

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 11

АВГУСТ, 1975

ВЫПУСК 3

НЕКОГЕРЕНТНОЕ РАССЕЯНИЕ. V

М. С. ГЕВОРКЯН, Н. Б. ЕНГИБАРЯН, А. Г. НИКОГОСЯН

Поступила 11 июля 1974

Пересмотрена 25 марта 1975

В работе затрагиваются некоторые вопросы, связанные с решением задач переноса излучения в общем случае некогерентного рассеяния. Рассматриваются различные способы представления функции перераспределения в виде билинейного разложения и возникающие при этом вопросы, касающиеся удобства их применения при численных расчетах, а также точности аппроксимации истинного закона перераспределения. Обсуждаются также вопросы существования и единственности решения уравнений типа (2.1) в некоторых функциональных пространствах и приводятся оценки по метрикам соответствующих пространств для близости решений исходного и усеченного уравнений. Приводятся численные результаты, касающиеся профилей спектральных линий, возникающих при диффузном отражении от полубесконечной среды, на которых иллюстрируется влияние на конечный результат различных приближений для закона перераспределения.

В предыдущих частях данной серии [1—4], а также в работах [5, 6] подробно разбирался круг вопросов, касающихся переноса излучения в частотах спектральных линий в общем случае некогерентного рассеяния. Отправным пунктом этих исследований служило представление функции перераспределения в виде

$$r(x', x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k z_k(x') z_k(x), \quad (*)$$

где $\{z_k(x)\}$ — некоторая, нормированная в том или ином смысле, система функций; A_k — неотрицательные постоянные. Указанное представление позволяет выработать новый подход и построить новые схемы, приводящие к существенному упрощению решения задач переноса в спектральной

линии при общем законе перераспределения. В этой связи особое значение приобретают вопросы, связанные с построением и выбором того или иного разложения вида (*). При каждом конкретном законе перераспределения можно указать на несколько удобных способов построения вышеупомянутого разложения. Так, в случае доплеровского уширения линии, когда

$$r(x', x) = \operatorname{erfc}(\max |x'|, |x|) \quad (1)$$

представление вида (*) можно получить, например, разлагая функцию $r(x', x)$ по своим собственным функциям на $(-\infty, \infty)$. В этом случае $A_k = 1/\lambda_k$, где величины λ_k суть собственные значения ядра $r(x', x)$. Ниже мы укажем на другие возможности построения представления (*), причем как в случае доплеровского закона перераспределения, так и в случае, когда уширение линии обусловлено совместным действием эффекта Доплера и затуханием вследствие излучения и столкновений.

Таким образом, в каждом отдельном случае мы располагаем различными способами построения необходимого нам разложения (*), в связи с чем важно выделить те критерии, которыми необходимо руководствоваться при выборе того или иного разложения при решении конкретной физической задачи. При сравнении различных способов мы сталкиваемся, с одной стороны, с вопросами, имеющими сугубо прикладное значение (например, какое из возможных разложений является наиболее удобным с точки зрения численного решения той или иной задачи переноса), с другой стороны — с вопросами, представляющими интерес с математической точки зрения. Первый круг вопросов связан прежде всего со степенью простоты построения разложения (*) и с компактностью вида функций $\lambda_k(x)$. При этом следует также учесть, насколько простой вид имеют системы уравнений, получаемые из уравнений переноса при замене функции перераспределения $r(x', x)$ ее разложением и, наконец, как легко вычисляются фигурирующие в указанных системах и подлежащие определению вспомогательные функции и параметры. Важно также учесть вопросы, связанные с устойчивостью счета и с уменьшением объема машинной памяти.

С другой стороны, как уже было отмечено, возникают вопросы математического характера, связанные с обоснованием законности замены бесконечной системы уравнений усеченной конечной системой в том или ином функциональном пространстве [см. б), и получением оценок погрешностей по соответствующим метрикам.

На некоторые из поставленных здесь вопросов мы постараемся ответить во втором и третьем пунктах настоящей работы. В четвертом пункте будет рассмотрена одномерная задача диффузного отражения излучения в спектральной линии от полубесконечной среды. Будут приведены численные результаты, касающиеся профилей эмиссионных линий, на которых

можно проиллюстрировать влияние на конечный результат предположения о полном перераспределении по частотам, а также некоторые особенности, характерные для разложения функции $r(x', x)$, принятого при выполнении численных расчетов.

1. *Построение представления (*)*. В работе [6] подробно были рассмотрены некоторые методы построения разложения (*) в случае совместного действия эффекта Доплера и затухания, обусловленного излучением и столкновениями. Здесь мы кратко напомним суть некоторых из этих методов.

Как известно, при указанных механизмах уширения функция перераспределения по частотам имеет следующий вид:

$$r(x', x) = \frac{1}{\pi^2 U(0, \sigma)} \int_0^{\infty} \exp(-u^2) f(x, u) f(x', u) du, \quad (2)$$

где

$$f(x, u) = \arctg \frac{x + u}{\sigma} - \arctg \frac{x - u}{\sigma},$$

$$U(y, \sigma) = \frac{\pi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-u^2) du}{(y-u)^2 + \sigma^2} \quad \text{— функция Фойгта.}$$

Здесь $\sigma = \frac{\Delta\nu_D + \Delta\nu_c}{\Delta\nu_D}$, $\Delta\nu_D$ и $\Delta\nu_c$ — ширины линии, обусловленные затуханием вследствие излучения и столкновений, соответственно; $\Delta\nu_D = \frac{v_x}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ — доплеровская ширина линии.

Одним из способов получения представления (*) является разложение функции $f(x, u)$ в ряд по полиномам Эрмита. В этом случае

$$r_k(x) = a_k \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) f(x, u) H_{k-1}(u) du, \quad (3)$$

$$A_k = \frac{a_k}{\pi^2 U(0, \sigma)}, \quad \text{где } a_k = [2^{k-1} (2k-1)! \sqrt{\pi}]^{-1}.$$

Напомним, что полиномы Эрмита задаются посредством

$$H_n(u) = (-1)^n e^u \frac{d^n e^{-u}}{du^n}$$

и являются ортогональной системой функций с весом $\exp(-u^2)$ на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Разложение вида (*) можно также получить непосредственным применением к интегралу в правой части (2) квадратурной формулы Гаусса.

В работе Хаммера [7] приводится следующее разложение функции перераспределения (2):

$$r(x', x) = \frac{2}{\sqrt{\pi} U'(0, z)} \sum_{n=0}^{\infty} [2^{2n+1} (2n+1)!]^{-1} K_{2n}(z, x) K_{2n}(z, x'), \quad (4)$$

где

$$K_{2n}(z, x) = \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{4} - zt\right) \cos xtt^n dt. \quad (5)$$

Заметим, что функцию $K_{2n}(z, x)$ можно представить и в несколько другом виде

$$K_{2n}(z, x) = (-1)^n \frac{d^{2n} U(z, x)}{dx^{2n}} = (-1)^n \frac{z}{V} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-u^2) H_{2n}(u)}{(x-u)^2 + z^2} du.$$

В частности, при $z=0$, то есть в случае, когда учитывается лишь доплеровский механизм перераспределения, имеем

$$K_{2n}(0, x) = (-1)^n \frac{d^{2n} U(x)}{dx^{2n}} = \exp(-x^2) H_{2n}(x). \quad (6)$$

В последнем случае функция перераспределения $r(x', x)$, задаваемая посредством (1), оказывается представленной в виде (*), причем $\{z_k(x) = K_{2k}(0, x)\}$ представляет собой систему функций, ортогональных с весом $\exp(x^2)$ на $(-\infty, \infty)$.

В n -ом приближении функция перераспределения аппроксимируется конечной суммой

$$r_n(x', x) = \sum_{k=1}^n A_k z_k(x') z_k(x). \quad (7)$$

В этой связи представляет несомненный интерес как сравнение приближений различного порядка для одного и того же разложения, так и сравнение друг с другом различных разложений.

Для наглядности такого сравнения на рис. 1 приводятся кривые, изображающие функцию $r(0, x)$ при доплеровском уширении линии. При этом наряду с истинным законом перераспределения, задающимся формулой (1)

(при $x' = 0$), приводятся кривые, рассчитанные по формуле Хаммера, когда берутся первые четыре члена в разложении (4), а также графики, соответствующие четвертому приближению разложения $r(x', x)$ по собственным

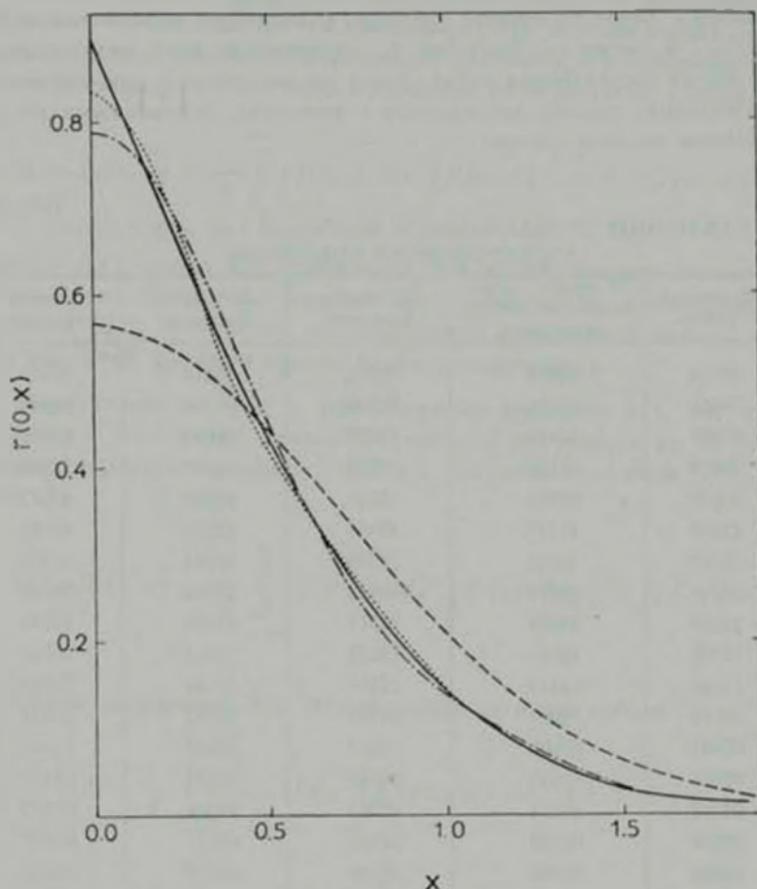


Рис. 1. Функция $r(0, x)$: а) — истинный закон перераспределения, б) — 4-е приближение разложения по собственным функциям, в) — 4-е приближение Хаммера, г) — полное перераспределение по частотам.

функциям и случаю полного перераспределения по частотам. Последний случай, как нетрудно убедиться, совпадает с первым приближением Хаммера. Действительно, с учетом формулы (5) мы находим

$$r(x', x) = \frac{1}{1 - U(0, \sigma)} a_1(x') a_1(x), \quad (8)$$

где $\varphi_1(x) = U(x, 0)$, а в случае доплеровского закона перераспределения $\varphi_1(x) = \exp(-x^2)$, $U(0, 0) = 1$.

Здесь мы приводим также таблицу для значения $r(0, x)$, содержащую помимо перечисленных случаев данные, относящиеся к десятому приближению Хаммера. Более подробные таблицы, содержащие данные для других значений x , а также для значений φ_1 , отличных от нуля, будут приведены в одной из последующих работ. Здесь же мы отметим, что эти результаты качественно хорошо согласуются с выводами, основанными на рассмотряемом частном случае.

Таблица 1

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ К ФУНКЦИИ $r(0, x)$ В СЛУЧАЕ
ДОПЛЕРОВСКОГО УШИРЕНИЯ

	Истинный закон	IV прибл. равно- мерно по совет. функциям	IV прибл. Хаммера	X прибл. Хаммера	Полное перераспр.
0.0	89623	82827	72572	78518	56419
0.1	78656	79516	71348	76559	55858
0.2	69896	70940	67797	71024	54207
0.3	59499	60138	62259	62839	51563
0.4	50657	49491	55248	53263	48677
0.5	42495	41441	47369	43565	43939
0.6	35107	34533	39239	34744	37352
0.7	28554	28817	32412	27365	34564
0.8	22856	23535	24317	21550	29749
0.9	17948	18697	18233	17065	25098
0.1	13340	14413	13281	13641	20755
1.1	10516	10802	09447	10837	16824
1.2	07948	07905	06619	08441	13367
1.3	05943	05576	04622	06356	10410
1.4	04229	04014	03265	04566	07947
1.5	03004	02905	02365	03115	05947
1.6	02096	01940	01768	02021	04362
1.7	01437	01329	01360	01266	03136
1.8	00957	00901	01063	00793	02210
1.9	00639	00605	00829	00521	01526
2.0	00415	00401	00635	00370	01033

Уже беглое знакомство с приведенной таблицей позволяет заключить, что лучше других функцию перераспределения (1) описывает ее разложение по собственным функциям. Однако ниже будут указаны причины, ограничивающие область применения этого разложения. Отметим здесь

также, что обращает на себя внимание медленная сходимость разложения (4).

2. *Разрешимость уравнения переноса в различных функциональных пространствах.* Как известно (см., например, [18]), решение весьма широкого класса задач некогерентного изотропного рассеяния в плоскопараллельной атмосфере сводится к следующему двойному интегральному уравнению:

$$S(\tau, x) = S_0(\tau, x) + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x) dx' \int_0^{\tau} K(\alpha(x')|\tau - \tau'|) S(\tau', x') d\tau'. \quad (9)$$

Функция $K(\tau)$ равна $E_1 \tau$, либо $\exp(-\tau)$, в зависимости от того, рассматривается трехмерная задача, или одномерная. Свободный член уравнения $S_0(\tau, x)$ зависит от конкретной физической задачи, однако здесь вид этой функции нас не будет интересовать.

Параллельно введем в рассмотрение функцию $\bar{S}(\tau, x)$, удовлетворяющую усеченному уравнению, которое получается из (9) заменой функции перераспределения $r(x', x)$ частичной суммой (7) разложения (*)

$$\bar{S}(\tau, x) = S_0(\tau, x) + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} r_n(x', x) dx' \int_0^{\tau} K(\alpha(x')|\tau - \tau'|) \bar{S}(\tau', x') d\tau'. \quad (10)$$

Введем операторы A и A_n , задающиеся посредством

$$\begin{aligned} AS &= \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x) dx' \int_0^{\tau} K(\alpha(x')|\tau - \tau'|) S(\tau', x') d\tau', \\ A_n S &= \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} r_n(x', x) dx' \int_0^{\tau} K(\alpha(x')|\tau - \tau'|) S(\tau', x') d\tau'. \end{aligned} \quad (11)$$

Указанные операторы рассмотрим в пространствах B_1 и B_2 , определяемых следующим образом:

$$S(\tau, x) \in B_1, \text{ если } \|S\|_{B_1} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\tau} |S(\tau, x)| d\tau < +\infty$$

$$S(\tau, x) \in B_2, \text{ если } \|S\|_{B_2} = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx \left(\int_0^{\tau} |S(\tau, x)| dx \right)^2 \right\|^{1/2} < +\infty,$$

где $\rho(x)$ — некоторая весовая функция.

Нетрудно показать, что оператор A отображает пространство B_2 в себя, причем

$$\|A\| \leq q = \nu(\tau_0), \quad (12)$$

где

$$\nu(\tau_0) = \begin{cases} \int_0^{\tau_0} E_1 \tau d\tau = 1 - E_1\left(\frac{\tau_0}{2}\right), & \text{в трехмерном случае} \\ \int_0^{\tau_0} e^{-\tau} d\tau = 1 - e^{-\tau_0}, & \text{в одномерном случае} \end{cases} \quad (13)$$

Во втором случае оператор A является оператором сжатия, если только

$$A_0^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} g^2(x', x) \frac{\rho(x)}{\rho(x')} dx dx' < +\infty, \quad (14)$$

где $g(x', x) = r(x', x)/z(x')$.

Выражение для интеграла в левой части неравенства (14) указывает на особую роль весовой функции $\rho(x) = 1/u(x)$. Действительно, в этом случае помни того, что выполняется неравенство (14), подынтегральное выражение становится симметричной функцией относительно x и x' . Необходимо также отметить, что такой выбор весовой функции позволяет значительно упростить решение задач некогерентного рассеяния, что в первую очередь следует отнести к методу решения, предложенному в [6]. Исходя из указанных преимуществ и ряда других соображений, о которых пойдет речь ниже, выбор в качестве весовой функции $\rho(x) = 1/u(x)$ следует, по-видимому, признать наиболее естественным. С другой стороны, для выполнения условия (14) необходимо, чтобы функция $r(x', x)$ допускала разложение вида (*), где $\{z_k(x)\}$ представляла бы собой ортонормированную с весом $1/u(x)$ систему функций, а числа A_k удовлетворяли условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 < +\infty,$$

что представляет собой, по сути дела, записанное в иной форме неравенство

(14), так что в этом случае $A_0^2 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2$. Как нетрудно теперь убедиться,

представление Хаммера (4) для функции перераспределения представляет собой разложение вида (*), причем в этом случае

$$A_{11}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} = 1,232\dots$$

Как было установлено выше, оператор A является оператором сжатия в $B_2(1/a)$, если только $\lambda\mu(\tau_0) < 1/A_0$. В силу принципа сжатых отображений уравнение (9) при $q < 1$ имеет единственное решение в пространствах B_1 и B_2 , причем для $\|S\|$ справедлива оценка

$$\|S\| < \frac{\|S_1\|}{1-q}.$$

Переходя далее к оценке близости функций S и \bar{S} по метрикам B_1 и $B_2(1/a)$, введем функцию $U(\tau, x) = \bar{S}(\tau, x) - S(\tau, x)$, а также $\Delta_n(x', x) = r(x', x) - r_n(x', x)$, тогда с учетом (11) будем иметь:

$$U = U_0 + A_n U,$$

где

$$U_0(\tau, x) = - \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_n(x', x) dx' \int_0^{\tau} S(\tau', x') K(a(x')|\tau - \tau'|) d\tau'.$$

Из приведенного соотношения имеем

$$\|U\| < \frac{\|U_0\|}{1-q_n} = \frac{|A_n - A|}{1-q_n} \|S\|.$$

Тогда для относительной погрешности, образующейся при замене уравнения (9) на (10), получаем

$$\delta = \frac{\|U\|}{\|S\|} = \frac{|A_n - A|}{1-q_n},$$

причем в случае, когда $B = B_2$

$$|A_n - A| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

3. *Разделение переменных.* В настоящем пункте мы остановимся на применении метода разделения переменных к решению одномерной задачи переноса, что позволит по-новому взглянуть на значение весовой функции $\rho(x) = 1/\alpha(x)$ и задачах некогерентного рассеяния. Будет также предложен новый подход к приближенному решению задачи в случае доплеровского уширения линии. Приложение метода разделения переменных к задачам переноса наиболее полно освещается Кейзом [9]. Нижеизложенные результаты не опираются на теорию Кейза и представляют собой, по сути дела, первый шаг к изучению задач некогерентного рассеяния указанным методом.

Рассмотрим следующую задачу

$$\pm \frac{dl}{dz} = -\alpha(x) I^\pm(z, x) \pm \frac{h}{2} \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x) [I^+(z, x') + I^-(z, x')] dx', \quad (15)$$

$$I^-(0, x) = I_0(x); \quad I^-(z_0, x) = 0. \quad (16)$$

Для простоты здесь будем считать, что $I_0(x) = O(\alpha(x))$, при $x \rightarrow \infty$, хотя нижеследующие соображения можно провести и для классической задачи Шустера об образовании линий поглощения.

Ищем специальные решения однородного уравнения (15) в виде

$$I(z, x) = g_\pm(x) e^{\pm sz},$$

где $g_\pm(z)$, вообще говоря, являются обобщенными функциями. Тогда из (15) имеем

$$[z(x) \pm s] g_\pm(x) = \frac{h}{2} \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x) U(x') dx', \quad (17)$$

где введено обозначение

$$U(x) = g_+(x) + g_-(x).$$

Далее, умножая первое из уравнений (17) на $\alpha(x) - s$, а второе — на $\alpha(x) + s$, а затем сложив результаты, для определения функции $U(x)$ получаем следующую задачу на собственные значения:

$$[\alpha^2(x) - s^2] U(x) = h\alpha(x) \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x) U(x') dx'. \quad (18)$$

Из физических соображений можно ожидать, что спектр задачи (18) — непрерывный и заключен в промежутке $[-1, 1]$. Не вдаваясь в математические

тонкости рассматриваемого вопроса, остановимся на некоторых результатах, представляющих интерес с точки зрения наших исследований.

Докажем, что собственные функции задачи (18), соответствующие различным значениям параметра s^2 , представляют собой ортогональную с весом $1/\alpha(x)$ систему функций.

Действительно, пусть функции $U_k(x)$ ($k=1, 2$) удовлетворяют уравнению (18) при $s^2 = s_k^2$, соответственно, и $s_1^2 \neq s_2^2$:

$$[\alpha^2(x) - s_k^2] U_k(x) = \alpha(x) \int_{-\infty}^{+\infty} r(x', x) U_k(x') dx' \quad (k=1, 2). \quad (19)$$

Умножая первое из уравнений (19) на $U_2(x)/\alpha(x)$ и интегрируя по x , получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x) U_1(x) U_2(x) dx - s_1^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_1(x) U_2(x)}{\alpha(x)} dx = \\ = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(x', x) U_1(x') U_2(x) dx' dx. \end{aligned}$$

Аналогично, из второго уравнения имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x) U_1(x) U_2(x) dx - s_2^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_1(x) U_2(x)}{\alpha(x)} dx = \\ = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(x', x) U_1(x) U_2(x') dx dx'. \end{aligned}$$

Вычтя из первого соотношения второе, с учетом симметричности функции $r(x', x)$ получаем:

$$(s_1^2 - s_2^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_1(x) U_2(x)}{\alpha(x)} dx = 0,$$

откуда непосредственно вытекает наше утверждение.

Доказанное свойство ортогональности еще раз указывает на органическую связь весовой функции $1/\alpha(x)$ с задачами некогерентного рассеяния.

Построение сингулярных собственных функций задачи (18) сопряжено со значительными аналитическими трудностями. Здесь мы более подробно остановимся на одном важном частном случае, когда указанные собственные функции можно приближенно построить относительно легко, что представляет определенный интерес с точки зрения численного решения задачи (15). В случае доплеровского ушьярения линии, когда функция перераспределения $r(x', x)$ задается посредством (1), уравнение (18) записывается в виде

$$[e^{-2x} - s^2] U(x) = 2ie^{-x} [\Phi(x) y(x) + z(x)], \quad (20)$$

где введены следующие обозначения

$$y(x) = \int_0^x U(t) dt; \quad z(x) = \int_0^{\infty} \Phi(t) U(t) dt; \quad \Phi(x) = \int_x^{\infty} e^{-t} dt.$$

Умножая (20) на $\exp(x^2)$ и дифференцируя по x , относительно $y(x)$ получаем следующее уравнение

$$\frac{d}{dx} \left[(e^{-x^2} - s^2 e^{x^2}) \frac{dy}{dx} \right] + 2ie^{-x^2} y = 0 \quad (21)$$

с краевыми условиями

$$y(0) = 0, \quad y'(x) = 0 (e^{-x^2}), \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Полученная задача представляет собой новый тип спектральных задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Ее принципиальное отличие от классической задачи Штурма—Лиувилля заключается в том, что параметр s^2 стоит при старшей производной.

Решение задачи (21—22) сообщает локальный экстремум следующему функционалу:

$$J(y) = \int_0^{\infty} [(e^{-x^2} - s^2 e^{x^2}) y'^2 - 2ie^{-x^2} y^2] dx, \quad (23)$$

Применяя метод, родственной с методом Рунца, можно приближенно построить собственные функции нашей задачи.

Введем для этого координатные функции

$$\sigma_m(x) = \int_0^x \exp(-mt^2) dt \quad m = 1, 2, \dots$$

которые удовлетворяют граничным условиям вида (22). Экстремали функционала $J(y)$ ищем в пространстве линейных комбинаций координатных функций $\sigma_m(x)$.

$$y_k(x) = \sum_{m=1}^n c_{mk} \sigma_m(x); \quad U_k(x) = \sum_{m=1}^n c_{mk} \exp(-mx^2).$$

Тогда для определения постоянных c_{mk} имеем следующую однородную систему

$$\sum_{m=1}^n c_{mk} [\beta_{mj} - s_k^2 x_{mj}] = 0,$$

где величины s_k^2 определяются из характеристического уравнения

$$\det \|\beta_{mj} - s_k^2 x_{mj}\| = 0,$$

где

$$\beta_{mj} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{m+j+1}} - \frac{2k}{\sqrt{mj}} \arcsin \sqrt{\frac{m_j}{(m+1)(j+1)}} \\ x_{mj} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{m+j-1}}$$

Теперь общее решение исходной задачи (15) записывается в виде

$$I^*(\tau, x) = \sum_{k=-n}^n L_k (1 - s_k e^{\tau}) U_k(x) e^{s_k^2 x^2},$$

причем $s_{-k} = -s_k$.

Постоянные интегрирования L_k можно определить из условий

$$|I^*(0, x) - I_0(x)|_{L_i} = \min$$

$$|I^*(\tau_0, x)|_{L_i} = \min,$$

что приводит к линейной алгебраической системе относительно L_k ($k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$).

В заключение настоящего пункта заметим, что в случае полного перераспределения по частотам решение уравнения (19) имеет вид:

$$U(x) = \frac{Ca^2(x)}{x^2(x) - s^2}$$

и в этом частном случае с успехом может быть применен метод Кейза

4. *Одномерная задача диффузного отражения от полубесконечной среды.* В настоящем разделе мы рассмотрим задачу о диффузном отражении излучения в частотах спектральной линии от одномерной полубесконечной среды. На примере этой несложной задачи наглядно можно проиллюстри-

ровать влияние того или иного представления функции перераспределения на наблюдаемые характеристики поля излучения. Параллельно мы рассмотрим ряд других вопросов, представляющих известный интерес и имеющих самостоятельное значение.

Закон отражения от одномерной полубесконечной среды можно описать функцией $\rho(x, x')$, имеющей следующий вероятностный смысл: если на среду падает квант частоты x' , то $\rho(x, x') dx$ представляет собой вероятность того, что после многократных рассеяний отразится из среды квант с частотой, лежащей в интервале $x, x + dx$. Применением принципа инвариантности Амбарцумяна [10] для функции $\rho(x, x')$ получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} [\alpha(x) + \alpha(x')] \rho(x, x') &= \frac{\lambda}{2} r(x, x') + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, x'') r(x'', x') dx'' + \\ &+ \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} r(x, x'') \rho(x'', x') dx'' + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, x'') dx'' \int_{-\infty}^{\infty} r(x'', t) \rho(t, x') dt. \end{aligned} \quad (24)$$

Займемся вопросом сходимости последовательных приближений к решению (24). Рассмотрим с этой целью итерационный процесс, определяемый посредством

$$\begin{aligned} [\alpha(x) + \alpha(x')] \rho_{n-1}(x, x') &= \frac{\lambda}{2} r(x, x') + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(x, x'') r(x'', x') dx'' + \\ &+ \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} r(x, x'') \rho_n(x'', x') dx'' + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(x, x'') dx'' \int_{-\infty}^{\infty} r(x'', t) \rho_n(t, x') dt \\ \rho_0(x, x') &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Нетрудно убедиться, что последовательность $\rho_n(x, x')$ обладает следующими свойствами: а) $\rho_n(x, x') \geq 0$; б) $\rho_n(x, x')$ монотонно возрастает по n ; в) $\rho_n(x, x') = \rho_n(x', x)$ для всех $n > 0$.

Методом индукции докажем, что имеет место оценка:

$$I_n(x') = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(x, x') dx \leq t. \quad (26)$$

Действительно, пусть неравенство (26) выполняется для некоторого λ . Интегрируя обе части (25) по x и учитывая (26), получаем:

$$\beta_{n+1}(x') + \lambda(x') I_{n+1}(x') \leq \lambda a(x') + i\beta_n(x'), \quad (27)$$

где

$$\beta_n(x') = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(x) \rho_n(x, x') dx.$$

Если теперь принять во внимание, что в силу свойства (6)

$$\beta_{n+1}(x') \geq \beta_n(x') \geq i\beta_n(x'),$$

то из (27) приходим непосредственно к оценке (26).

Из доказанной оценки и известной теоремы Леви [11] следует сходимость итераций $\rho_n(x, x')$ к решению уравнения (24), при этом $\rho(x, x') = \rho(x', x)$. Можно также доказать, что предел последовательности $\rho_n(x, x')$ является единственным решением уравнения (24), удовлетворяющим требованию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, x') dx' \leq 1,$$

вытекающему из вероятностного смысла этой функции.

Нетрудно также показать, что в консервативном случае ($\nu = 1$)

$$\text{справедливо равенство } I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, x') dx' = 1.$$

В заключение, остановимся на решении уравнения (24). Заменяя $r(x', x)$ ее разложением (9), получаем

$$\rho(x, x') = \frac{\lambda}{2} \frac{\sum_{k=1}^n A_k \varphi_k(x) \varphi_k(x')}{a(x) + a(x')},$$

где

$$\varphi_n(x) = \varphi_n(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, x') \varphi_n(x') dx'.$$

Подставляя в полученное соотношение выражение для $\rho(x, x')$, при-

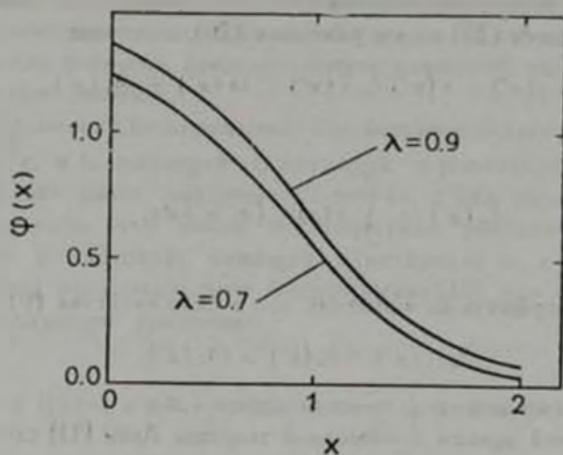


Рис. 2. Функция $\varphi(x)$ в случае полного перераспределения по частотам.

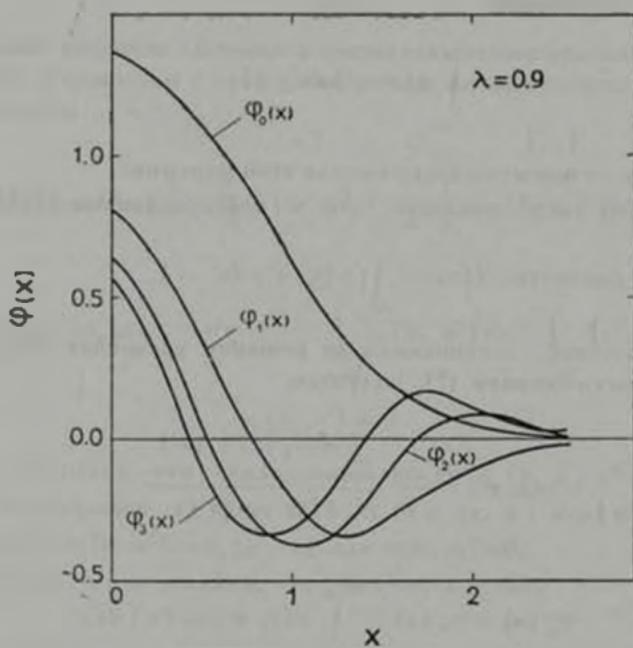


Рис. 3. Функции $\varphi_m(x)$ в случае четвертого приближения Хаммера.

ходим к следующей системе уравнений относительно функций $\varphi_m(x)$:

$$\varphi_m(x) = a_m(x) + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_k(x) \int \frac{\varphi_k(x') \varphi_m(x')}{\alpha(x) + \alpha(x')} dx'. \quad (28)$$

Ниже мы приводим результаты численных расчетов, относящихся к 1-му (полное перераспределение по частотам), 4-му и 8-му приближениям Хаммера, а также к случаю разложения функции перераспределения $r(x', x)$ по собственным функциям (4-ое приближение). При этом интеграл, входящий в (28), был заменен интегральной суммой согласно квадратурной формуле Гаусса—Эрмита.

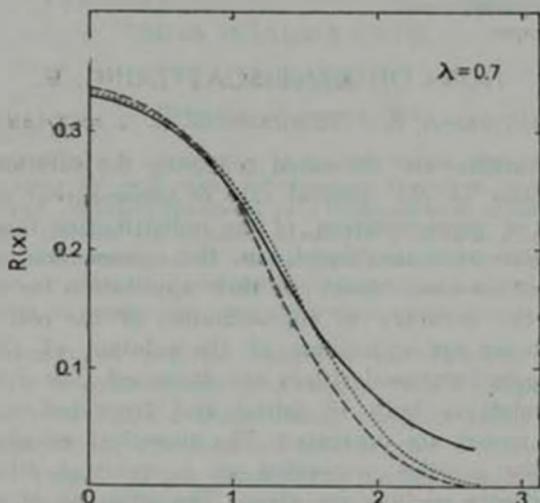


Рис. 4. Профили спектральных линий: а) — 4-е (8-е) приближение Хаммера б) полное перераспределение по частотам, в) - - - - случай разложения по собственным функциям (4-е приближение).

На приведенных рисунках даются функции $\varphi(x)$ и $\varphi_m(x)$ для случаев полного перераспределения по частотам и 4-го приближения Хаммера, соответственно.

Далее, на рис. 4 изображены профили спектральных линий для некоторых приближенных случаев. Различия между данными, полученными на основе 4-го и 8-го приближений Хаммера незначительное (в четвертом знаке после запятой и меньше), ввиду чего указанным случаям на рисунке соответствует одна кривая. Из приведенных графиков можно заключить о удовлетворительном согласии между различными приближениями соответствующими 4-му (8-му) приближению Хаммера, с одной стороны, и слу-

чаям полного перераспределения по частотам и 4-му приближению разложения по собственным функциям, — с другой, становится значительным. В последнем случае указанное расхождение может явиться следствием нарушения условия нормировки, характерного разложению функции перераспределения по собственным функциям. Отметим, что разложение Хаммера (4) лишено этого недостатка.

В заключение, авторы выражают искреннюю признательность академику В. А. Амбарцумяну за многократные обсуждения, а Г. А. Арутюняну за помощь при выполнении численных расчетов.

Ереванский педагогический
институт

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

NON-COHERENT SCATTERING. V.

M. S. GEVORKIAN, N. V. YENGIBARIAN, A. G. NIC'OGHOSSIAN

Some questions are discussed concerning the solution of radiative transfer problems in the general case of non-coherent scattering. Various methods of representation of the redistribution function as a bilinear expansion are considered. In this connection the following questions arise; the convenience of their application for numerical calculations and the accuracy of approximation of the real redistribution law. The existence and uniqueness of the solution of (2.1) — type of equations in some functional spaces are discussed. The estimates of the proximity of solutions both of initial and truncated equations in the corresponding spaces are presented. The numerical calculations concerning spectral line profiles originated as a result of diffuse reflection from a semi-infinite medium are given. The influence of various approximations of the redistribution law on the final results is shown.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н. В. Енгибарян, *Астрофизика*, 7, 573, 1971.
2. Н. В. Енгибарян, А. Г. Никогосян, *Астрофизика*, 8, 71, 1972.
3. Н. В. Енгибарян, А. Г. Никогосян, *Астрофизика*, 8, 213, 1972.
4. Н. В. Енгибарян, А. Г. Никогосян, *Астрофизика*, 9, 79, 1973.
5. Н. В. Енгибарян, А. Г. Никогосян, *Препринт № 4*, Бюраканской обсерв., 1972.
6. N. V. Yengibarian, A. G. Nicoghossian, *JQSRT*, 13, 787, 1973.
7. D. G. Hummer, *M. N.*, 125, 21, 1962.
8. В. В. Иванов, *Перенос излучения и спектры небесных тел*, Наука, М., 1959.
9. К. Кейз, П. Цвайфел, *Линейная теория переноса*, Мир, М., 1972.
10. В. В. Соболев, *Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет*, Гостехиздат, М., 1956.
11. И. П. Натансон, *Теория функций действительного переменного*, Гостехиздат, М.-Л., 1950.