

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 11

АВГУСТ, 1975

ВЫПУСК 3

УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И ВОЗБУЖДЕНИЯ ЛЕНГМЮРОВСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ РАСПАДНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

Р. Д. ЛОМАДЗЕ

Поступила 9 декабря 1974

Получена полная система уравнений для нелинейного переноса через плазменную среду электромагнитного излучения и возбуждения ленгмюровской турбулентности при распадном взаимодействии. Рассмотрен случай, когда частота излучения существенно превосходит плазменную электронную частоту. Предполагается, что как плазма, так и излучение и ленгмюровская турбулентность изотропны.

В книге В. Н. Цытовича [1] приведены общие кинетические уравнения, описывающие процесс распада электромагнитной волны на электромагнитную и плазменную волны. Уравнение для плазменных волн имеет следующий вид:

$$\frac{dN_{\vec{k}}^2}{dt} = \frac{\partial N_{\vec{k}}^2}{\partial t} + v_{\vec{k}} \frac{\partial N_{\vec{k}}^2}{\partial r} =$$
$$= \int \frac{d\vec{k}_1 d\vec{k}_2}{(2\pi)^6} w_{\vec{k}}^{(2)}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}) (N_{\vec{k}_1}^2 N_{\vec{k}_2}^2 + N_{\vec{k}_1}^2 N_{\vec{k}}^2 - N_{\vec{k}_2}^2 N_{\vec{k}}^2).$$
(1)

Здесь и в дальнейшем мы пренебрегаем спонтанным эффектом излучения плазменных волн электромагнитными. Индекс $\vec{k}$ обозначает моду плазменных колебаний, $\vec{k}$ — электромагнитное излучение, $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$ — волновые векторы соответственно плазменной и электромагнитных волн, N — плотности числа квантов (например, для плазменных волн

$\Lambda^2 = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} N_{\vec{k}}^2$), $w_i^{(j)}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k})$ — вероятность распада электромагнитной волны с волновым вектором $\vec{k}_1$ на электромагнитную волну $\vec{k}_2$ и плазменную $\vec{k}$ в единицу времени. Интегрирование подразумевается по всем возможным $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$. В (1) учитывается автоматически также слияние волн $\vec{k}_1$ с волной $\vec{k}$. Аналогичное уравнение для электромагнитных квантов выглядит так:

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\vec{k}_1}'}{dt} = & \frac{\partial N_{\vec{k}_1}'}{\partial t} + \vec{v}_{\vec{k}_1}' \cdot \frac{\partial N_{\vec{k}_1}'}{\partial \vec{r}} = \\ = & \int \frac{d\vec{k}_2 d\vec{k}}{(2\pi)^6} \{ w_i^{(e)}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}) (N_{\vec{k}_1}' N_{\vec{k}_2}' + N_{\vec{k}_2}' N_{\vec{k}}' - N_{\vec{k}_1}' N_{\vec{k}}') + \\ & + w_i^{(p)}(\vec{k}_2, \vec{k}_1, \vec{k}) (N_{\vec{k}_2}' N_{\vec{k}_1}' - N_{\vec{k}_1}' N_{\vec{k}}' + N_{\vec{k}_2}' N_{\vec{k}}') \}. \end{aligned} \quad (2)$$

Первая тройка слагаемых в правой части (2) описывает изменение $N_{\vec{k}_1}'$ при переходе волн $\vec{k}_1$ и волн $\vec{k}_2$ с излучением волн $\vec{k}$, а вторая — с поглощением. Вероятности последнего процесса равны вероятностям распада волн $\vec{k}_2$ на волны $\vec{k}_1$ и $\vec{k}$.

Используя уравнение (1), Э. Н. Криворучкий и В. Н. Цытович рассмотрели [2] возбуждение в плазме волн различных типов излучением. В частности, было показано, что наиболее эффективно генерируются ленгмюровские пульсации и что в ряде космических объектов с большой плотностью излучения уровень плазменной турбулентности должен быть высоким.

Целью настоящей работы является приведение уравнений (1) и (2) к виду, позволяющему применять их для исследования задачи о нелинейном переносе излучения с учетом ленгмюровских волн.

Описание распадного взаимодействия значительно упрощается при следующих предположениях. Во-первых, ограничимся случаем, когда влиянием магнитного поля на плазму можно пренебречь. Тогда, согласно [1], вероятность распада поперечной волны на поперечную и ленгмюровскую равна

$$w_i^{(e)} = \frac{(2\pi)^6 \hbar e^2 \omega_{pe} k^2}{16\pi m_{\text{э}}^2 \omega_{pe}^2(k_2)} \left[1 + \frac{(\vec{k}_1, \vec{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right] \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}) \delta[\omega - \omega(k_2) - \omega_{pe}],$$

где $\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}}$ — плазменная электронная частота, равной которой мы принимаем частоту ленгмюровских волн (т. е. не учитываем теплового движения электронов), у частот электромагнитных волн опущен индекс l и обозначено $\omega = \omega(k_1)$. Во-вторых, допустим, что излучение и возбуждаемая им турбулентность изотропны по направлениям волновых векторов. Для описания изотропной плазменной турбулентности удобно пользоваться спектральной плотностью энергии, отнесенной к единичному интервалу волновых чисел $W_k^l = \frac{\hbar \omega_{pe} k^2}{2\pi^2} N_k^l \left(\int dk W_k^l \right)$ — полная плотность энергии ленгмюровских пульсаций). Изотропное излучение будем характеризовать аналогичной величиной, рассчитанной, однако, на единичный частотный интервал $W_\omega^l = \frac{\hbar \omega^2}{\pi^2 c^3} \left[\omega^2 - \omega_{pe}^2 \right] N_\omega^l$ (здесь использованы дисперсионное соотношение $\omega = \sqrt{\omega_{pe}^2 + c^2 k^2}$ и тот факт, что электромагнитные кванты имеют два состояния поляризации). Ввиду того, что разные волны мы описываем различными функциями, у последних можно опустить индексы. В-третьих, рассмотрим излучение на частотах, много больших ленгмюровской частоты плазмы.

В ходе вычислений будем сохранять везде величины до второго порядка малости по ω_{pe}/ω включительно — именно такая степень точности оказывается необходимой в уравнении (2).

Хотя (1) уже было преобразовано в [2], мы приведем здесь соответствующие расчеты. Это представляется целесообразным, поскольку в указанной работе подробности счета отсутствуют, и часть вычислений для (2) аналогична.

Законы сохранения импульса и энергии в рассматриваемом распаде связывают углы между волновыми векторами излучающей и излучаемых волн следующим образом:

$$\cos \frac{\pi}{2} = \frac{-\omega_{pe}^2 + 2\omega_{pe}\omega + c^2 k^2}{2c \left[\omega^2 - \omega_{pe}^2 \right] k},$$

$$\cos k_1 k_2 = \frac{-\omega_{pe}^2 - 2\omega_{pe}\omega + 2\omega^2 - c^2 k^2}{2 \left[\omega^2 - \omega_{pe}^2 \right] \left[\omega^2 - 2\omega_{pe}\omega \right]}.$$

Минимальная частота электромагнитных волн, способных излучать ленгмюровскую волну с данным волновым числом, есть

$$\omega_{\min} = \frac{\omega_{pe}}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{c^2 k^2}{\omega_{pe}^2} \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{c^2 k^2} \right)^{-1} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2 k^2} \right)^2} \right].$$

Такая электромагнитная волна излучает вперед и при этом изменяет направление своего распространения на обратное. Для $\omega > \omega_{\min}$ излучение происходит под углом, тем большим, чем больше частота. Соответственно, с ростом ω уменьшается угол отдачи. Отметим, что $\omega_{\min}$ представляет собой возрастающую функцию k . При $k \gg \omega_{pe}/c$ эта связь имеет простой вид:

$$\omega_{\min} \approx \frac{ck}{2} \gg \omega_{pe}.$$

Наибольшему возможному значению волнового числа продольных плазменных $\omega_{pe}/3v_T$, определяемому затуханием Ландау, соответствует $\omega_{\min}/\omega_{pe} = (c\omega_{pe}/6v_T)$.

При $\omega \gg \omega_{pe}$

$$\cos \vec{k}_1 \vec{k}_2 = \frac{\omega_{pe}}{ck} + \frac{ck}{2\omega} - \frac{\omega_{pe}^2}{2c\omega k} + \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^3} \left(\frac{\omega_{pe}}{ck} + \frac{ck}{2\omega} \right), \quad (3)$$

$$\cos \vec{k}_1 \vec{k}_2 = 1 - \frac{c^2 k^2}{2\omega^2} - \frac{c^2 \omega_{pe} k^2}{2\omega^3} + \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2} \left(1 - \frac{2c^2 k^2}{\omega^2} \right). \quad (4)$$

Подобно тому, как это делалось в [2], рассмотрим $k \gg \omega_{pe}/c$, т. е. ленгмюровские волны с малыми фазовыми скоростями. Тогда и (3) можно пренебречь первым слагаемым в скобках, а для $\cos \vec{k}_1 \vec{k}_2$ остается в силе соотношение (4) полностью.

Перейдем в (1) к спектральным плотностям энергии волн:

$$\begin{aligned} \frac{dW_k}{dt} = & \frac{\pi^2 c^4 \omega_{pe} k^2}{2h} \int \frac{d\vec{k}_1 d\vec{k}_2}{(2\pi)^3} W_{\vec{k}_1}^{\dagger} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2} \right) \frac{W_{\vec{k}_2}}{\omega^3} \left[1 + \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2 (k_2)} \left| \frac{W_{\vec{k}_1(k_1)}}{\omega^3 (k_1)} \right| + \right. \\ & \left. + \frac{\pi^2 c^4}{h} \int \frac{d\vec{k}_1 d\vec{k}_2}{(2\pi)^3} W_{\vec{k}_1}^{\dagger} \left\{ \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2} \right) \frac{W_{\vec{k}_2}}{\omega^3} - \left[1 + \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2 (k_2)} \left| \frac{W_{\vec{k}_1(k_1)}}{\omega^3 (k_1)} \right| \right] W_{\vec{k}_1} \right\} \right. \end{aligned}$$

Рассмотрим первое слагаемое правой части этого уравнения. Интегрируя по $d\vec{k}_2$, выражая $d\vec{k}_1$ в сферических координатах и интегрируя по азимутальному углу, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2 c^4 e^2 \omega_{pe}^2 k^4}{16 m_e^2} \int \frac{dW_{\vec{k}_2}}{\omega^2} d\vec{k}_1 k \sin k_1 k (1 + \cos^2 \vec{k}_1, \vec{k}_1 - \vec{k})^2 [\omega - \omega(|\vec{k}_1 - \vec{k}|) - \omega_{pe}] \cdot \\ \cdot \left[1 + \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2 (|\vec{k}_1 - \vec{k}|)} \right] \frac{W_{\vec{k}_2 = (|\vec{k}_1 - \vec{k}|)}}{\omega^3 (|\vec{k}_1 - \vec{k}|)}. \end{aligned}$$

Интегрируя по dk, k с учетом (3) и (4), получаем

$$\frac{\pi c^2 \omega_{pe}^4 k^3}{32 m_e n_e} \int_{\frac{ck}{2}}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^3 (\omega - \omega_{pe})^3} \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right) \cdot$$

$$\cdot \left[1 - \frac{c^2 k^2}{2\omega^2} + \frac{c^4 k^4}{8\omega^4} - \frac{c^2 \omega_{pe} k^2}{2\omega^3} \left(1 - \frac{c^2 k^2}{2\omega^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2} \left(1 - \frac{5c^2 k^2}{2\omega^2} + \frac{5c^4 k^4}{4\omega^4} \right) \right] W_{\omega} W_{\omega - \omega_{pe}}.$$

В этом выражении можно пренебречь членами порядка ω_{pe}/ω и ω_{pe}^2/ω^2 и, если зависимость W_{ω} от частоты не слишком резкая, принять $W_{\omega - \omega_{pe}} = W_{\omega}$.

Для второго и третьего слагаемых вычисления, подобные описанным, приводят к следующему выражению:

$$\frac{\pi \omega_{pe}^3 k}{16 c m_e n_e} \left\{ \int_{\frac{ck}{2}}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^3} \left[1 - \frac{c^2 k^2}{2\omega^2} + \frac{c^4 k^4}{8\omega^4} - \frac{c^2 \omega_{pe} k^2}{2\omega^3} \left(1 - \frac{c^2 k^2}{2\omega^2} \right) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{3c^2 k^2}{2\omega^2} + \frac{11c^4 k^4}{16\omega^4} \right) \right] W_{\omega} -$$

$$- \int_{\frac{ck}{2}}^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega - \omega_{pe})^3} \left[1 - \frac{c^2 k^2}{2\omega^2} + \frac{c^4 k^4}{8\omega^4} - \frac{c^2 \omega_{pe} k^2}{2\omega^3} \left(1 - \frac{c^2 k^2}{2\omega^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{3c^2 k^2}{2\omega^2} + \frac{11c^4 k^4}{16\omega^4} \right) \right] W_{\omega - \omega_{pe}} \Big\} W_k.$$

Второй интеграл в фигурных скобках можно представить в виде суммы интегралов от $\omega_{\min}$ до ∞ и от $\omega_{\min} - \omega_{pe}$ до $\omega_{\min}$ от выражения

$$\frac{1}{\omega^3} \left[1 - \frac{c^2 k^2}{2\omega^2} + \frac{c^4 k^4}{8\omega^4} + \frac{c^2 \omega_{pe} k^2}{2\omega^3} \left(1 - \frac{c^2 k^2}{2\omega^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{3c^2 k^2}{2\omega^2} + \frac{11c^4 k^4}{16\omega^4} \right) \right] W_{\omega}.$$

Вычтем первый из этих интегралов из первого интеграла в фигурных скобках. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{\pi c \omega_{pe}^4 k^3}{16 m_e n_e} \int_{\frac{ck}{2}}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^6} \left(1 - \frac{c^2 k^2}{2\omega^2} \right) W_{\omega} + \frac{\pi \omega_{pe}^3 k}{16 c m_e n_e} \int_{\frac{ck}{2} - \omega_{pe}}^{\frac{ck}{2}} \frac{d\omega}{\omega^3} \right. \\
& \cdot \left[1 - \frac{c^2 k^2}{2\omega^2} + \frac{c^4 k^4}{8\omega^4} + \frac{c^2 \omega_{pe} k^2}{2\omega^3} \left(1 - \frac{c^2 k^2}{2\omega^2} \right) + \right. \\
& \left. \left. + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{3c^2 k^2}{2\omega^2} + \frac{11c^4 k^4}{16\omega^4} \right) \right] W_{\omega} \right] W_k.
\end{aligned}$$

Ограничиваясь, как и раньше, лишь низшими по порядку малости неисчезающими членами, отбросим в последнем интеграле величины, содержащие ω_{pe}/ω и ω_{pe}^2/ω^2 .

Собирая выражения, полученные для отдельных слагаемых правой части уравнения (1), запишем его окончательно:

$$\begin{aligned}
\frac{dW_1}{dt} &= \frac{\pi c^2 \omega_{pe}^4 k^3}{32 m_e n_e} \int_{\frac{ck}{2}}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^6} \left(1 - \frac{c^2 k^2}{2\omega^2} + \frac{c^4 k^4}{8\omega^4} \right) W_{\omega}^2 - \\
& - \left[\frac{\pi c \omega_{pe}^4 k^3}{16 m_e n_e} \int_{\frac{ck}{2}}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^6} \left(1 - \frac{c^2 k^2}{2\omega^2} \right) W_{\omega} + \right. \\
& \left. + \frac{\pi \omega_{pe}^3 k}{16 c m_e n_e} \int_{\frac{ck}{2} - \omega_{pe}}^{\frac{ck}{2}} \frac{d\omega}{\omega^3} \left(1 - \frac{c^2 k^2}{2\omega^2} + \frac{c^4 k^4}{8\omega^4} \right) W_{\omega} \right] W_k.
\end{aligned}$$

Преобразуем уравнение (2).

Электромагнитная волна данной частоты $\omega \gg \omega_{pe}$ не может возбуждать ленгмюровские пульсации с $k > \frac{2\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_{pe}}{2\omega} - \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^4} \right)$. Это значение следует сравнить с наибольшей допустимой величиной волнового числа для ленгмюровских волн $\omega_{pe}/3v_T$. Если первое из них

* Это соотношение не полностью совпадает с соответствующим результатом [2], а именно, первое слагаемое правой части (5) меньше в четыре раза, первый член в квадратных скобках больше в $4\pi^2$ раз, а второй, помимо того, что так же отличается множителем $8\pi^2$, содержит другую функцию в скобках под знаком интеграла.

меньше, т. е. если $\omega < (c\omega_{pe}/6v_{Te})$, то максимальное возможное k в рассматриваемом процессе $k_{max} = \frac{2\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_{pe}}{2\omega} - \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2}\right)$. Соответствующая продольная волна излучается вперед, и волновой вектор электромагнитной волны поворачивается на угол π . При $k < k_{max}$ угол излучения тем больше, а угол отдачи тем меньше, чем меньше k . Если же выполнено обратное неравенство, т. е. $\omega > (c\omega_{pe}/6v_{Te})$, то

распад для $\vec{k}_1 \vec{k} = 0$, $\vec{k}_1 \vec{k}_2 = \vec{0}$ невозможен. В этом случае $k_{max} = \omega_{pe}/3v_{Te}$, что соответствует испусканию ленгмюровского кванта под углом тем большим, чем больше ω . При увеличении частоты угол $\vec{k}_1 \vec{k}_2$ уменьшается.

Разрешенные k тянутся до значения ω_{pe}/c . Для $k \geq \omega_{pe}/c$ второй член в скобках в соотношении (3), а также третье слагаемое и второй член в скобках в (4) можно отбросить.

Для последних трех слагаемых правой части уравнения (2), соответствующих слиянию волны ω с плазменными колебаниями, вместо (3) и (4) имеют место

$$\begin{aligned} \cos \vec{k}_1 \vec{k} &= \frac{\omega_{pe}}{ck} - \frac{ck}{2\omega} + \frac{\omega_{pe}^2}{2c\omega k} + \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2} \left(\frac{\omega_{pe}}{ck} - \frac{ck}{2\omega} \right), \\ \cos \vec{k}_1 \vec{k}_2 &= 1 - \frac{c^2 k^2}{2\omega^2} + \frac{c^2 \omega_{pe} k^2}{2\omega^3} + \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2} \left(1 - \frac{2c^2 k^2}{\omega^2} \right). \end{aligned}$$

При этом в случае $\omega < c\omega_{pe}/6v_{Te}$ максимальное разрешенное k имеет несколько большую величину, чем для распада. Действительно, указанный процесс слияния является обратным по отношению к распаду волны $\omega + \omega_{pe}$, при котором предельное значение k равно $\frac{2\omega}{c} \left(1 + \frac{\omega_{pe}}{2\omega} - \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2}\right)$. Для $\omega > \frac{c\omega_{pe}}{6v_{Te}}$ такого различия не будет, поскольку ленгмюровских пульсаций с $k > (\omega_{pe}/3v_{Te})$ все равно не существует.

В соответствии со сказанным введем k_{max} , которое в случае $\omega < \frac{c\omega_{pe}}{6v_{Te}}$ равно $\frac{2\omega}{c} \left(1 + \frac{\omega_{pe}}{2\omega} - \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2}\right)$, а в противоположном — $\frac{\omega_{pe}}{3v_{Te}}$. Тогда результат вычислений для (2), аналогичных тем, что были приведены выше, можно записать для обоих случаев так:

$$\begin{aligned}
\frac{dW_\omega}{dt} = & -\frac{\pi c^2 \omega_{pe}^2}{16 m_e n_e \omega^3} \int_{\frac{\omega_{pe}}{c}}^{k_{\max}} dk k^2 \left[1 - \frac{c^2 k^2}{2 \omega^2} + \frac{c^4 k^4}{8 \omega^4} + \frac{3 \omega_{pe}}{\omega} \left(1 - \frac{2 c^2 k^2}{3 \omega^2} + \frac{5 c^4 k^4}{24 \omega^4} \right) + \right. \\
& \left. - \frac{15 \omega_{pe}^2}{2 \omega^2} \left(1 - \frac{5 c^2 k^2}{6 \omega^2} + \frac{3 c^4 k^4}{10 \omega^4} \right) \right] W_\omega W_{\omega - \omega_{pe}} - \\
& - \frac{\pi \omega_{pe}^2}{8 c m_e n_e \omega^3} \int_{\frac{\omega_{pe}}{c}}^{k_{\max}} dk k^2 \left[1 - \frac{c^2 k^2}{2 \omega^2} + \frac{c^4 k^4}{8 \omega^4} - \frac{c^2 \omega_{pe} k^2}{2 \omega^3} \left(1 - \frac{c^2 k^2}{2 \omega^2} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{3 c^2 k^2}{2 \omega^2} + \frac{11 c^4 k^4}{16 \omega^4} \right) \right] W_k W_\omega + \\
& + \frac{\pi \omega_{pe}^2}{8 c m_e n_e \omega^3} \int_{\frac{\omega_{pe}}{c}}^{k_{\max}} dk k^2 \left[1 - \frac{c^2 k^2}{2 \omega^2} + \frac{c^4 k^4}{8 \omega^4} + \frac{3 \omega_{pe}}{\omega} \left(1 - \frac{2 c^2 k^2}{3 \omega^2} + \frac{5 c^4 k^4}{24 \omega^4} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{7 \omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{6 c^2 k^2}{7 \omega^2} + \frac{5 c^4 k^4}{16 \omega^4} \right) \right] W_k W_{\omega + \omega_{pe}} + \\
& + \frac{\pi c^2 \omega_{pe}^2}{16 m_e n_e \omega^3} \int_{\frac{\omega_{pe}}{c}}^{k_{\max}} dk k^2 \left[1 - \frac{c^2 k^2}{2 \omega^2} + \frac{c^4 k^4}{8 \omega^4} - \frac{3 \omega_{pe}}{\omega} \left(1 - \frac{2 c^2 k^2}{3 \omega^2} + \frac{5 c^4 k^4}{24 \omega^4} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{15 \omega_{pe}^2}{2 \omega^2} \left(1 - \frac{5 c^2 k^2}{6 \omega^2} + \frac{3 c^4 k^4}{10 \omega^4} \right) \right] W_\omega W_{\omega + \omega_{pe}} - \\
& - \frac{\pi \omega_{pe}^2}{8 c m_e n_e \omega^3} \int_{\frac{\omega_{pe}}{c}}^{k_{\max}} dk k^2 \left[1 - \frac{c^2 k^2}{2 \omega^2} + \frac{c^4 k^4}{8 \omega^4} + \frac{c^2 \omega_{pe} k^2}{2 \omega^3} \left(1 - \frac{c^2 k^2}{2 \omega^2} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{3 c^2 k^2}{2 \omega^2} + \frac{11 c^4 k^4}{16 \omega^4} \right) \right] W_k W_\omega +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\pi \omega_{pe}^2}{8 c m_e n_e \omega^2} \int_{\frac{\omega_{pe}}{c}}^{k_{\max}} dk k \left| 1 - \frac{c^2 k^2}{2 \omega^2} + \frac{c^4 k^4}{8 \omega^4} - \frac{3 \omega_{pe}}{\omega} \left(1 - \frac{2 c^2 k^2}{3 \omega^2} + \frac{5 c^4 k^4}{24 \omega^4} \right) + \right. \\ \left. + \frac{7 \omega_{pe}^2}{\omega^4} \left(1 - \frac{6 c^2 k^2}{7 \omega^2} + \frac{5 c^4 k^4}{16 \omega^4} \right) \right| W_k W_{\omega - \omega_{pe}}$$

Рассмотрим случай $\omega < (c \omega_{pe} / 6 v_{Te})$.

Сумма членов, содержащих W_k , преобразуется к виду:

$$\frac{\pi \omega_{pe}^2}{16 c m_e n_e \omega^2} \left\{ \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left| 12 \int_{\frac{\omega_{pe}}{c}}^{k_{\max}} dk k \left(1 - \frac{3 c^2 k^2}{4 \omega^2} + \frac{c^4 k^4}{4 \omega^4} \right) W_k W_{\omega} - \right. \right. \\ \left. - 6 \int_{\frac{\omega_{pe}}{c}}^{k_{\max}} dk k \left(1 - \frac{2 c^2 k^2}{3 \omega^2} + \frac{5 c^4 k^4}{24 \omega^4} \right) W_k \omega \frac{\partial W_{\omega}}{\partial \omega} + \right. \\ \left. + \int_{\frac{\omega_{pe}}{c}}^{k_{\max}} dk k \left(1 - \frac{c^2 k^2}{2 \omega^2} + \frac{c^4 k^4}{8 \omega^4} \right) W_k \omega^2 \frac{\partial^2 W_{\omega}}{\partial \omega^2} \right| + \\ \left. + \frac{\omega_{pe}}{\omega} \int_{\frac{\omega_{pe}}{c}}^{k_{\max}} dk k \left(1 - \frac{c^2 k^2}{2 \omega^2} + \frac{c^4 k^4}{8 \omega^4} \right) W_k \omega^4 \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{W_{\omega}}{\omega^3} \right) \right\}.$$

Необходимая степень точности будет достигнута, если в первых трех интегралах для $k_{\max}$ ограничиться величиной $2\omega/c$, а в четвертом считать $k_{\max} = \frac{2\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_{pe}}{2\omega} \right)$ и $k_{\max} = \frac{2\omega}{c} \left(1 + \frac{\omega_{pe}}{2\omega} \right)$. Здесь ввиду узости промежутка интегрирования можно вынести значение W_k при $k = 2\omega/c$ за знак интеграла. Тогда последний легко вычисляется $\left(\frac{4 \omega_{pe} \omega}{c^2} \right)$.

Первое и четвертое слагаемые правой части рассматриваемого уравнения дают

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi c^2 \omega^3}{16 m_e n_e \omega^3} \left(\frac{2\omega_{pe}}{\omega} \int_0^{\frac{k_{max}}{c}} dk k^3 \left[-3 \left(1 - \frac{2c^2 k^2}{3\omega^2} + \frac{5c^4 k^4}{24\omega^4} \right) W_- + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(1 - \frac{c^2 k^2}{2\omega^2} + \frac{c^4 k^4}{8\omega^4} \right) \omega \frac{\partial W_-}{\partial \omega} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \int_{\frac{k_{min}}{c}}^{\frac{k_{max}}{c}} dk k^3 \left[\left(1 - \frac{c^2 k^2}{2\omega^2} + \frac{c^4 k^4}{8\omega^4} \right) W_- + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\omega_{pe}}{\omega} \left[-3 \left(1 - \frac{2c^2 k^2}{3\omega^2} + \frac{5c^4 k^4}{24\omega^4} \right) W_- + \left(1 - \frac{c^2 k^2}{2\omega^2} + \frac{c^4 k^4}{8\omega^4} \right) \omega \frac{\partial W_-}{\partial \omega} \right] \right] \right).
\end{aligned}$$

Интегралы равны

$$\begin{aligned}
& \frac{2\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_{pe}}{2\omega} \right) \int_0^{\frac{k_{max}}{c}} dk k^3 \left(1 - \frac{2c^2 k^2}{3\omega^2} + \frac{5c^4 k^4}{24\omega^4} \right) = \frac{32\omega^4}{9c^4} \left(1 - \frac{15\omega_{pe}}{\omega} \right), \\
& \frac{2\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_{pe}}{2\omega} \right) \int_0^{\frac{k_{max}}{c}} dk k^3 \left(1 - \frac{c^2 k^2}{2\omega^2} + \frac{c^4 k^4}{8\omega^4} \right) = \frac{8\omega^4}{3c^4} \left(1 - \frac{3\omega_{pe}}{\omega} \right); \\
& \frac{2\omega}{c} \left(1 + \frac{\omega_{pe}}{2\omega} - \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2} \right) \int_{\frac{k_{min}}{c}}^{\frac{k_{max}}{c}} dk k^3 \left(1 - \frac{c^2 k^2}{2\omega^2} + \frac{c^4 k^4}{8\omega^4} \right) = \frac{16\omega_{pe}\omega^3}{c^4}, \\
& \frac{2\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_{pe}}{2\omega} - \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2} \right) \int_{\frac{k_{min}}{c}}^{\frac{k_{max}}{c}} dk k^3 \left(1 - \frac{2c^2 k^2}{3\omega^2} + \frac{5c^4 k^4}{24\omega^4} \right) = \frac{80\omega_{pe}\omega^3}{3c^4}.
\end{aligned}$$

Производя сложение, получаем

$$\frac{\pi \omega^4 \omega_{pe}}{6 c^2 m_e n_e} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{W_-}{\omega} \right)^{10}.$$

* Эта величина приводится в книге С. А. Капана, В. Н. Цытовича [3].

В итоге, для случая $\omega < (c\omega_{pe}/6v_{Te})$ уравнение (2) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dW_{\omega}}{dt} = & \frac{\pi\omega_{pe}^4}{6c^2m_en_e} \frac{\partial}{\partial\omega} \left(\frac{W_{\omega}}{\omega} \right)^2 + \\ & + \frac{\pi\omega_{pe}^4}{8cm_en_e\omega^4} \left[12 \int_{\frac{\omega_{pe}}{c}}^{\frac{2\omega}{c}} dk k \left(1 - \frac{3c^2k^2}{4\omega^2} + \frac{c^4k^4}{4\omega^4} \right) W_k W_{\omega} - \right. \\ & - 6 \int_{\frac{\omega_{pe}}{c}}^{\frac{2\omega}{c}} dk k \left(1 - \frac{2c^2k^2}{3\omega^2} + \frac{5c^4k^4}{24\omega^4} \right) W_k \omega \frac{\partial W_{\omega}}{\partial\omega} + \\ & + \left. \int_{\frac{\omega_{pe}}{c}}^{\frac{2\omega}{c}} dk k \left(1 - \frac{c^2k^2}{2\omega^2} + \frac{c^4k^4}{8\omega^4} \right) W_k \omega^2 \frac{\partial^2 W_{\omega}}{\partial\omega^2} \right] + \\ & + \frac{\pi\omega_{pe}^4\omega^2}{2c^4m_en_e} W_k \frac{\partial}{\partial\omega} \left(\frac{W_{\omega}}{\omega^3} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

При $\omega > (c\omega_{pe}/6v_{Te})$ член с $W_k \frac{\partial}{\partial\omega} \left(\frac{W_{\omega}}{\omega^3} \right)$, очевидно, будет отсутствовать. Интегралы, необходимые при вычислении суммы слагаемых, не зависящих от W_k , равны

$$\int_0^{\frac{\omega_{pe}}{3v_{Te}}} dk k^3 \left(1 - \frac{2c^2k^2}{3\omega^2} + \frac{5c^4k^4}{24\omega^4} \right) \approx \int_0^{\frac{\omega_{pe}}{3v_{Te}}} dk k^3 \left(1 - \frac{c^2k^2}{2\omega^2} + \frac{c^4k^4}{8\omega^4} \right) \approx \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_{pe}}{3v_{Te}} \right)^4.$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{dW_{\omega}}{dt} = & \frac{\pi\omega_{pe}^4\omega^2}{2c^2m_en_e} \left(\frac{c\omega_{pe}}{6v_{Te}\omega} \right)^4 W_{\omega} \frac{\partial}{\partial\omega} \left(\frac{W_{\omega}}{\omega^3} \right) + \\ & + \frac{\pi\omega_{pe}^4}{8cm_en_e\omega^4} \int_{\frac{\omega_{pe}}{c}}^{\frac{\omega_{pe}}{3v_{Te}}} dk k W_k \left(12 W_{\omega} - 6\omega \frac{\partial W_{\omega}}{\partial\omega} + \omega^2 \frac{\partial^2 W_{\omega}}{\partial\omega^2} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь в выражении, содержащем W_1 , пренебрежено членами, содержащими степени отношения ck/ω , которое в рассматриваемом случае мало.

Уравнения (6) и (7) состоят из нелинейных членов, пропорциональных квадрату спектральной плотности энергии электромагнитных волн и членов описывающих обратное влияние на излучение возбужденной ленгмювской турбулентности. Совместно с (5) они составляют систему уравнений, описывающую распадный перенос излучения в плазме. Исследование этой системы предполагается предпринять в дальнейшем.

Автор благодарит С. А. Каплана за обсуждения и внимание к работе.

Абастуманская
астрофизическая обсерватория

EQUATIONS FOR THE NONLINEAR TRANSFER OF ELECTROMAGNETIC RADIATION AND EXCITATION OF LANGMUIR TURBULENCE AT THE DECAY INTERACTION

R. D. LOMADZE

A complete system of equations describing nonlinear transfer of electromagnetic radiation through plasma medium and excitation of Langmuir turbulence in the same plasma when decay interaction takes place is obtained. The case when the frequency of radiation is considerably higher than the electronic plasma frequency is considered. Plasma as well as radiation and Langmuir turbulence are supposed to be isotropic.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, Наука, М., 1967.
2. Э. Н. Криворуцкий, В. Н. Цытович, Астрон. ж., 46, 1003, 1969.
3. С. А. Каплан, В. Н. Цытович, Плазменная астрофизика, Наука, М., 1972.