АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 11 АВГУСТ, 1975 ВЫПУСК 3

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ МЕЖЗВЕЗДНОЙ СРЕДЫ В СФЕРОИДАЛЬНЫХ ГАЛАКТИКАХ

М. Г. АБРАМЯН

Поступила 22 ноября 1974

Исследуется вопрос возможных эллипсоидальных фигур равновесия слоя межзвездной среды (звездных подсистем) внутри сфероидальных галактик. Показано, что наряду со сфероидальными фигурами возможными являются и трехосно-эллипсоидальные фигуры, не являющиеся эллипсоидами Якоби. Исследован вопрос устойчивости сфероидальных фигур и переход к трехосно-эллипсоидальным формам равновесия.

В предыдущих работах этой серии [1—3] был поставлен и решен ряд проблем вложенных фигур равновесия. Полученные новые серии вложенных фигур в виде вытянутых сфероидов, плоских дисков, двуполостных гиперболоидов (вращающихся вокруг оси симметрии) и фигуры вида эллиптических цилиндров и однополостных гиперболоидов (вращающихся вокруг оси, перпендикулярной к их оси симметрии) представляют как теоретический, так и некоторый астрофизический интерес, связанный с морфологией галактик.

В работе [1] были исследованы вопросы равновесия и устойчивости (по отношению к малым поверхностным возмущениям типа $n=m=2$) сфероидальных фигур (межзвездной среды, звездных подсистем), вложенных в другую, большую по размерам сфероидальную систему (в сфероидальную галактику). При этом оказалось, что гравитация внешней сфероидальной системы оказывает стабилизирующее влияние на рассматриваемые осцилляции внутреннего сфероида.

Из теории одиночных эллипсоидальных фигур равновесия известно, что на последовательности сфероидальных фигур (эллипсоидов Маклорена) существует точка, для которой отвечающий ей сфероид имеет нейтральную форму колебания, относящуюся ко второй гармонике. Это означает, что в этой точке начинается разветвление трехосных эллипсоидальных фигур Якоби.

С этой точки зрения, наряду со сфероидальной фигурой равновесия представляет интерес рассмотрение возможности существования трехосно-эллипсоидальных фигур вложенной массы (звездной подсистемы, слоя межзвездной среды) внутри сфероидальной гравитирующей системы (галактики), а также исследование вопроса перехода вложенных сфероидальных фигур к трехосно-эллипсоидальным, что и является целью настоящей работы.

Предполагается, что параметры внешнего сфероида (эксцентриситет — e_0, однородная плотность — ρ_0) заданы, и внутри него вращается твердотельно (Ω) слой межзвездной среды (звездная подсистема (население)) со средней плотностью распределения массы ρ. Так как заранее ищутся эллипсоидальные фигуры равновесия, то мы можем учитывать и эффект самогравитации межзвездной среды (звездной подсистемы).

Исследование проведено по методу вириальных уравнений в тензорном виде, развитому Чандрасекаром в течение шестидесятых годов [4].

1. *Фигуры равновесия.* Для случая, когда ось x_3 направлена вдоль оси вращения, тензорные уравнения вириала для вложенной эллипсоидальной системы имеют вид:

$$W_{ij}^0 + W_{ij} + \Omega^2 (I_{ij} - \delta_{i3} I_{3j}) = -\delta_{ij} \Pi, \tag{1.1}$$

где W_{ij}^0 — тензор энергии гравитационного действия внешнего сфероида на вложенный эллипсоид (в единицах $\pi G \rho$):

$$W_{ij}^0 = -2 C_j \frac{\rho_0}{\rho} I_{ij},$$

$$C_1 = C_2 = \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{e_0^3} \arcsin e_0 - \frac{1-e_0^2}{e_0^2}, \tag{1.2}$$

$$C_3 = \frac{2}{e_0^2} - \frac{2(1-e_0^2)}{e_0^2} \arcsin e_0, \tag{1.3}$$

где e_0 — эксцентриситет внешнего сфероида, W_{ij} — тензор собственной гравитационной энергии эллипсоида межзвездной среды (в ед. $\pi G \rho$)

$$W_{ij} = -2 A_j I_{ij}, \tag{1.4}$$

$$A_j = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{1}{a_j^2 + s} \frac{ds}{\Delta(s)},$$

$$\Delta^2(s) = (a_1^2 + s)(a_2^2 + s)(a_3^2 + s), \tag{1.5}$$

и, наконец, I_{ij} — тензор момента инерции

$$I_{ij} = \frac{m}{5} a_j^2 \delta_{ij}, \tag{1.6}$$

где m — масса эллипсоида межзвездной среды (a_j-полуоси).

Записывая уравнение (1.1) для диагональных элементов, приравнивая правые части, с учетом (1.2), (1.4), (1.6), получим

$$\left(2A_1 + 2\frac{\rho_0}{\rho} C_1 - \Omega^2\right) a_1^2 = \left(2A_2 + 2\frac{\rho_0}{\rho} C_1 - \Omega^2\right) a_2^2 = 2\left(A_3 + \frac{\rho_0}{\rho} C_3\right) a_3^2. \tag{1.7}$$

Далее, исключая из (1.7) угловую скорость Ω, с учетом (1.5), получим соотношение, дающее геометрию возможных эллипсоидальных фигур межзвездной среды (звездных подсистем)

$$(u - v) \left\{ \int_0^\infty (1 - u - v - uvz) \frac{z\,dz}{D^3(z)} - \frac{\rho_0}{\rho} C_3 \right\} = 0, \tag{1.8}$$

где введены следующие обозначения:

$$u = a_3^2/a_1^2, \quad v = a_3^2/a_2^2, \quad D^2(z) = (1 + z)(1 + uz)(1 + vz). \tag{1.9}$$

Здесь возможны два случая:

а) Сфероидальные фигуры ($u = v$) $a_1 = a_2$. Этот случай нами был исследован в работе [1]. Связь параметров системы с угловой скоростью вращения фигуры имеет вид:

$$\Omega^2 = 2[A_1 - (1 - e^2) A_3] + 2\frac{\rho_0}{\rho}[C_1 - (1 - e^2) C_3] = 2e^2 B_{13} + 2\frac{\rho_0}{\rho} C_{13}. \tag{1.10}$$

При этом A_1 и A_3 имеют те же формы, что и C_1 и C_3, только в их выражениях следует вместо e_0 вставить $e = \sqrt{1 - a_3^2/a_1^2}$ — эксцентриситет сфероида межзвездной среды. При этом выражение (1.10) в точности совпадает с уравнением (6) работы [1].

б) Трехосно-эллипсоидальные фигуры ($u \neq v$). Геометрию этих фигур дает соотношение (1.8):

$$\int_0^\infty (1 - u - v - uvz) \frac{z\,dz}{D^3(z)} = \frac{\rho_0}{\rho} C_3. \tag{1.11}$$

Для угловой скорости вращения с помощью уравнений (1.7) находим:

$$\Omega^2 = 2\int_0^\infty \frac{uvz\,dz}{(1+uz)(1+vz)\Delta(z)} + 4\frac{\rho_0}{\rho}C_1. \qquad (1.12)$$

Вспомним, что в данной работе Ω измеряется в единицах $\sqrt{\pi G\rho}$.

Как видно из условия (1.11), геометрия трехосно-эллипсоидальных фигур межзвездной среды сильно зависит от формы галактического сфероида (e_0) и от отношения плотностей ρ_0/ρ. В общем случае, как следует из (1.11), эти фигуры не являются эллипсоидами Якоби и только в случае, когда плотность межзвездной среды намного больше средней плотности звездной системы, они являются эллипсоидами Якоби (т. е., когда гравитацией внешней системы можно пренебречь).

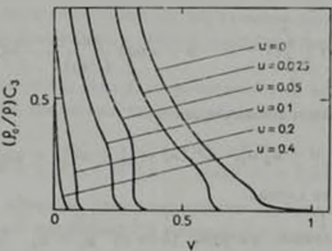

Рис. 1

Каждому значению правой части (1.11) соответствует новая серия фигур трехосных эллипсоидов, для которых условие (1.11) удовлетворяется при иных значениях u и v по отношению к параметрам серии эллипсоидов Якоби. Так как правая часть (1.11) — величина положительная ($2/3 \leqslant C_1(e_0) \leqslant 2$), то у этих серий каждому значению параметра $1 > u > 0$ соответствует значение v из интервала $1 - u > v > 0$, где v меньше по величине, чем v_0 у соответствующего эллипсоида Якоби. Притом, с увеличением величины $(\rho_0/\rho)C_3$ (т. е. внутри более сплющенных галактик или для галактик с большими значениями отношения плотностей ρ_0/ρ), значения v, соответствующие данному u, все больше уменьшаются. Это обстоятельство хорошо видно на рис. 1, где приведены несколько кривых, представляющих зависимость u и v от значений $(\rho_0/\rho)C_3$. С помощью этих данных легко установить, что с увеличением $(\rho_0/\rho)C_3$ полуось, вокруг которой происходит вращение фигуры, все больше уменьшается с одновременным вытягиванием фигуры вдоль одной из осей x_1, или x_2. С этой точки зрения гравитационное действие сфероидальной звездной системы на трехосно-эллипсоидальные фигуры слоя межзвездной среды идентично действию „сплющивающих магнитных полей“ на одиночные трехосно-эллипсоидальные фигуры, рассмотренные в работе [5].

2. *Вторые гармоники форм колебания вложенных сфероидальных фигур.* Линеаризованная форма вириальных уравнений второго порядка, описывающая малые колебания вложенных сфероидальных фигур, ничем не отличается от уравнений, описывающих осцилляции сфероидов Маклорена, кроме того, что здесь фигурирует еще член

$$\delta W_{ij}^{0} = -2\frac{\rho_0}{\rho} C_i N_{ij}, \tag{2.1}$$

учитывающий влияние действия гравитации внешнего сфероида на осцилляции вложенного. В (2.1) через N_{ij} обозначена величина

$$N_{ij} = \int \rho (\xi_i x_j + \xi_j x_i)\, d\vec{x} \equiv N_{i;j} + N_{j;i}. \tag{2.2}$$

Предполагая, что лагранжево перемещение $\vec{\xi}(\vec{x}, t)$ представляется в виде

$$\vec{\xi}(\vec{x}, t) = e^{\lambda t} \vec{\xi}(\vec{x}), \tag{2.3}$$

где λ — надлежащий определению постоянный параметр, линеаризованная форма вириальных уравнений второго порядка [4] примет вид:

$$\lambda^2 N_{i;j} - 2\lambda\Omega\varepsilon_{il3} N_{l;j} = 2\frac{\rho_0}{\rho} C_i N_{ij} + \delta W_{ij} + \Omega^2 (N_{ij} - \delta_{i3} N_{3j}) + \delta_{ij}\delta\Pi. \tag{2.4}$$

Девять уравнений, к которым приводит уравнение (2.4), распадаются на две независимые группы из четырех и пяти уравнений, отличающихся их кратностью по отношению к индексу 3. Уравнения, нечетные по отношению к индексу 3, имеют вид:

$$\lambda^2 N_{3;1} = \delta W_{31} - 2\frac{\rho_0}{\rho} C_1 N_{31} = -2\left(B_{13} + \frac{\rho_0}{\rho} C_1\right) N_{13}, \tag{2.5}$$

$$\lambda^2 N_{3;2} = \delta W_{32} - 2\frac{\rho_0}{\rho} C_1 N_{32} = -2\left(B_{13} + \frac{\rho_0}{\rho} C_1\right) N_{23}, \tag{2.6}$$

$$\lambda^2 N_{1;3} - 2\lambda\Omega N_{2;3} = \left(-2B_{13} - 2\frac{\rho_0}{\rho} C_3 + \Omega^2\right) N_{13}, \tag{2.7}$$

$$\lambda^2 N_{2,3} + 2\lambda\Omega N_{1,3} = \left(-2B_{13} - 2\frac{\rho_0}{\rho} C_3 + \Omega^2\right) N_{23}. \tag{2.8}$$

Здесь мы пользовались равенством [4] (в единицах $\pi G\rho$)

$$\delta W_{ij} = -2B_{ij}N_{ij} + a_i^2\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3} A_{ik}N_{kk}, \tag{2.9}$$

где A_{ij} и B_{ij} — индексные символы, выражающиеся через

$$A_{ij} = a_1a_2a_3\int_0^\infty \frac{ds}{(a_i^2+s)(a_j^2+s)\Delta(s)}, \tag{2.10}$$

$$B_{ij} = a_1a_2a_3\int_0^\infty \frac{sds}{(a_i^2+s)(a_j^2+s)\Delta(s)}. \tag{2.11}$$

В уравнениях (2.5)—(2.8) учтено также, что в данном случае $B_{13}=B_{23}$. Уравнения, четные по отношению к индексу 3, имеют вид:

$$\lambda^2 N_{3,3} = \delta W_{33} + \delta W_{33}^0 + \delta\Pi, \tag{2.12}$$

$$\lambda^2 N_{1,1} - 2\lambda\Omega N_{2,1} = \delta W_{11} + \delta W_{11}^0 + \Omega^2 N_{11} + \delta\Pi, \tag{2.13}$$

$$\lambda^2 N_{2,2} + 2\lambda\Omega N_{1,2} = \delta W_{22} + \delta W_{22}^0 + \Omega^2 N_{22} + \delta\Pi, \tag{2.14}$$

$$\lambda^2 N_{1,2} - 2\lambda\Omega N_{2,2} = \left(-2B_{11} - 2\frac{\rho_0}{\rho} C_1 + \Omega^2\right) N_{12}, \tag{2.15}$$

$$\lambda^2 N_{2,1} + 2\lambda\Omega N_{1,1} = \left(-2B_{11} - 2\frac{\rho_0}{\rho} C_1 + \Omega^2\right) N_{12}. \tag{2.16}$$

Эти уравнения должны быть дополнены условием соленоидальности перемещения $\vec{\xi}(\vec{x})$

$$\frac{N_{11}}{a_1^2} + \frac{N_{22}}{a_2^2} + \frac{N_{33}}{a_3^2} = 0. \tag{2.17}$$

Теперь рассмотрим различные формы осцилляций.

а) *Поперечно-скошенные формы.*

Почленно складывая (2.5) с (2.7), а также (2.6) и (2.8), получаем

$$\left[\lambda^2 + 4B_{13} + 2\frac{\rho_0}{\rho}(C_1 + C_3) - \Omega^2\right] N_{13} - 2\lambda\Omega N_{23} + 2\lambda\Omega N_{3,2} = 0, \tag{2.18}$$

$$\left[\lambda^2 + 4B_{13} + 2\frac{\rho_0}{\rho}(C_1 + C_3) - \Omega^2\right] N_{23} + 2\lambda\Omega N_{13} - 2\lambda\Omega N_{3,1} = 0. \tag{2.19}$$

Исключая из этих уравнений $N_{3,1}$ и $N_{3,2}$ с помощью (2.5) и (2.6), имеем:

$$\lambda\left[\lambda^2 + 4B_{13} + 2\frac{\rho_0}{\rho}(C_1 + C_3) - \Omega^2\right]N_{13} - 2\Omega\left(\lambda^2 + 2B_{13} + 2\frac{\rho_0}{\rho}C_1\right)N_{23} = 0, \tag{2.20}$$

$$\lambda\left[\lambda^2 + 4B_{13} + 2\frac{\rho_0}{\rho}(C_1 + C_3) - \Omega^2\right]N_{23} + 2\Omega\left(\lambda^2 + 2B_{13} + 2\frac{\rho_0}{\rho}C_1\right)N_{13} = 0. \tag{2.21}$$

Для нетривиальных решений N_{13} и N_{23} мы получим

$$\lambda^2\left[\lambda^2 + 4B_{13} + 2\frac{\rho_0}{\rho}(C_1 + C_3) - \Omega^2\right]^2 + 4\Omega^2\left(\lambda^2 + 2B_{13} + 2\frac{\rho_0}{\rho}C_1\right) = 0, \tag{2.22}$$

полагая $\lambda = i\sigma$

$$\sigma\left[\sigma^2 - 4B_{13} - 2\frac{\rho_0}{\rho}(C_1 + C_3) + \Omega^2\right] - 2\Omega\left(\sigma^2 - 2B_{13} - 2\frac{\rho_0}{\rho}C_1\right) = 0 \tag{2.23}$$

и аналогичное уравнение с заменой Ω на $-\Omega$. В случае, когда внешняя система имеет форму сферы ($C_1(0) = C_2(0) = 2/3$), уравнение (2.20) можно разложить на множители:

$$(\sigma - \Omega)\left(\sigma^2 - \sigma\Omega - 4B_{13} - \frac{8}{3}\frac{\rho_0}{\rho}\right) = 0.$$

Корнями этого уравнения являются

$$\sigma = \Omega, \qquad \sigma = \frac{1}{2}\left[\Omega \pm \left(16B_{13} + \frac{32}{3}\frac{\rho_0}{\rho} + \Omega^2\right)^{1/2}\right]. \tag{2.24}$$

Заменяя здесь Ω на $-\Omega$, мы получим остальные корни Подкоренное выражение в (2.21) — величина положительная. Так что сфера устойчива к поперечно-скошенным формам колебаний. Можно показать, что вложенные сфероиды также устойчивы по отношению к рассматриваемым формам осцилляций.

б) *Тороидальные формы.*

Скомбинируем уравнения (2.13)—(2.16) так, чтобы получить пару уравнений:

$$\lambda^2 N_{12} + \lambda\Omega(N_{11} - N_{22}) = 2\left(-2B_{12} - 2\frac{\rho_0}{\rho}C_1 + \Omega^2\right)N_{12}, \tag{2.25}$$

$$\frac{1}{2}\lambda^2(N_{11}-N_{22})-2\lambda\Omega N_{12}=\left(-2B_{11}-2\frac{\rho_0}{\rho}C_1+\Omega^2\right)(N_{11}-N_{22}), \qquad (2.26)$$

где мы пользовались соотношениями (2.1) и (2.9). Перегруппировав в (2.25) и (2.26), получим:

$$\left[\lambda^2+2\left(2B_{11}+2\frac{\rho_0}{\rho}C_1-\Omega^2\right)\right]N_{12}+2\lambda\Omega(N_{11}-N_{22})=0, \qquad (2.27)$$

$$\left[\lambda^2+2\left(2B_{11}+2\frac{\rho_0}{\rho}C_1-\Omega^2\right)\right](N_{11}-N_{22})-4\lambda\Omega N_{12}=0, \qquad (2.28)$$

откуда

$$\left[\lambda^2+2\left(2B_{11}+2\frac{\rho_0}{\rho}C_1-\Omega^2\right)\right]^2+4\lambda^2\Omega^2=0,$$

полагая $\lambda=i\sigma$, получим уравнение

$$\sigma^2-2\left(2B_{11}+2\frac{\rho_0}{\rho}C_1-\Omega^2\right)-2\sigma\Omega=0 \qquad (2.29)$$

и аналогичное уравнение с заменой Ω на $-\Omega$. Корнями уравнения (2.29) являются

$$\sigma=\Omega\pm\left[4B_{11}+4\frac{\rho_0}{\rho}C_1-\Omega^2\right]^{1/2}. \qquad (2.30)$$

Устойчивость определяется знаком подкоренного выражения. Заметим, что когда

$$\Omega^2=2B_{11}+2\frac{\rho_0}{\rho}C_1, \qquad (2.31)$$

то имеем положение нейтральной стабильности ($\sigma=0$), которую можно найти с помощью (1.10): она является корнем уравнения

$$B_{11}-e^2B_{13}+\frac{\rho_0}{\rho}(1-e^2)C_3=0, \qquad (2.32)$$

которое в развернутом виде имеет форму

$$(3+8e^2-8e^4)\arcsin e-e\sqrt{1-e^2}(3+10e^2)=$$

$$=8\frac{\rho_0}{\rho}e^5\frac{\sqrt{1-e_0^2}}{e_0^3}\left(e_0-\sqrt{1-e_0^2}\arcsin e_0\right).$$

Как видно, эта точка (точка бифуркации) сильно зависит от меры сплющенности внешнего гравитирующего сфероида (e_0) и от отношения плотностей ρ_0/ρ. В табл. 1 приведены несколько значений точки бифуркации на последовательности сфероидальной подсистемы при различных значениях e_0 и ρ_0/ρ.

Таблица 1

e_0 \ ρ_0/ρ	0,1	0,5	1
0.500000	0.840589	0.899986	0.932726
0.812670	0.847547	0.912492	0.944273
0.952887	0.856878	0.927069	0.956582
0.990000	0.864299	0.936645	0.964016

Как видно из табл. 1, сплющенность сфероида бифуркации увеличивается как с ростом сплюснутости внешнего гравитирующего сфероида, так и с ростом отношения плотностей ρ_0/ρ.

Легко видеть из формулы (2.30), что при условии

$$\Omega^2 = 4B_{11} + 4\frac{\rho_0}{\rho}C_1, \tag{2.33}$$

$\sigma = \Omega$ является двойным корнем. В этой точке вложенные сфероидальные фигуры становятся динамически неустойчивыми, вследствие существования колебаний с частотой Ω с возрастающей амплитудой. С учетом (1.10), для этой точки находим уравнение

$$2B_{11} - e^2 B_{13} + \frac{\rho_0}{\rho}\left[C_1 + (1 - e^2)C_3\right] = 0. \tag{2.34}$$

Правая часть (2.34) совпадает с подкоренным выражением формулы (9) работы [1], где были рассмотрены вопросы устойчивости вложенных сфероидальных фигур. Здесь мы только напомним, что внешняя сфероидальная система своим гравитационным действием оказывает стабилизирующее влияние на вложенный сфероид.

в) *Пульсационные моды.*

Комбинируем уравнения (2.12)—(2.14) так, чтобы исключить $\delta\Pi$, после чего с учетом (2.2) и (2.1), получим:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\lambda^2(N_{11} + N_{22}) + 2\lambda\Omega(N_{1,2} - N_{2,1}) - \lambda^2 N_{33} = \\ &= \left(-4B_{11} + 2B_{13} - 2\frac{\rho_0}{\rho}C_1 + \Omega^2\right)(N_{11} + N_{22}) + \\ &+ 2\left(3B_{33} - B_{13} + 2\frac{\rho_0}{\rho}C_3\right)N_{33}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

С другой стороны, из уравнений (2.15) и (2.16) получаем

$$\lambda^2 (N_{1,2} - N_{2,1}) = \lambda \Omega (N_{11} + N_{22}). \tag{2.36}$$

Если отбросить корень $\lambda = 0$, то при помощи последнего равенства можно исключить из (2.35) выражение $(N_{1,2} - N_{2,1})$. Таким образом, мы получим

$$\lambda^2 \left[\frac{1}{2} (N_{11} + N_{22}) - N_{33} \right] = \left(-4B_{11} + 2B_{13} - 2\frac{\rho_0}{\rho} C_1 - \Omega^2 \right) (N_{11} + N_{22}) +$$

$$+ 2\left(3B_{33} - B_{13} + \frac{\rho_0}{\rho} C_3 \right) N_{33}.$$

Здесь можно также исключить выражение $(N_{11} + N_{22})$, используя условие соленоидальности (2.15). В результате для частоты колебаний получим уравнение

$$\lambda^2 \left(\frac{3}{2} - e^2 \right) = \left(4B_{11} - 2B_{13} + 2\frac{\rho_0}{\rho} C_1 + \Omega^2 \right) +$$

$$+ 2(1 - e^2) \left(3B_{33} - B_{13} + \frac{\rho_0}{\rho} C_3 \right). \tag{2.37}$$

Подставляя сюда выражение (1.10) для Ω^2, получим другую форму этого уравнения:

$$\lambda^2 \left(\frac{3}{2} - e^2 \right) = 4B_{11} + 4\frac{\rho_0}{\rho} C_1 + 2(1 - e^2)(3B_{33} - 4B_{13}). \tag{2.38}$$

Как видно, гравитирующий внешний сфероид приводит к увеличению ($C_1 > 0$) частоты осцилляций пульсационных мод сфероида межзвездной среды. При этом эффект зависит от меры сплющенности внешнего гравитирующего сфероида и от отношения плотностей ρ_0/ρ.

Правая часть уравнения (2.38) величина всегда положительная, так что вложенный сфероид всегда устойчив по отношению к пульсационным формам колебаний.

3. *Влияние вязкой диссипации на устойчивость сфероидальных фигур.* В предыдущем разделе было показано, что хотя сфероидальные фигуры, вложенные в гравитирующий сфероид, при $\Omega^2 = 2B_{11} + 2\rho_0/\rho C_1$ допускают нейтральную форму колебания, не становятся неустойчивыми в этой точке. Они становятся динамически неустойчивыми лишь в точке определяемой уравнением (2.33). Эти результаты были получены в предположении отсутствия механизма диссипации. В этом разделе будет исследована проблема вековой неустойчивости, связанная с учетом вязкости рассматри-

ваемых вложенных сфероидальных фигур. При этом будем предполагать, что напряжения, вызываемые обычной вязкостью, определяются коэффициентом кинематической вязкости ν.

Исследование основывается опять на линеаризованной форме вириальных уравнений, соответствующим образом обобщенных с тем, чтобы учесть наличие вязких напряжений. Это приводит к тому, что в правой части уравнения (2.4) прибавляется еще член $\delta\Sigma_{ij}$ представляющий вариацию тензора энергии сдвига [4]. Однако эта задача не решается методом предыдущего раздела, так как в общем случае $\delta\Sigma_{ij}$ не выражается через величины N_{ij}. В частности, если ограничиваться приближением больших чисел Рейнольдса, т. е. когда эффекты диссипации считаются малыми и во внимание принимаются лишь в первом порядке, $\delta\Sigma_{ij}$ принимает следующий простой вид [4]:

$$\delta\Sigma_{ij} = 5\nu\lambda\left(\frac{N_{ij}}{a_j^2} + \frac{N_{ji}}{a_i^2}\right), \tag{3.1}$$

что и позволяет пользоваться методом невязкой задачи.

Так как к неустойчивости сфероидальных фигур приводит только тороидальная форма колебаний, то будем исследовать систему уравнений (2.13)—(2.16), в правых частях которых прибавлены члены типа $-5\nu N_{..}/a_1^2$. Система таких уравнений приводит к характеристическому уравнению

$$\sigma^2 - 2\sigma\Omega - 2\left(2B_{11} + 2\frac{\rho_0}{\rho}C_1 - \Omega^2\right) - i\frac{10\sigma\nu}{a_1^2} = 0, \tag{3.2}$$

где $\sigma = -i\lambda$. Но, так как мы рассматриваем приближение больших чисел Рейнольдса, то можно положить $\sigma = \sigma_0 + \nu\sigma_1$, где σ_0 — характеристическая частота для предельного случая невязкого вложенного сфероида (2.30) (для формы колебания, которая становится нейтральной при условии (2.31), в выражении (2.30) соответствует знак «—»), а σ_1 представляет эффект малой вязкости. Тогда из (3.2), с учетом вышесказанного, получим

$$i\nu\sigma_1 = \frac{i5\nu\sigma_0}{a_1^2(\sigma_0 - \Omega)} = -\frac{5\nu}{a_1^2}\,\frac{\left(4B_{11} + 4\frac{\rho_0}{\rho}C_1 - \Omega^2\right)^{1/2} - \Omega}{\left(4B_{11} + 4\frac{\rho_0}{\rho}C_1 - \Omega^2\right)^{1/2}}. \tag{3.3}$$

Из этого уравнения следует, что эта форма колебания возрастает в интервале

$$4B_{11} + 4\frac{\rho_0}{\rho}C_1 > \Omega^2 > 2B_{11} + 2\frac{\rho_0}{\rho}C_1. \tag{3.4}$$

Следовательно, даже самая незначительная вязкость будет вызывать неустойчивость в интервале между нейтральной точкой и точкой начала динамической неустойчивости. Так что выше точки нейтральной устойчивости вложенные сфероидальные фигуры равновесия звездных подсистем и системы межзвездной среды становятся неустойчивыми в вековом смысле. При этом энергетически выгодными состояниями являются вложенные трехосноэллипсоидальные фигуры, рассмотренные нами в разделе 1 настоящей работы.

Приношу искреннюю благодарность профессору С. А. Каплану за обсуждение результатов.

Ереванский государственный
университет

THE ELLIPSOIDAL FIGURES OF EQUILIBRIUM OF INTERSTELLAR MEDIUM INSIDE THE SPHEROIDAL GALAXIES

M. G. ABRAHAMIAN

The question of possible ellipsoidal figures of equilibrium stratum of the interstellar medium (stellar subsets) inside the spheroidal galaxies is considered here. It is shown that side by side with spheroidal figures three-planar ellipsoids are also possible figures not being ellipsoids of Jacoby. The question of stability of spheroidal figures and their transition to three-planar-ellipsoidal forms of equilibrium is also taken into consideration.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Г. Абрамян, С. А. Каплан*, Астрофизика, 10, 565, 1974.
2. *М. Г. Абрамян, С. А. Каплан*, Астрофизика, 11, 191, 1975.
3. *М. Г. Абрамян, С. А. Каплан*, Астрофизика, 11, 319, 1975.
4. *С. Чандрасекар*, Эллипсоидальные фигуры равновесия, Мир, М., 1973.
5. *Р. С. Оганесян, М. Г. Абрамян*, Астрофизика, 9, 401, 1973.