АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 11 МАЙ, 1975 ВЫПУСК 2

О НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПРОБЛЕМЕ РЕЛЕЯ ДЛЯ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ

Л. А. АБРАМОВ, Л. С. АЛЬПЕРОВИЧ

Поступила 11 апреля 1974

Решена задача о возникновении колебательной конвекции в горизонтальном слое полностью ионизованной плазмы, находящейся в постоянных вертикальных гравитационном и магнитном полях. В случае значительной анизотропии теплопроводности при изотропной вязкости (замагничены только электроны), начало конвекции при больших числах Гартмана сопряжено с колебаниями, если „магнитное число Прандтля" намного больше единицы. Полученные результаты являются естественным обобщением известных критериев С. Чандрасекара и могут быть применены в теории генерации МГД волн в сильно замагниченной плазме.

В [1] показано, что в приближении Буссинеска критическое число Релея в случае стационарной конвекции в горизонтальном слое анизотропного полностью ионизированного газа оказывается меньше числа Релея в изотропно проводящей среде. Это вызвано, в частности, уменьшением суммарной теплопроводности. Вместе с тем известно, что при достаточно больших числах Гартмана в изотропной электропроводящей жидкости, находящейся в тех же условиях, может возникнуть колебательная конвекция.

Этот тип неустойчивости, как известно, играет большую роль в астрофизических приложениях, в физике верхней ионосферы.

К примеру, генерация МГД волн в солнечных пятнах рассмотрена в работе [2] как следствие возникновения колебательной конвекции в модели изотропной плазмы.

Цель данной работы — выяснить условия, при которых в горизонтальном слое анизотропной плазмы возникает колебательная конвективная неустойчивость.

Модель. Рассмотрим горизонтальный слой полностью ионизированной плазмы, находящейся в однородном и постоянном во времени магнитном поле. Предполагая температуру ионов и электронов одинаковой, а ионы незамагниченными $\omega_i^2 \tau_i^2 \ll 1$, где ω_i — гирочастота ионов, τ_i — время свободного пробега иона, можно считать как и в [1] вязкость изотропной. Тем самым мы предполагаем, что величина параметра замагниченности для электронов ограничена: $\omega_e^2 \tau_e^2 < \frac{m_i}{m_e} Z^2$, где Z — кратность ионизации.

Будем предполагать, также, что в слое поддерживается постоянный градиент температуры ∇T_0. Запишем закон Ома в форме

$$E = -\frac{[vH]}{c} + \frac{[jH]}{enc} + \frac{j}{\sigma}, \tag{1}$$

где v — импульс единицы объема плазмы, n — концентрация электронов (ионов), σ — электропроводность вдоль магнитного поля.

Ограничимся случаем, когда магнитное поле H_0 параллельно силе тяжести. Предполагая, что в исходном состоянии система покоится, а градиент давления скомпенсирован силой тяжести, запишем уравнение для скорости (z-вертикальная координата, $H_0 = H_z$):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\nabla}{\rho}\left(p + \frac{hH_0}{4\pi}\right) + \nu \Delta v - g\beta T' + \frac{H_0}{4\pi\rho}\frac{\partial h}{\partial z}, \tag{2}$$

где ρ — плотность плазмы, T' — возмущение температуры, ν — коэффициент кинематической вязкости.

В этом уравнении, как это обычно делается в приближении Буссинеска, использовано линеаризованное уравнение состояния $\rho - \rho_0 = -\rho_0 \beta T'$, β — коэффициент температурного расширения. Замагниченность электронов приводит к анизотропии электро- и температуропроводности. Обозначая температуропроводность вдоль и поперек магнитного поля через $\chi_\parallel$ и $\chi_\perp$, запишем уравнение для возмущений температуры

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + v(\nabla T_0 - \nabla T_a) = \left[\chi_\parallel \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \chi_\perp \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right] T', \tag{3}$$

где ∇T_a — адиабатический градиент температуры.

Выбрав в качестве единицы длины толщину слоя d, времени d^2/ν скорости $\chi_\parallel/d$, температуры $|\nabla T_0| d^{-1}$, давления $\rho\nu\chi_\parallel/d^2$, поля $4\pi\chi_\parallel \sqrt{\rho\nu\sigma_\parallel}/dc$, выпишем линейную систему обезразмеренных уравнений

$$
\left.
\begin{aligned}
&\Sigma v = -\nabla (p + Mh_z) + \Delta v - RTe_z + M\frac{\partial h}{\partial z}\\
&\operatorname{div} h = \operatorname{div} v = 0\\
&\left[\Sigma P - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\chi_\perp}{\chi_\parallel}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right] T' = -v_z\\
&\left(\Sigma P_m - \Delta + \zeta\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{rot}\right) h = M\frac{\partial v}{\partial z}
\end{aligned}
\right| \tag{4}
$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial t} = \Sigma$, $\zeta = 1.96\omega_e\tau_e$, $R = -\frac{g\beta(\nabla T_0 - \nabla T_a)}{\nu\chi_\parallel}a^4$, $M = \frac{H_0 d}{c} \times \left(\frac{\sigma_\parallel}{\rho\nu}\right)^{1/2}$, $P = \frac{\nu}{\chi_\parallel}$ соответственно, число Релея, Гартмана, Прандтля, $P_m = \frac{4\pi\sigma_\parallel\nu}{c^2}$.

Предполагая частоту гравитационных волн много большей частоты колебательных конвективных возмущений, будем считать границы слоя плоскими, свободными и изотермическими, откуда следует [3]

$$T' = v_z = \partial^2 v_z/\partial z^2 = 0 \qquad \text{при } z = 0.1$$

Для h, следуя Чандрасекару, введем приближенное граничное условие

$$\partial h_z/\partial z = 0 \quad \text{при} \quad z = 0.1.$$

Однородность системы в горизонтальных направлениях позволяет рассматривать $(v, P, T', h) \sim e^{iax}$, ($a$ — пространственная частота в горизонтальной плоскости). Тогда, решая систему (4) при выбранных граничных условиях, получим

$$v \sim \sin m\pi z, \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

$$\Sigma^5 + a_1\Sigma^4 + a_2\Sigma^3 + a_3\Sigma^2 + a_4\Sigma + a_5 = 0 \tag{5}$$

Здесь

$$a_1 = P^{-1}f + 2(P_m^{-1} + 1)\lambda$$

$$a_2 = 2\frac{P_m^{-1} + 1}{P}f\lambda + \Gamma + \frac{a^2R}{\lambda P}$$

$$a_3 = \frac{f\Gamma}{P} + E\lambda + \left(\frac{2}{P_m} + 1\right)\frac{a^2R}{P}$$

$$\Gamma = \frac{2\mu^2 M^2}{P_m} + \frac{\mu^2\zeta^2}{P_m^2}\lambda + (1 + P_m^{-2} + 4P_m^{-1})\lambda^2$$

$$E = 2\,\frac{1 + P_m^{-1}}{P_m}(\lambda^2 + \mu^2 M^2) + 2\,\frac{\mu^2\zeta^2}{P_m^2}\lambda$$

$$a_4 = \frac{Ef\lambda}{P} + F + \frac{Ra^2}{P\lambda}\left(\frac{2 + P_m^{-2}}{P_m}\lambda^2 + \frac{\mu^2 M^2}{P_m} + \frac{\mu^2\zeta^2}{P_m^2}\lambda\right)$$

$$a_5 = P^{-1}\left[fF + \frac{a^2 R}{P_m^2}(\zeta^2\mu^2\lambda + \lambda^2 + \mu^2 M^2)\right]$$

$$F = [\mu^2\zeta^2\lambda^3 + (\lambda^2 + \mu^2 M^2)^2]\,P_m^{-2}$$

$$\lambda = \mu^2 + a^2, \quad f = \frac{\varkappa_\perp}{\varkappa_\parallel}a^2 + \mu^2,$$

$$\mu = m\pi.$$

Граница устойчивости колебаний. Обозначая $\operatorname{Im}\Sigma = i\delta$ из дисперсионного уравнения найдем

$$\delta = a_5 = 0, \tag{6}$$

либо

$$(\delta^2)^2 - a_2\delta^2 + a_4 = 0, \qquad a_1(\delta^2)^2 - a_3\delta^2 + a_5 = 0 \tag{7}$$

Случай стационарной конвекции $\delta = a_5 = 0$ изучен в [1]. Отметим только, что легче других развивается самое „длинноволновое" возмущение ($m = 1$), $\partial R(\delta = 0, \mu)/\partial\mu > 0$ при условии, что $\partial R/\partial a = 0$.

Получим асимптотику критического числа Релея при $M \to \infty$. Условие $\partial R^{st}/\partial a = 0$, определяющее критическое значение a_c волнового числа равносильно равенству

$$g/g_1 = a^2\left(\frac{a^2}{\pi^2}\frac{\varkappa_\perp}{\varkappa_\parallel} + 1\right), \tag{8}$$

где

$$g = -R^{st}\left(\frac{\varkappa_\perp}{\varkappa_\parallel} + \frac{\pi^2}{a^2}\right)^{-1}.$$

Предположим, что $a_c = 0(M)$. Тогда из (8) следует $\lambda_c \sim M^{2/3}$ в соответствии с допущением. Отсюда критическое число Релея стационарной конвекции равно

$$R_c^{st} = \frac{\varkappa_\perp}{\varkappa_\parallel}\pi^2 M^2. \tag{9}$$

Поскольку при $\omega_e \tau_e \ll 1$ теплопроводность изотропна, то, как и следовало ожидать, полученная асимптотика дает известный закон „$\pi^2 M^2$“. Интересно заметить, что в анизотропной плазме при больших M R^0 формально зависит только от анизотропии теплопроводности, которая снижает величину R^0 по сравнению со случаем изотропной теплопроводности [1].

Для исследования колебательной конвекции решим каждое из уравнений (7) относительно R:

$$R = R_1(\delta, \nu) = R_2(\delta, \nu)$$

$$R_1 = \frac{\delta^4 - A_2\delta^2 + A_1}{B_2\delta^2 - B_1}, \qquad R_2 = \frac{a_1\delta^4 - A_3\delta^2 + A_3}{B_3\delta^2 - B_3}.$$

Полученные выражения весьма громоздки; анализ различных случаев весьма затруднителен, поэтому ограничимся рассмотрением асимптотического поведения частоты нейтральных колебаний и критического числа Релея R^0_* при $M \to \infty$. Как и выше, предположим, что $a^2_* = O(M)$. Тогда

$$\frac{a^2 R P_m}{P\mu^2 M^2} = (q_1 - 1)\,\nu = \frac{a_1 q_1^2 - 2(a_1 - \nu\gamma)\,q_1 + f/P}{q_1(2P_m^{-1} + 1) - P_m^{-1}},$$

где

$$q_1 = \delta^2 P_m (\mu M)^{-2}.$$

Корень $q_1 = 1$ этого уравнения соответствует стоячей альвеновской волне с узлами на границах. В этом случае $R = 0$. В изотропной плазме эта ветвь колебаний не зависит от градиента температуры. Заметим, что процедура решения системы (4), предложенная Чандрасекаром, автоматически исключает эту ветвь при $\varkappa_\perp = \varkappa_\parallel$ [3].

Второй корень этого уравнения дает

$$R = -\mu^2 M^2 \frac{P^2(1 + P_m)}{P_m^2} \frac{\nu^2}{a^2(f + P\nu)}.$$

Отсюда

$$R^0_* = -\pi^2 M^2 \frac{P^2(1 + P_m)}{P_m^2} \begin{cases} (P + \varkappa_\perp/\varkappa_\parallel)^{-1}, & \text{если } \dfrac{\varkappa_\perp}{\varkappa_\parallel} > \dfrac{1-P}{2} \text{ случай } A \\ 4\,\dfrac{1 - \varkappa_\perp/\varkappa_\parallel}{(1 + P)^2}, & \text{если } \dfrac{\varkappa_\perp}{\varkappa_\parallel} < \dfrac{1-P}{2} \text{ случай } B \end{cases}$$

При $\varkappa_\perp \to \varkappa_\parallel$ последнее переходит в аналогичное выражение, полученное Гибсоном [4] при более реальных электродинамических граничных условиях. Не исключено поэтому, что полученное выражение справедливо, как и в случае $\varkappa_\perp = \varkappa_\parallel$, для более широкого класса граничных условий.

В случае $\varkappa_\perp < \varkappa_\parallel (1-P)/2$ (сильная анизотропия) $a_\nu^2 = \pi^2 (1+P) \times \times (1-P-2\varkappa_\perp/\varkappa_\parallel)$, что оправдывает предположение, позволившее найти асимптотику. В противоположном случае a_ν^2 — бесконечно большая величина более низкого порядка по сравнению с M.

Частота нейтральных колебаний при $M \to \infty$ равна

$$\nu^2 = \frac{\pi^2 M^2}{P_m^2} \begin{cases} \left(\frac{\varkappa_\perp}{\varkappa_\parallel} P_m - P\right)\left(\frac{\varkappa_\perp}{\varkappa_\parallel} + P\right)^{-1} & \text{(случай } A) \\ [(1-P) P_m - 2P](1+P)^{-1} & \text{(случай } B) \end{cases}$$

Необходимым условием развития колебательной конвекции является выполнение неравенства $\nu^2 > 0$, т. е.

$$\varkappa_\perp P_m/\varkappa_\parallel > P \qquad (A)$$

$$(1-P) P_m > 2P \qquad (B)$$

Можно показать, что в случае A условие $\nu^2 > 0$ равносильно условию $R_*^{st} > R_*^0$, т. е. при больших числах Гартмана конвекция имеет колебательный характер, если $P_m \varkappa_\perp/\varkappa_\parallel > P$ и $\varkappa_\perp/\varkappa_\parallel > (1-P)/2$. В случае B колебательная конвекция наступает раньше, чем стационарная, если

$$P_m > 2P/(1-P) \quad \text{и} \quad (1-P)/2 > \varkappa_\perp/\varkappa_\parallel > \chi,$$

$$\chi = \frac{4}{4 + (1+P^{-1})^2 P_m^2 (1+P_m)}.$$

Однако конвекция стационарна при больших числах Гартмана, если $\varkappa_\perp/\varkappa_\parallel < \chi$, так как в том случае $R_*^{st} < R_*^0$.

Таким образом, при достаточно большом числе Гартмана и „магнитном числе Прандтля" P_m существует область значений параметров, в которой неустойчивость носит колебательный характер. Более детальную информацию о неустойчивости можно получить численным расчетом. Ниже мы приведем результаты этого расчета для набора параметров, близкого к характерному для полностью ионизованной водородной плазмы.

Конвекция в водородной плазме. Вязкость плазмы определяется ионами, теплопроводность же вдоль магнитного поля — электронами, поэтому [5]:

$$P = \frac{\nu_i}{\varkappa_{\parallel e}} \approx \frac{\nu_i}{\varkappa_\parallel} \approx 0.01.$$

При значениях кулоновского логарифма $\approx 10-20$ другие безразмерные параметры задачи запишем в виде

$$\omega_e\tau_e \approx 5\cdot 10^{11}\,\frac{HT^{3/2}}{n}, \qquad P_m \approx 10^{21}\,T^{4}/n$$

$$M = 10^{-7}\,HdT^{-1/2}, \quad [T] = eV$$

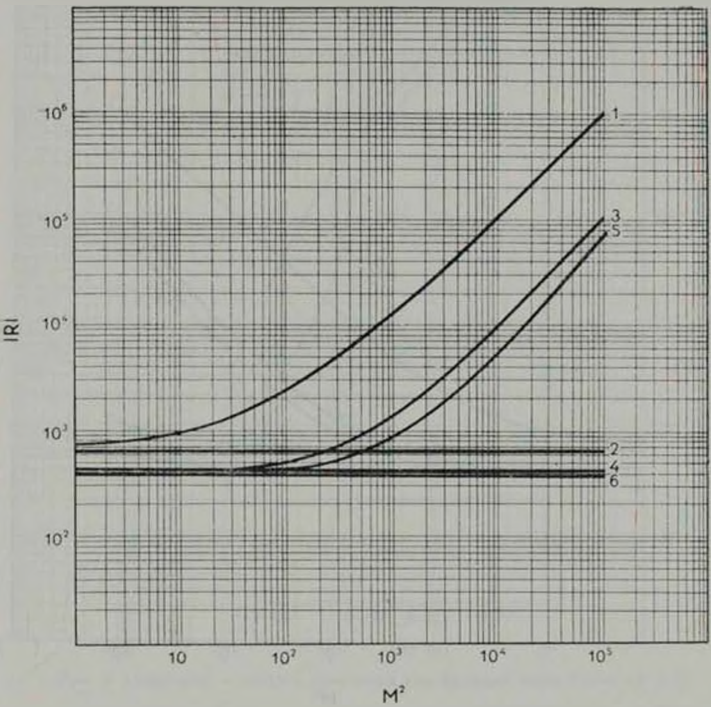

Рис. 1. Зависимость критического числа Релея для колебательной R_c^0 и стационарной R_c^{st} конвекции от числа Гартмана M при $P=10^{-2}$, $P_m=10^4$: кривая 1 соответствует R_c^{st} ($\omega_e\tau_e=0$), 2 — R_c^0 ($\omega_e\tau_e=0$), 3 — R_0^{st} ($\omega_e\tau_e=10$), 4 — R_c^0 ($\omega_e\tau_e=10$), 5 — R_c^{st} ($\omega_e\tau_e=20$), 6 — R_c^0 ($\omega_e\tau_e=20$)

При

$$\omega_e \tau_e < 30$$

$$\varkappa_\perp/\varkappa_\parallel = \varkappa_{\perp i}/\varkappa_{\parallel i} \approx 0.1 + 1.1 \frac{1.3(\omega_e\tau_e)^2 + 3.2}{(\omega_e\tau_e)^4 + 15\omega_e\tau_e - 3.8}.$$

Из приведенных соотношений видно, что во многих случаях $P_m \gg 1$.

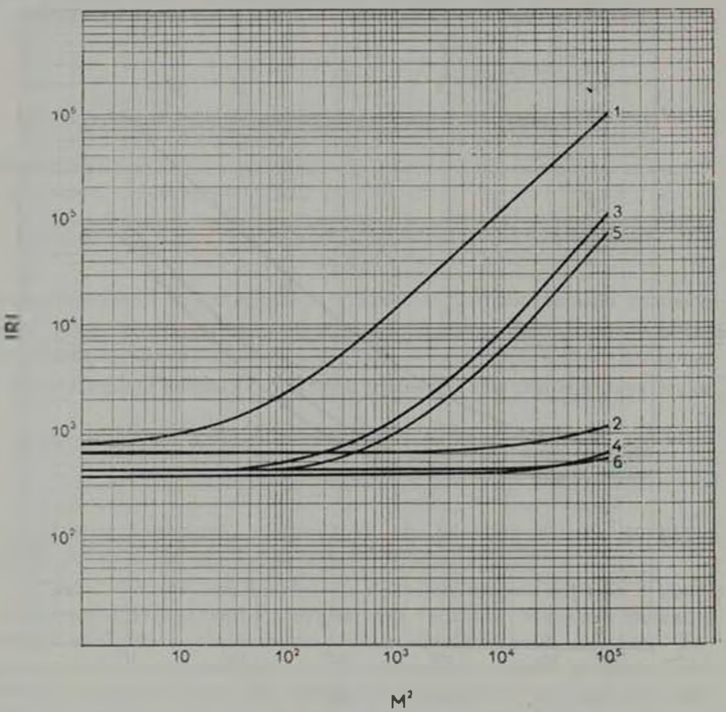

Рис. 2. Зависимость R_c^0 и $R_c^{a'}$ от M при $P=10^{-2}$, $P_m = 10^2$. Номера кривых соответствуют тем же значениям $\omega_e \tau_e$, что и на рис. 1.

Зависимость R_c^0 и $R_c^{a'}$ от M, полученная численным решением уравнений (6), (7) представлена на рис. 1, 2. Увеличение анизотропии электро- и теплопроводности ведет к понижению устойчивости плазмы как относительно монотонных, так и колебательных возмущений.

Легко видеть, что для достаточно больших значений P_m преобладает колебательная неустойчивость — она развивается при значительно меньших градиентах температуры, чем стационарная конвекция.

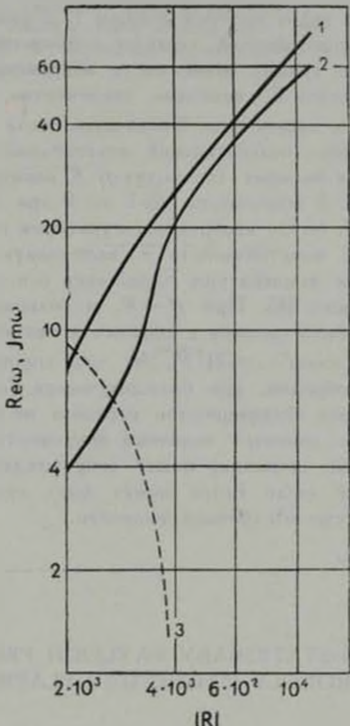

Рис. 3. Инкремент и частота колебаний как функции числа Релея ($R < 0$).

Остановимся на вопросе о величинах инкрементов при быстром сверхадиабатическом нагреве слоя плазмы. Когда $R \gg R_c''$, возмущения растут монотонно.

Предполагая, что максимальный инкремент достигается при конечном значении „a" ($a \approx a_c$), из (5) в пределе больших R получим

$$\Sigma^2 \approx -R\frac{a_c^2}{k_c P} - \frac{\pi^2 M^2}{P_m}.$$

При этом должно быть $M^2 \leqslant 0(R)$, $\Sigma^2 = 0(R)$; $\operatorname{Im}\Sigma \to 0$.

Для того, чтобы составить более полное представление о возникновении конвекции при закритических значениях градиента температуры, приведем результаты численного расчета инкрементов и частот колебаний для плазмы с параметрами $P = 0.01$, $\omega_e \tau_e = 10$, $P_m = 10^4$; волновое число выберем равным 1. В этом случае наустойчивость носит апериодический характер в диапазоне M от 0 до 10^2. На рис. 3 приведен график зависимости инкремента $Re\,\Sigma$ от R при $M = 1$ (сплошная линия I), величины инкрементов мало зависят от M в этом интервале параметров. Увеличение числа Гартмана до 10^3 приводит к появлению колебательной неустойчивости при $-3 \cdot 10^3 \lesssim R < -2 \cdot 10^1$; для больших (по модулю) R возмущения нарастают монотонно. На рис. 3 зависимость $Re\,\Sigma$ от R при $M = 10^3$ показана сплошной линией II, $\mathrm{Im}\,\Sigma$ — изображена пунктиром (кривая III). Переход колебательной неустойчивости в монотонную при достаточна больших градиентах температуры характерен и в случае изотропной проводящей жидкости [6]. При $R \sim R_c$ и больших M и P_m период колебаний должен быть сравним с двойным временем пробега τ_A альвеновской волны в слое: $\tau_A \approx 2\sqrt{P_m}/M$, что хорошо согласуется с расчетом. Таким образом, при больших числах Релея и Гартмана и $\omega_e \tau_e \lesssim 10$ анизотропия коэффициентов переноса не влияет на частоту колебаний и слабо изменяет величины инкрементов. С другой стороны, возникновение конвекции может сопровождаться колебаниями, причем критическое число Релея может быть существенно меньше того, которое присуще изотропной жидкости.

Институт физики Земли
АН СССР

ON THE NON-STATIONARY RAYLEIGH PROBLEM FOR STRONGLY MAGNETIZED PLASMA

L. A. ABRAMOV, L. S. ALPEROVITCH

The problem concerning oscillatory onset of convection in a horizontal plasma layer immersed in constant vertical gravitational and magnetic fields has been solved. When thermal conductivity anisotropy is significant, viscosity is isotropic (only the electrons are magnetized) and also the Hartman number is large, an overstability can occur if „the magnetic Prandtl number" is large in comparison with unity. The formulae deduced is a natural generalization of Chandrasekhar's criteria and may by used in the theory of hydromagnetic wave generation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. Н. Гершман, В. Л. Гинзбург.* Труды ГГУ 30, 1956.
2. *B. D. Savage.* Ap. J., 156, 707, 1969.
3. *S. Chandrasekhar,* Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Oxford, 1968.
4. *R. D. Gibson.* Proc. Camb. Phil. Soc., 67, 287, 1966.
5. *С. И. Брагинский,* Вопросы теории плазмы, вып. 1, 1963.
6. *Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий,* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости, Наука, М., 1972.