулю. Рассмотрим, например, первый интеграл

$$\int_0^1 \frac{b s_\eta}{\eta+\zeta} d\eta = \int_0^1 s(\mu) d\mu \int_0^1 \frac{b(\tau_0, \eta) d\eta}{(\eta+\zeta)(\eta+\mu)} = \int_0^1 s(\mu) b_{\mu\zeta} d\mu.$$

Но

$$\begin{aligned} b_{\mu\zeta} = \int_0^1 \frac{b(\tau_0, \eta) d\eta}{(\eta+\zeta)(\eta+\mu)} = \frac{1}{\zeta-\mu}\Bigg| \int_0^1 \frac{b(\tau_0, \eta)}{\eta+\mu} d\eta - \\ - \int_0^1 \frac{b(\tau_0, \eta)}{\eta+\zeta} d\eta \Bigg| = \frac{b_\mu - b_\zeta}{\zeta-\mu}. \end{aligned} \tag{29}$$

Интегрируя (20) по η и замечая, что $Z_0 = 1$, в квазиасимптотическом приближении находим

$$b_\zeta(\tau) = 1 - \int_0^1 a(\tau, \eta) d\eta = 1 - \frac{1}{2} C(\tau) \int_0^1 \eta\varphi(\eta) d\eta = 1 - \frac{C(\tau)}{\sqrt{3}}. \tag{30}$$

Другими словами, в квазиасимптотическом приближении $b_\zeta(\tau)$ не зависит от параметра ζ. Поэтому из (29) следует, что $b_{\mu\zeta} = 0$.

Итак, для определения s_ζ и h_ζ из (27), (28) имеем:

$$s_\zeta = S_\zeta - a_\zeta(\tau_0), \tag{31}$$

$$h_\zeta = H_\zeta + a_\zeta(\tau_0) h_0 \tag{32}$$

Остается найти h_0. Для этого проинтегрируем уравнение (2) для h при произвольном λ:

$$H_0 = h_0 - \int_0^1 Z_0(\tau_0, \mu) h(\mu) d\mu.$$

Используя выражение (П.7) и приближение (17), получаем

$$H_0 = h_0[1 - P_0(\tau_0)] + \sqrt{1-\lambda}\, C(\tau_0)\, h_1. \tag{33}$$

Однако в (33) входит неизвестный первый момент h_1. Для его определения проинтегрируем уравнение (2) для h, предварительно помножив его на η:

$$H_1 = h_1 - \int\limits_0^1 Z_1(\tau_0, \mu)\, h(\mu)\, d\mu.$$

Используя здесь выражение (П.8)

$$Z_1(\tau, \mu) = q(\tau) - \mu + \tilde{F}(\tau, \mu)\sqrt{3} \simeq q(\tau) + \mu\delta,$$

где через δ мы обозначили

$$\delta = \frac{C(\tau)}{\sqrt{3}} - 1, \tag{34}$$

имеем

$$H_1 = (1 - \delta)\, h_1 - h_0 q(\tau_0), \quad \lambda = 1.$$

Введем еще одно обозначение

$$\alpha = 2 - \frac{C(\tau_0)}{\sqrt{3}} = 1 - \delta. \tag{35}$$

Подставляя h_1 из предыдущего выражения в (33), после несложных алгебраических преобразований с использованием (П.6), окончательно находим выражение h_0 через величины, характеризующие полубесконечную среду:

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\, \frac{\alpha \left.\dfrac{H_0}{\sqrt{1-\lambda}}\right|_{\lambda=1} - C(\tau_0)\, H_1}{\alpha\tau_0 + 2q(\tau_0)}. \tag{36}$$

Заметим, что величина H_0 содержит множитель $\sqrt{1-\lambda}$, который сокращается, и процедуры раскрытия неопределенности типа «0/0», обычно присущей случаю чистого рассеяния, в данном случае нет.

Итак, последовательность решения уравнений (2) для задачи о внутреннем световом режиме в слое конечной толщины τ_0, в квазиасимптотическом приближении, следующая:

$$
\begin{aligned}
&\text{находим } h_0 \quad \text{из (36)},\\
&\text{находим } h_\zeta \text{ и } s_\zeta \text{ из (31) и (32)},\\
&\text{находим } h \text{ и } s \text{ из (24) и (25)}.
\end{aligned} \tag{37}
$$

В выражения (31), (32) входит величина $a_\zeta(\tau_0)$, равная

$$
a_\zeta(\tau) = \int_0^1 \frac{a(\tau, \eta)}{\eta + \zeta}\, d\eta = \frac{1}{2}\, C(\tau) \int_0^1 \frac{\mu \varphi(\mu)}{\mu + \zeta}\, d\mu = \frac{C(\tau)}{\varphi(\zeta)}. \tag{38}
$$

Для вычисления H_0 и H_1, согласно (4) равных

$$
H_0(\tau, \tau_0, \zeta) = Y_0(\tau, \zeta) - Z_0(\tau_0 - \tau, \zeta), \quad H_1(\tau, \tau_0, \zeta) = Y_1(\tau, \zeta) - Z_1(\tau_0 - \tau, \zeta),
$$

используем интегралы, приводимые в Приложении. Согласно (П.7) и (П.10), с учетом (П.6) имеем

$$
\left.\frac{H_0(\tau, \tau_0, \zeta)}{\sqrt{1 - \lambda}}\right|_{\lambda = 1} = Q(\tau_0 - \tau) - Q(\tau) + F(\tau, \zeta) + \tilde{F}(\tau_0 - \tau, \zeta). \tag{39}
$$

Согласно (П.8) и (П.10), находим

$$
H_1(\tau, \tau_0, \zeta) = q(\tau) - q(\tau_0 - \tau) + 2\zeta - \frac{1}{\sqrt{3}}[F(\tau, \zeta) + \tilde{F}(\tau_0 - \tau, \zeta)].
$$

Подставляя найденные H_0 и H_1 в (36), получаем

$$
h_0 = \frac{\alpha(\tau_0 - 2\tau) + 2[q(\tau_0 - \tau) - q(\tau)] + \dfrac{2}{\sqrt{3}}[F(\tau, \zeta) + \tilde{F}(\tau_0 - \tau, \zeta) - \zeta C(\tau_0)]}{\alpha\tau_0 + 2q(\tau_0)}. \tag{40}
$$

5. *Частные задачи.* Рассмотрим задачу о нахождении функции источников в слое, освещаемом с одной стороны изотропным излучением. Легко видеть, что в этом случае

$$
B(\tau) = \int_0^1 p(\tau, \tau_0, \eta)\, d\eta = \frac{1}{2}(s_0 + h_0) = \frac{1}{2}(h_0 + 1). \tag{41}
$$

Положим в (40) $\zeta = 0$ и заметим, что $F(\tau, 0) = \tilde{F}(\tau, 0) = 0$:

$$
h_0(\tau, \tau_0) = \frac{\alpha(\tau_0 - 2\tau) + 2[q(\tau_0 - \tau) - q(\tau)]}{\alpha\tau_0 + 2q(\tau_0)}. \tag{42}
$$

Здесь использовано тождество

$$1+\frac{C(\tau_0)}{\alpha\sqrt{3}}=\frac{2}{\alpha}. \tag{43}$$

Теперь нетрудно найти выражение для функции источников (41):

$$B(\tau)=\frac{\alpha(\tau_0-\tau)+q(\tau_0-\tau)+q(\tau_0)-q(\tau)}{\alpha\tau_0+2q(\tau_0)}. \tag{44}$$

С точностью до обозначений это решение совпадает с решением Ямамото [12] (если заменить $\tau\to\tau_0-\tau$, $1/\alpha\to L$ и $L(\tau_0)\,q(\tau_0)\to Q(\tau_0)$). В формуле Ямамото фигурировали две постоянные $L(\tau_0)$ и $Q(\tau_0)$, подлежащие численному определению способом подгонки. Они не независимы и выражаются через величину $C(\tau_0)$, последняя и подлежит определению (см. ниже). Такая связь между L и Q была получена и в работе Кинга [11, 12].

В задаче о вероятности выхода поглощенного кванта, согласно (3), $p(\tau,\tau_0,\eta)=(s+h)/2$. Складывая (24) и (25) при $\zeta=0$, получаем

$$p(\tau,\tau_0,\eta)=P(\tau,\eta)+\frac{h_0-1}{2}\,a(\tau_0,\eta)+\frac{h_\eta-s_\eta}{2}\,b(\tau_0,\eta).$$

Вычисляем (см. (40), $\zeta=0$)

$$\frac{h_0-1}{2}=\frac{q(\tau_0-\tau)-q(\tau)-q(\tau_0)-\alpha\tau}{\alpha\tau_0+2q(\tau_0)}. \tag{45}$$

Согласно (31) и (32) и (4) при $\zeta=0$

$$\frac{1}{2}(s_\eta-h_\eta)=\frac{1}{2}(S_\eta-H_\eta)-a_\eta(\tau_0)\frac{h_0+1}{2}=P_\eta(\tau_0-\tau)-\frac{h_0+1}{2}\,a_\eta(\tau_0). \tag{46}$$

Учитывая, что

$$H_\eta(\tau,\tau_0)=P_\eta(\tau)-P_\eta(\tau_0-\tau),\quad S_\eta(\tau,\tau_0)=P_\eta(\tau_0)+P_\eta(\tau_0-\tau),$$

и

$$P_\eta(\tau)=\int\limits_0^1\frac{P(\tau,\mu)}{\eta+\mu}\,d\mu=\frac{\widetilde{F}(\tau,\eta)}{\eta\varphi(\eta)}\approx\frac{C(\tau)}{\varphi(\eta)} \tag{47}$$

и принимая во внимание, что согласно (21) $a_\eta(\tau)=C(\tau)\,\varphi(\eta)$, находим

$$\begin{aligned}p(\tau,\tau_0,\eta)&=P(\tau,\eta)+\frac{h_0-1}{2}\,a(\tau_0,\eta)+\\&+\frac{b(\tau_0,\eta)}{\varphi(\eta)}\left[C(\tau_0)\frac{h_0+1}{2}-C(\tau_0-\tau)\right].\end{aligned} \tag{48}$$

Если разделить (48) на η и устремить $\eta \to 0$, то получим

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \Phi(\tau) + \frac{h_0 - 1}{2} C(\tau_0). \tag{49}$$

Рассмотрим частный случай, когда $\tau = 0$. Из (45) находим

$$\frac{h_0 - 1}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\alpha\tau_0 + 2q(\tau_0)}. \tag{50}$$

После небольших преобразований из (48) получаем следующую квазиасимптотическую формулу для функции $\varphi(\tau_0, \eta)$ Амбарцумяна

$$\varphi(\tau_0, \eta) = \varphi(\eta) - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{C(\tau_0)\eta}{\alpha\tau_0 + 2q(\tau_0)} [\varphi(\eta) + F(\tau_0, \eta) - \eta C(\tau_0)]. \tag{51}$$

В приближении (17) ее можно переписать и в виде

$$\varphi(\tau_0, \eta) = \varphi(\eta) - \frac{\tilde{F}(\tau_0, \eta)\sqrt{3}}{\alpha\tau_0 + 2q(\tau_0)} [\varphi(\eta) + F(\tau_0, \eta) - \tilde{F}(\tau_0, \eta)], \tag{52}$$

интересном тем, что при $\tau_0 = 0$ она точна: $\varphi(0, \eta) = 1$.

6. *Функция* $C(\tau)$. Функция $C(\tau)$ определяется как коэффициент пропорциональности в выражении (17): $\tilde{F}(\tau, \zeta) \approx C(\tau)\zeta$. Поскольку оно приближенное, то функция $C(\tau)$ обладает некоторой неопределенностью, тем большей, чем меньше τ. В пределах этой неопределенности положим, например, в (17) $\zeta = 1$:

$$C(\tau) = \tilde{F}(\tau, 1). \tag{53}$$

Тогда таблица этой функции дается последней строкой табл. 1:

Таблица 2

ФУНКЦИЯ $C(\tau)$

τ	0	0.02	0.05	0.1	0.2	0.4	0.7	1	∞
$C(\tau)$	1.91	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.76	1.75	$1.75 = \sqrt{3}$
δ	0.15	0.13	0.10	0.06	0.05	0.03	0.01	0.005	0

Во второй строке табл. 2 приведен порядок неопределенности

$$\delta = \frac{C(\tau)}{\sqrt{3}} - 1 \sim \frac{\delta C}{C}. \tag{54}$$

При больших τ, $C(\tau)\to\sqrt{3}$, и наши формулы, учитывающие отличие функции $C(\tau)$ от $C(\infty)=\sqrt{3}$, переходят в соболевские асимптотики.

Поскольку $C(\tau)$ содержит неопределенность $\sim\delta$, то важно выяснить, насколько эта неопределенность может повлиять на численные результаты. Для этого рассмотрим, например, формулу (44) для функции источников.

Варьируем выражение (44) по $C(\tau_0)$:

$$\frac{\delta B}{\delta C}=\frac{\delta B}{\delta\alpha}\frac{\delta\alpha}{\delta C}=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{(2\tau-\tau_0)\,q(\tau_0)-\tau_0\,[q(\tau_0-\tau)-q(\tau)]}{[\alpha\tau_0+2q(\tau_0)]^2}. \tag{55}$$

Заметим, что при $\tau=\tau_0/2$, для середины слоя, как и для $\tau_0=0$, формула (44), согласно (55), дает точное выражение для B, то есть, $\delta B=0$, независимо от выбора значения C. Учитывая, что $B>1/2$, легко оценить величину ошибки $\delta B/B$, обусловленной неопределенностью выбора функции C. Оказывается, что при всех τ и τ_0 $\delta B/B\leq 0.5\,\%$. Итак, в пределах приближения (17), неопределенность в функции $C(\tau_0)$, видимо, не должна существенно влиять на наши результаты.

Ниже (таблица 3) приводятся результаты вычислений, проведенных по квазиасимптотической формуле (52) для функции Амбарцумяна $\varphi(\tau_0,\eta)$. При этом нами использованы таблица 22 работы [7] для $F(\tau,\eta)$ и таблица 1 для $\bar{F}(\tau,\xi)$, дающие значения этих функций с точностью до единицы третьего знака. Результаты также обладают таким порядком точности (и большей). Точные значения $\varphi(\tau_0,\eta)$ для сравнения взяты из таблиц 12 и 6 книг [7, 8].

Таблица 3

ФУНКЦИЯ $\varphi(\tau_0,\eta)$

τ_0 \ η	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
0.1	1.000	1.132	1.148	1.153	1.156	1.162	прибл.
	1.00	1.13	1.15	1.15	1.16	1.16	точн.
0.2	1.000	1.197	1.239	1.251	1.262	1.266	прибл.
	1.000	1.198	1.236	1.251	1.259	1.265	точн.
0.4	1.000	1.264	1.353	1.392	1.416	1.428	прибл.
	1.000	1.261	1.349	1.390	1.413	1.429	точн.
1	1.000	1.326	1.509	1.624	1.702	1.757	прибл.
	1.000	1.327	1.510	1.626	1.703	1.757	точн.

Полученные нами квазиасимптотические решения переходят в асимптотические решения Соболева при больших τ_0, когда $C(\tau_0)\to\sqrt{3}$.

Одновременно это означает замену всех величин на соответствующие асимптотические, например, $\alpha \to 1$, $P(\tau_0, \eta) \to (\sqrt{3}/2)\,\eta\varphi(\eta)$, $a(\tau_0, \eta) \to (\sqrt{3}/2)\,\eta\varphi(\eta)$, $b(\tau_0, \eta) \to 0$ и т. д. Другими словами, квазиасимптотические решения учитывают отличие функции $C(\tau_0)$ от $C(\infty) = \sqrt{3}$ при малых τ_0. По этой причине параметр $\delta = C(\tau_0)/\sqrt{3} - 1$ можно назвать малым параметром квазиасимптотической теории. В этом смысле асимптотические решения Соболева соответствуют нулевому приближению по параметру δ, то есть, пренебрежению членами порядка и выше δ. Наша же квазиасимптотическая теория соответствует учету также членов порядка δ, но пренебрежению величинами $\sim \delta^2$. Например, приближенное равенство нулю b_1 (29) на самом деле означает, что $b_1 \sim \delta^2$.

В соответствии с этим, и закон сохранения числа фотонов при чистом рассеянии, $Z_0(\tau, \zeta) = 1$, выполняется с точностью до членов порядка δ^2. В худшем случае, при $\tau = 0$,

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(\mu)\,d\mu = \frac{1}{2}\int_0^1 (1 + 1.91\,\mu)\,d\mu = 0.98,$$

закон сохранения справедлив с точностью до 2%.

7. *Приложение.* Множество полезных соотношений и интегралов можно найти из полугруппового соотношения [1, 4, 14, 15]

$$Y(\tau_1 + \tau_2, \eta, \zeta) = \int_0^1 Y(\tau_1, \eta, \mu)\, Y(\tau_2, \mu, \zeta)\, d\mu \tag{56}$$

или из

$$Z(\tau_1 + \tau_2, \eta, \zeta) = \int_0^1 Y(\tau_1, \eta, \mu)\, Z(\tau_2, \mu, \zeta)\, d\mu$$

при подстановке в них явного выражения* для Y [1, 4]:

$$Y(\tau, \eta, \zeta) = \frac{\lambda}{2}\,\eta\varphi(\eta)\,\frac{F(\tau, \eta) - F(\tau, \zeta)}{\eta - \zeta} + e^{-\tau/\eta}\,\delta(\eta - \zeta) \tag{57}$$

при значении $\tau = \tau_0$, или подстановке $Z(\tau_0, \mu, \zeta)$ из (5), и имея в виду раз-

---

* Это выражение впервые получено в неопубликованной работе В. В. Иванова в 1958 г.

личные соотношения между величинами Y, Z, F, $\bar{F}$, P и φ, приведенные в [4], а также используя их асимптотические выражения при $\tau_2 \to \infty$. Мы приводим только основные интегралы.

Нижеследующие выражения справедливы при произвольном значении λ.

$$\int_0^1 \frac{Z(\tau_1, \mu, \zeta)}{\mu + \eta_i} F(\tau_2, \mu)\, d\mu = \frac{\bar{F}(\tau_1 + \tau_2, \eta_i) - \bar{F}(\tau_1 + \tau_2, \zeta)}{\eta_i - \zeta} - \frac{\bar{F}(\tau_2, \eta_i)}{\varphi(\eta_i)} \frac{\bar{F}(\tau_1, \eta_i) - \bar{F}(\tau_1, \zeta)}{\eta_i - \zeta}. \tag{П.1}$$

Полагая $\tau_2 = 0$, находим

$$\int_0^1 \frac{Z(\tau, \mu, \zeta)}{\mu + \eta_i}\, d\mu = \frac{1}{\varphi(\eta_i)} \frac{\bar{F}(\tau, \eta_i) - \bar{F}(\tau, \zeta)}{\eta_i - \zeta}. \tag{П.2}$$

Указанным путем находится и интеграл

$$\frac{\lambda}{2} \eta_i \int_0^1 \frac{Z(\tau, \mu, \zeta)}{\eta_i - \mu}\, d\mu = \frac{\lambda}{2} \eta_i \frac{e^{-\tau/\zeta}}{\eta_i + \zeta} - \Lambda(\eta_i)\, Z(\tau, \eta_i, \zeta), \tag{П.3}$$

где $\Lambda(\eta_i) = 1 - \frac{\lambda}{2} \eta_i \ln \frac{1 + \eta_i}{1 - \eta_i}$. Это выражение можно рассматривать как сингулярное интегральное уравнение для $Z(\tau, \eta_i, \zeta)$, обращающееся, в частности (при $\tau = 0$ и $\zeta = 0$), в известные сингулярные уравнения для $R_\infty(\eta_i, \zeta)$ и $P(\tau, \eta_i)$.

Формулы (П.1)—(П.3) справедливы при любых значениях η_i, в частности, и при $\eta_i = 1/k$. Например, из (П.3) при $\eta_i = 1/k$ получаем

$$\int_0^1 \frac{Z(\tau, \eta, \zeta)}{1 - k\eta}\, d\eta = \frac{e^{-k\tau}}{1 + k\zeta}. \tag{П.4}$$

Выше в работе были использованы выражения для нескольких моментов $Z_n(\tau, \zeta) = \int_0^1 \eta^n Z(\tau, \eta, \zeta)\, d\eta$. Укажем, как их можно вычислить.

Полагая в (П.2) $\eta=0$, имеем

$$Z_{-1}(\tau,\zeta)=\int_0^1 \frac{Z(\tau,\eta,\zeta)}{\eta}\,d\eta=\frac{\widetilde{F}(\tau,\zeta)}{\zeta}. \tag{П.5}$$

Это следует непосредственно и из определения (7) функции $\widetilde{F}$.

Из дифференциального уравнения для $P(\tau,\eta)$ интегрированием по η находим [7]

$$P_0(\tau)=1-\sqrt{1-\lambda}\,Q(\tau). \tag{П.6}$$

Здесь $Q(\tau)=1+\int_0^\tau \Phi(t)\,dt$, а при чистом рассеянии $\lambda=1$,

$$Q(\tau)=\sqrt{3}\,[\tau+q(\tau)],$$

где $q(\tau)$ — функция Хопфа.

Вычислим $Z_0(\tau,\zeta)$. Непосредственное интегрирование выражения (5) дает

$$Z_0(\tau,\zeta)=\int_0^1 Z(\tau,\eta,\zeta)\,d\eta=\frac{\lambda}{2}\int_0^1\frac{(\eta+\zeta)-\zeta}{\eta+\zeta}\varphi(\eta)[F(\tau,\eta)+\widetilde{F}(\tau,\zeta)]\,d\eta=$$
$$=P_0(\tau)+\frac{\lambda}{2}\varphi_0\widetilde{F}(\tau,\zeta)-\zeta Z_{-1}(\tau,\zeta)=P_0(\tau)-\sqrt{1-\lambda}\,\widetilde{F}(\tau,\zeta). \tag{П.7}$$

Найдем $Z_1(\tau,\zeta)$ для случая чистого рассеяния. Для этого разложим выражение (П.4) по степеням малого k:

$$\int_0^1 Z(1+k\eta+\cdots)\,d\eta=Z_0+kZ_1+\cdots=(1-k\tau+\cdots)(1-k\zeta+\cdots)$$

Подставив сюда Z_0 из (П.7) и устремив $k\to0$, получим

$$Z_1(\tau,\zeta)=q(\tau)-\zeta+\widetilde{F}(\tau,\zeta)/\sqrt{3}. \tag{П.8}$$

В частности, при $\zeta=0$ отсюда следует

$$P_1(\tau)=q(\tau). \tag{П.9}$$

Аналогично можно найти следующие моменты Z_n для случая чистого рассеяния, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях k в разложении по степеням k выражения (П.4).

Соответствующие интегралы, содержащие диффузную часть Y, получаются из приведенных формул заменой [4]

$$\zeta \to -\zeta_0, \quad Z(\tau, \tau_0, \zeta) \to Y_{\text{диф}}(\tau, \tau_0, \zeta), \quad \bar{F}(\tau, \zeta) \to -F(\tau, \zeta). \qquad (\text{П}.10)$$

За внимание к работе и обсуждение результатов автор выражает благодарность академику В. А. Амбарцумяну, член-корр. АН СССР В. В. Соболеву и Э. Х. Даниеляну. Последний вычислил интеграл (П.7) и другим путем получил (П.8). Автор выражает глубокую признательность В. В. Иванову за полезное обсуждение работы и ценные замечания, направленные к ее улучшению

Бюраканская астрофизическая обсерватория

THE QUASIASYMPTOTIC SOLUTIONS OF THE RADIATIVE TRANSFER PROBLEM IN AN OPTICALLY FINITE SHELL. I. CONSERVATIVE SCATTERING

M. A. MNATSAKANIAN

The quasiasymptotic solutions of the radiative transfer problem in an optically finite shell in the case of monochromatic isotropic conservative scattering are obtained. These solutions are in fact asymptotic ones but they are more correct than the well known Sobolev's asymptotic solutions and can be practically applied to a shell of an arbitrary thickness. If the thickness is very large they turn into Sobolev's asymptotics.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. А. Мнацаканян*, ДАН, 255, № 5, 65, 1975
2. *В. А. Амбарцумян*, Научные труды, т. 1, Ереван, 1960.
3. *М. А. Мнацаканян*, Сообщ. Бюраканской обс., 46, 93, 1975.
4. *Э. Х. Даниелян, М. А. Мнацаканян*, Сообщ. Бюраканской обс., 46, 101, 1975.
5. *В. А. Амбарцумян*, ДАН СССР, 38, 257, 1943.
6. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 155, 316, 1964.
7. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГИТТЛ, М., 1956.
8. *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
9. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
10. *G. Yamamoto*, Sci. Rept. Tohoku University, ser. 5, Geophys. 7, 1, 1955.
11. *J. King*, Ap. J., 124, 406, 1956.
12. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 39, 229, 1962.
13. *В. А. Амбарцумян*, Научные труды, т. 1, Ереван, 1960, стр. 212.
14. *В. В. Иванов*, Астрон. ж., 52, 217, 1975.
15. *Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян*, ДАН СССР, 217, 533, 1974.