АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 11 ФЕВРАЛЬ, 1975 ВЫПУСК 1

О ПОТЕНЦИАЛЕ В ТЕОРИИ ТРЕТЬЕГО КВАДРАТИЧНОГО ИНТЕГРАЛА ДВИЖЕНИЯ

В. И. РОДИОНОВ

Поступила 25 марта 1974
Пересмотрена 12 августа 1974

Рассматриваются некоторые свойства потенциала, допускающего третий, квадратичный относительно компонент скорости интеграл движения.

1. Обычно принято подчеркивать, что большему числу изолирующих интегралов движения соответствует более специальный вид потенциала. Это, очевидно, так, однако здесь существенно иметь в виду прежде всего взаимное соответствие в структуре „интегралы движения — потенциал“: конкретному набору интегралов движения отвечает определенный класс потенциалов с характерными только для этого класса свойствами, и наоборот.

Путь „от интегралов движения к потенциалу“ нашел широкое употребление, в то время как обратная задача практически не рассматривалась. Можно указать на единственную в этом плане публикацию Д. Линден-Белла [1], не приводящую, однако, к новым результатам.

В настоящей работе будут описаны некоторые свойства потенциала, являющиеся следствием его формы в теории третьего квадратичного интеграла движения. Эти свойства представляют интерес как в теоретическом отношении, так и в приложении этого интеграла к динамике сплюснутых звездных систем.

2. Потенциал, допускающий третий квадратичный интеграл, выражается, как известно, через произвольную четную функцию $\varphi(\xi)$ аргумента $\xi = \xi_1$ или ξ_2, где ξ_1, ξ_2 — безразмерные эллиптические координаты. Формулы связи этих координат с цилиндрическими R и z имеют вид:

$$R^2 = z_0^2(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2),$$
$$z^2 = z_0^2 \xi_1^2 \xi_2^2, \tag{1}$$

где $1 \leqslant \xi_1^2 < \infty, 0 \leqslant \xi_2^2 \leqslant 1$, а z_0 — параметр третьего квадратичного интеграла.

Функция $\varphi(\xi)$, в свою очередь, может быть найдена несколькими способами. Здесь потребуются следующие ее выражения [2] (с точностью до аддитивной постоянной):

$$\varphi(\xi) = U(R = 0,\ z = 0) - (1 - \xi^2)\,U(R = 0,\ z = z_0\xi), \tag{2}$$

$$\varphi(\xi) = \xi^2 U(R = z_0\sqrt{\xi^2 - 1},\ z = 0). \tag{3}$$

Формула (2) выражает функцию $\varphi(\xi)$ во всей области ее определения, если известен потенциал $U(R = 0,\ z)$ на оси симметрии $R = 0$, а формула (3) — в области $1 \leqslant \xi^2 < \infty$, если известен потенциал $U(R, z = 0)$ в экваториальной плоскости $z = 0$.

Таким образом, с учетом формул (2) и (3) потенциал можно записать, например, так:

$$U(\xi_1, \xi_2) = \frac{Q}{\xi_1^2 - \xi_2^2}, \tag{4}$$

$$Q = \xi_1^2 U(R = z_0\sqrt{\xi_1^2 - 1}, z = 0) + (1 - \xi_2^2)\,U(R = 0, z = z_0\xi_2) - $$
$$- U(R = 0,\ z = 0).$$

Из двух вышеприведенных эквивалентных определений функции $\varphi(\xi_1)$ вытекает связь потенциалов в экваториальной плоскости $z = 0$ и на оси симметрии $R = 0$ при $|z| \geqslant z_0$. Выразим эти потенциалы один через другой:

$$U(R = 0, |z| = z_0\xi_1) = \frac{\xi_1^2 U(R = z_0\sqrt{\xi_1^2 - 1},\ z = 0) - U(R = 0,\ z = 0)}{\xi_1^2 - 1},$$

$$U(R = z_0\sqrt{\xi_1^2 - 1}, z = 0) = \frac{U(R=0, z=0) + (\xi_1^2 - 1)\,U(R=0, |z| = z_0\xi_1)}{\xi_1^2}.$$

Учитывая формулы связи эллиптических координат с цилиндрическими (1), перепишем последние два выражения:

$$U(R = 0, |z| \geqslant z_0) = \frac{z^2 U(R = \sqrt{z^2 - z_0^2}, z = 0) - z_0^2\, U(R = 0, z = 0)}{z^2 - z_0^2}. \tag{5}$$

$$U(R\geqslant 0, z=0)=\frac{z_0^2U(R=0, z=0)+R^2U(R=0, |z|=\sqrt{R^2+z_0^2})}{R^2+z_0^2} \qquad (6)$$

В дальнейшем ограничимся, в силу симметрии, рассмотрением верхней полуплоскости $z>0$ и предположим, что $U(R=0, z=0)=\mathrm{Max}\, U(R, z)$ есть величина ограниченная.

3. Докажем следующее утверждение для потенциала, допускающего третий квадратичный интеграл. *Если потенциал на оси симметрии $U(z\geqslant z_0)$ есть строго убывающая функция, то экваториальный потенциал $U(R)$ обладает следующими свойствами:*

(A) *является строго убывающей функцией,*

(B) *при любом $\varepsilon>0$ таком, что $R>\varepsilon$, удовлетворяет неравенству*

$$U(R)<U(R=0)-[U(R=0)-U(\varepsilon)]\frac{R^2(\varepsilon^2+z_0^2)}{\varepsilon^2(R^2+z_0^2)}. \qquad (7)$$

Доказательство. Дифференцируя формулу (6), получим:

$$\frac{d}{dR}[U(R>0, z=0)]=\frac{R}{(R^2+z_0^2)^2}\Big\{R^2\sqrt{R^2+z_0^2}\times$$

$$\times U_z(R=0, z=\sqrt{R^2+z_0^2})+2z_0^2[U(R=0, z=\sqrt{R^2+z_0^2})-$$

$$-U(R=0, z=0)]\Big\}.$$

Доказательство первой части утверждения (A) следует из этого выражения. Для доказательства второй части (B) продифференцируем формулу (5). Имеем:

$$\frac{d}{dz}[U(R=0, z\geqslant z_0)]=\frac{z}{(z^2-z_0^2)^2}\Big\{z^2\sqrt{z^2-z_0^2}\times$$

$$\times U_R(R=\sqrt{z^2-z_0^2}, z=0)+2z_0^2[U(R=0, z=0)-$$

$$-U(R=\sqrt{z^2-z_0^2}, z=0)]\Big\}. \qquad (8)$$

По условию $dU(R=0, z>z_0)/dz<0$. Поэтому

$$z^2\sqrt{z^2-z_0^2}\,U_R(R=\sqrt{z^2-z_0^2}, z=0)+2z_0^2[U(R=0, z=0)-$$

$$-U(R=\sqrt{z^2-z_0^2}, z=0)]<0.$$

Здесь, очевидно, $z \neq z_0$ или, что то же самое, $R \neq 0$ (случай $z = z_0$ рассмотрим ниже). Переходя в этом неравенстве к переменной R, преобразуем его к виду:

$$U_R(R) < \frac{2z_0^2[U(R) - U(0)]}{R(R^2 + z_0^2)}. \qquad (9)$$

В результате деления обеих частей неравенства (9) на $[U(R) - - U(0)]$ и его последующего интегрирования в пределах от ε до R $(0 < \varepsilon < R)$ получим в конечном итоге неравенство (7). Доказательство завершено.

Справедливо и обратное утверждение, а именно: если экваториальный потенциал $U(R)$ есть строго убывающая функция и при любых $\varepsilon > 0$ таких, что $R > \varepsilon$, удовлетворяет неравенству (7), то потенциал на оси симметрии $U(z \geqslant z_0)$ также есть строго убывающая функция — доказательство очевидно.

4. Чтобы не возникала особенность в выражении для потенциала, допускающего третий квадратичный интеграл (в частности, в формуле (4)), необходимо выполнение равенства:

$$U(R=0,\ z=z_0) = U(R=0,\ z=0) + \frac{z_0^2}{2} U_{RR}(R=0,\ z=0).$$

Это отмечалось уже ранее (см., например, [3]).

Аналогичная ситуация складывается при анализе выражений производных $[\partial^n U(\xi_1, \xi_2)/\partial\xi_2^n]$ при $\xi_1 = \xi_2 = 1$ (т. е. $z = z_0$). Действительно, устремляя в (8) z к z_0, получим следующее соотношение:

$$\frac{1}{z_0} \frac{\partial U(R=0,\ z=z_0)}{\partial z} = \frac{\partial^2 U(R=0,\ z=0)}{\partial R^2} + \frac{1}{12} z_0^2 \frac{\partial^4 U(R=0,\ z=0)}{\partial R^4}.$$

Дифференцируя (8) один раз и рассматривая предел полученного выражения при $z \to z_0$, будем иметь:

$$\frac{\partial^2 U(R=0,\ z=z_0)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U(R=0,\ z=0)}{\partial R^2} + \frac{5}{12} z_0^2 \frac{\partial^4 U(R=0,\ z=0)}{\partial R^4} + \\ + \frac{1}{90} z_0^4 \frac{\partial^6 U(R=0,\ z=0)}{\partial R^6}.$$

И вообще, из условия

$$\lim_{\xi_2 \to 1} \left(\frac{\partial^n U}{\partial \xi_2^n}\right)_{\xi_1 = 1} = \lim_{\xi_1 \to 1} \left(\frac{\partial^n U}{\partial \xi_2^n}\right)_{\xi_2 = 1}$$

с необходимостью вытекает соотношение:

$$z_0^{n-2}\frac{\partial^n U(R=0, z=z_0)}{\partial z^n} = \frac{\partial^2 U(R=0, z=0)}{\partial R^2} + c_1^{(n)} z_0^2 \frac{\partial^4 U(R=0, z=0)}{\partial R^4} +$$

$$+ c_2^{(n)} z_0^4 \frac{\partial^6 U(R=0, z=0)}{\partial R^6} + \dots + c_n^{(n)} z_0^{2n} \frac{\partial^{2(n+1)} U(R=0, z=0)}{\partial R^{2(n+1)}}, \quad (10)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Здесь $c_i^{(n)}$ $(i = 1, \dots, n)$ — постоянные коэффициенты.

5. Рассмотрим некоторые следствия полученных свойств потенциала.

Как было показано в [2], для того, чтобы не возникало особенностей в распределении плотности в моделях, допускающих третий квадратичный интеграл, необходима 6-кратная непрерывная дифференцируемость потенциала по R в центре системы или, что эквивалентно, 3-кратная непрерывная дифференцируемость функции $\varphi(\xi)$ при $\xi = 1$. Этот результат является следствием полученного соотношения (10).

Предположим, что *только* при $R > R_1$ (R_1 — константа) экваториальный потенциал подчиняется условиям (А), (В) рассмотренного выше утверждения. Тогда из утверждения следует, что на $(0, R_1)$ имеет место неравенство

$$U(R) > f(R) = U(0) - [U(0) - U(R_1)]\,\frac{R^2(R_1^2 + z_0^2)}{R_1^2(R^2 + z_0^2)}. \quad (11)$$

Далее, подставляя (7) в (9) и усиливая таким образом последнее неравенство, получим

$$U_R(R) < -2z_0^2[U(0) - U(\varepsilon)]\,\frac{\varepsilon^2 + z_0^2}{\varepsilon^2}\,\frac{R}{(R^2 + z_0^2)^2}. \quad (12)$$

Из неравенств (7), (12), выражения (11) и непрерывности потенциала в центре следует, что при малых R естественной аппроксимацией силового поля в экваториальной плоскости является квазиупругое поле. При этом чем больше значение параметра z_0, тем обширнее центральная область, где силовое поле будет иметь подобный характер.

Ограничивающее действие условия (В) сказывается, в основном, при умеренных значениях R. Если же R велико по сравнению с z_0^2, влияние неравенства (7) на потенциал несущественно.

Г. Хори [3], приспосабливая потенциал модели М. Шмидта [4] к виду, допускающему третий квадратичный интеграл, отметил, что монотонность потенциала на оси симметрии с возрастанием z нарушается, если оставлять без изменений экваториальный потенциал. То же относится и к моделям М. Шмидта [5] и Я. Эйнасто с сотрудниками [6, 7]. Экваториальный потенциал этих моделей не удовлетворяет условию (B). Это может объясняться, в частности, тем, что в центрально-области силовое поле этих моделей отличается от квазиупругой Но, в общем, эти модели строились без учета третьего квадратичного интеграла.

Проведем асимптотическую оценку экваториального потенциала и его производной при больших R. Из (12) очевидна такая оценка для U_R:

$$U_R(R) = O(R^{-3+\delta}), \quad \delta > 0.$$

Отсюда получаем для $U(R)$:

$$U(R) = O(R^{-2+\delta}), \ \delta > 0.$$

Из условия конечности массы $\delta = 1$.

Приравнивая правые части (2) и (3), преобразуем полученное равенство к виду:

$$\xi^2 [U(R = z_0 \sqrt{\xi^2 - 1}, z = 0) - U(R = 0, z = z_0 \xi)] +$$
$$+ U(R = 0, z = z_0 \xi) = U(R = 0, z = 0).$$

Переходя здесь к пределу при $\xi \to \infty$, получаем весьма интересную оценку поведения разности между экваториальным и осевым потенциалами:

$$\lim_{r \to \infty} r^2 [U(R = r, z = 0) - U(R = 0, z = r)] = z_0^2 U(R = 0, z = 0),$$

(r — расстояние от центра системы). Отсюда следует, что изоповерхности потенциала остаются сплющенными на сколь угодно больших расстояниях от центра системы (если только $z_0^2 > 0$).

Ленинградский государственный
университет

ON THE POTENTIAL IN THE THEORY OF THE THIRD QUADRATIC INTEGRAL OF MOTION

V. I. RODIONOV

Some properties of the potential admitting the third quadratic integral of motion are considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *D. Lynden-Bell*, M. N., 124, 95, 1962.
2. *В. И. Родионов*, Вестн. ЛГУ, № 13, 142, 1974.
3. *G. Hori*, Publ. astr. Soc. Japan, 14, 353, 1962.
4. *M. Schmidt*, B.A.N., 13, 15, 1956.
5. *M. Schmidt*, IAU Symposium № 25, Thessaloniki, Academic Press, London-NewYork, 61, 1966.
6. *J. Einasto, L. Einasto*, Tartu Teated, № 36, 46, 1972.
7. *J. Einasto, U. Rümmel*, Tartu Teated, № 36, 55, 1972.