АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 10 НОЯБРЬ, 1974 ВЫПУСК 4

О РОЛИ ИРРЕГУЛЯРНЫХ СИЛ В СЛАБОНЕСТАЦИОНАРНЫХ САМОГРАВИТИРУЮЩИХ СИСТЕМАХ

В. А. АНТОНОВ, С. Н. НУРИТДИНОВ

Поступила 5 октября 1973

Предлагается достаточно простая аппроксимация интеграла столкновений, удовлетворяющая закону сохранения энергии и H-теореме Больцмана. Посредством ее исследована роль иррегулярных сил в слабонестационарных самогравитирующих системах. Критическая длина волны Джинса не зависит от интенсивности иррегулярных сил, а инкременты возмущений в типичных случаях уменьшаются.

В последнее время появилось несколько работ в звездной динамике [1—4] и теории плазмы (см., например, [5, 6]), в которых вопросы, связанные с обычной диффузией в пространстве скоростей, решаются с помощью штосс-члена Чандрасекара [7] или его более упрощенной формы [8, 9]. Однако штосс-член Чандрасекара не удовлетворяет закону сохранения энергии, так как, умножая его на квадрат скорости и интегрируя по всему пространству скоростей, получим выражение, отличное от нуля.

В данной работе исследуется влияние иррегулярных сил на колебание и устойчивость слабонестационарных самогравитирующих систем. Наш ход рассуждений такой же, как в [2], отличие состоит в том, что у нас предлагается другая, видоизмененная форма штосс-члена. Отметим, что при соответствующем рассмотрении эта форма штосс-члена может быть использована и в теории плазмы.

1. Штосс-член, его свойства и линеаризация. Если рассмотреть основные свойства взаимодействия двух гравитирующих тел, то вместо штосс-члена Чандрасекара правильнее взять следующий штосс-член:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{st} \equiv \nu \frac{\partial}{\partial v}\left[(v-\bar{v})f + \hat{v}^2 \frac{\partial f}{\partial v}\right], \tag{1}$$

причем

$$\bar{v} = \frac{1}{\mu}\int v f dv, \qquad \hat{v}^2 = \frac{1}{3\mu}\int (v-\bar{v})^2 f dv, \tag{2}$$

где ν — эффективная частота звездно-звездных сближений, $\mu = \int f dv$ — звездная плотность, v — вектор скорости звезды, $\bar{v}$ — вектор скорости центроида и $\hat{v}^2$ — скалярная величина, характеризующая изотропную диффузию в пространстве скоростей. Последние две величины зависят от координат и времени. Здесь и далее, если интеграл без обозначений пределов, то интегрирование производится по всему пространству скоростей. Штосс-член (1) при $\bar{v}=0$ и $\hat{v}^2$, равном дисперсии максвелловского распределения (4), переходит в штосс-член Чандрасекара.

Рассматриваемый нами штосс-член (1) обладает следующими свойствами:

1. $$\int \psi \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{st} dv = 0 \tag{3}$$

для $\psi \equiv 1$, v и v^2. То есть выполняются законы сохранения массы, импульса и энергии.

2. Подстановка максвелловского распределения

$$f_0(v) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} \tag{4}$$

в (1) дает нуль.

3. (1) удовлетворяет Н-теореме Больцмана. Проверка первых двух пунктов проста, а доказательство третьего пункта приводится в приложении I.

Таким образом, штосс-член в форме (1) можно применять для исследования необратимой эволюции звездных систем, он будет точнее, чем приближение, данное Чандрасекаром.

Перейдем к выяснению роли иррегулярных сил в слабонестационарных звездных системах на примере бесконечной однородной модели.

Основное уравнение звездной динамики берем в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v_x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v_y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial v_z} = \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{st} \tag{5}$$

дополненное уравнением Пуассона

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\Omega^2\mu, \tag{6}$$

где $\Omega^2=4\pi Gm$, m — масса отдельной звезды. Линеаризация (1), (2), (5) и (6) дает

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial t}&+v_x\frac{\partial f_1}{\partial x}+v_y\frac{\partial f_1}{\partial y}+v_z\frac{\partial f_1}{\partial z}+\frac{\partial f_0}{\partial v_x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial f_0}{\partial v_y}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\frac{\partial f_0}{\partial v_z}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=\\&=\nu\frac{\partial}{\partial v_x}\left(v_xf_1+\sigma^2\frac{\partial f_1}{\partial v_x}\right)+\nu\frac{\partial}{\partial v_y}\left(v_yf_1+\sigma^2\frac{\partial f_1}{\partial v_y}\right)+\nu\frac{\partial}{\partial v_z}\left(v_zf_1+\sigma^2\frac{\partial f_1}{\partial v_z}\right)-\\&-\nu\left(\frac{\partial f_0}{\partial v_x}\int v_xf_1\,dv+\frac{\partial f_0}{\partial v_y}\int v_yf_1dv+\frac{\partial f_0}{\partial v_z}\int v_zf_1dv\right)+\\&+\nu\left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial v_x^2}+\frac{\partial^2 f_0}{\partial v_y^2}+\frac{\partial^2 f_0}{\partial v_z^2}\right)\left(\frac{1}{3}\int v^2f_1dv-\sigma^2\mu_1\right)\end{aligned} \tag{7}$$

и

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}=-\Omega^2\mu_1, \tag{8}$$

где $\mu_1=\int f_1dv$, а f_1 и φ_1 — соответственно, возмущение функции распределения и гравитационного потенциала, причем $|f_1|\ll|f_0|$. Система единиц выбрана так, чтобы $\mu_0=1$.

2. *Вывод дисперсионного уравнения.* Ввиду однородности среды в равновесном состоянии, можно сразу выделить из возмущения гармонику с определенной длиной волны. Все направления равноправны, поэтому можно считать, что направление волнового вектора совпадает с осью x, а длина его $k>0$. Тогда по симметрии

$$\int v_yf_1dv=\int v_zf_1dv=0.$$

Обращаются в нуль также все производные по y и z. Заменим $\partial/\partial x$ на ik. Если еще отделить время посредством $\partial/\partial t=p$, то вместо (7) и (8) получаем

$$\begin{aligned}(p+ikv_x)f_1&+i\frac{\Omega^2\mu_1}{k}\frac{\partial f_0}{\partial v_x}=\nu\frac{\partial}{\partial v_x}\left(v_xf_1+\sigma^2\frac{\partial f_1}{\partial v_x}\right)+\\&+\nu\frac{\partial}{\partial v_y}\left(v_yf_1+\sigma^2\frac{\partial f_1}{\partial v_y}\right)+\nu\frac{\partial}{\partial v_z}\left(v_zf_1+\sigma^2\frac{\partial f_1}{\partial v_z}\right)-\nu\frac{\partial f_0}{\partial v_x}\int v_xf_1dv+\\&+\nu\left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial v_x^2}+\frac{\partial^2 f_0}{\partial v_y^2}+\frac{\partial^2 f_0}{\partial v_z^2}\right)\left(\frac{1}{3}\int v^2f_1dv-\sigma^2\mu_1\right).\end{aligned} \tag{9}$$

Далее интегрируем (9) по компонентам v_y и v_z один раз непосредственно, а другой раз — предварительно умножив на $v_y^2+v_z^2$. Получаются уравнения, соответственно, для функций

$$h(v_x, t)=\iint f_1 dv_y dv_z, \qquad w(v_x, t)=\iint (v_y^2+v_z^2) f_1 dv_y dv_z.$$

Именно, после интегрирований по частям оказывается

$$\begin{gathered}(p+ikv_x)h+i\frac{\Omega^2\mu_1}{k}\frac{dF_0}{dv_x}=\nu\frac{\partial}{\partial v_k}\left(v_x h+\sigma^2\frac{\partial h}{\partial v_x}\right)-\\ -\nu\frac{dF_0}{dv_x}\int v_x h dv_x+\nu\frac{\partial^2 F_0}{dv_x^2}\left(\frac{1}{3}\int v_x^2 h dv_x+\frac{1}{3}\int w dv_x-\sigma^2\mu_1\right),\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}(p+ikv_x)w+2i\frac{\sigma^2\Omega^2\mu_1}{k}\frac{dF_0}{dv_x}=\nu\frac{\partial}{\partial v_x}\left(v_x w+\sigma^2\frac{\partial w}{\partial v_x}\right)+\\ +2\nu(2\sigma^2 h-w)-2\nu\sigma^2\frac{dF_0}{dv_x}\int v_x h dv_x+\\ +2\nu\left(\sigma^2\frac{d^2F_0}{dv_x^2}+2F_0\right)\left(\frac{1}{3}\int v_x^2 h dv_x+\frac{1}{3}\int w dv_x-\sigma^2\mu_1\right),\end{gathered} \tag{11}$$

где F_0 — проекция функции $f_0(v)$ на ось v_x:

$$F_0=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{v_x^2}{2\sigma^2}}.$$

Полученную систему уравнений решаем посредством преобразования Фурье. Введем следующие обозначения:

$$X(\tau)=\int he^{-i\tau v_x}dv_x, \qquad Y(\tau)=\int we^{-i\tau v_x}dv_x, \qquad \theta(\tau)=\int F_0 e^{-i\tau v_x}dv_x,$$

подразумевая, что эти функции еще зависят от t. В частности, при $\tau=0$ имеем

$$\mu_1=X(0), \qquad \int v_x h dv_x=iX'(0), \qquad \int v_x^2 h dv_x=-X''(0).$$

Учитывая все это, получаем

$$\begin{gathered}(\nu\tau-k)\frac{\partial X}{\partial\tau}+(p+\nu\sigma^2\tau^2)X(\tau)=\frac{\tau\Omega^2}{k}\theta(\tau)X(0)+\nu\tau\theta(\tau)X'(0)+\\ +\nu\tau^2\theta(\tau)\left|\frac{X''(0)}{3}-\frac{Y(0)}{3}+\sigma^2X(0)\right|\equiv K(\tau),\end{gathered} \tag{12}$$

$$(\nu\tau - k)\frac{\partial Y}{\partial\tau} + (p + \nu\sigma^2\tau^2)\,Y(\tau) = 2\nu\,[2\sigma^2 X(\tau) - Y(\tau)] +$$
$$+ \frac{2\sigma^2\Omega^2}{k}\tau\theta(\tau)\,X(0) + 2\nu\sigma^2\tau\theta(\tau)\,X'(0) +$$
$$+ 2\nu\,(\sigma^2\tau^2 - 2)\,\theta(\tau)\left[\frac{X''(0)}{3} - \frac{Y(0)}{2} + \sigma^2 X(0)\right]. \tag{13}$$

Последнее уравнение заменим таким:

$$(\nu\tau - k)\frac{\partial Z}{\partial\tau} + (p + 2\nu + \nu\sigma^2\tau^2)\,Z(\tau) =$$
$$= 4\nu\theta(\tau)\left[\frac{X''(0)}{3} - \frac{Y(0)}{2} + \sigma^2 X(0)\right] \equiv K_1(\tau), \tag{14}$$

где $Z = 2\sigma^2 X - Y$.

Введя переменную $\tau_1 = \tau - (k/\nu)$, (12) и (14) можно для краткости записать в виде

$$\nu\tau_1\frac{\partial X}{\partial\tau_1} + \left[p + \nu\sigma^2\left(\tau_1 + \frac{k}{\nu}\right)^2\right] X = K\left(\tau_1 + \frac{k}{\nu}\right), \tag{15}$$

$$\nu\tau_1\frac{\partial Z}{\partial\tau_1} + \left[p + 2\nu + \nu\sigma^2\left(\tau_1 + \frac{k}{\nu}\right)^2\right] Z = K_1\left(\tau_1 + \frac{k}{\nu}\right). \tag{16}$$

Функции $K(\tau)$ и $K_1(\tau)$ являются аналитическими, причем, в их определения $X(\tau)$ и $Z(\tau)$входят только посредством своих начальных значений.

Из (12) при $\tau = 0$

$$X'(0) = \frac{p}{k}X(0). \tag{17}$$

Продифференцировав (12) по τ и подставив в полученное выражение $\tau = 0$, с учетом (17) получаем

$$X''(0) = \frac{p^2 - \Omega^2}{k^2}X(0). \tag{18}$$

Везде следует учесть, что $Y(0) = 2\sigma^2 X(0) - Z(0)$. $X(0)$ и $Z(0)$ можем найти только после решения (15) и (16).

Остановимся на требовании аналитичности $X(\tau)$ и $Z(\tau)$ в некоторой окрестности особой точки $\tau_1 = 0$. Это означает существование интегралов

$$\int h(v_x, t)\,e^{av_x}dv_x, \qquad \int w(v_x, t)\,e^{av_x}dv_x, \tag{19}$$

хотя бы в некоторой полосе $|Re\, a| < T,\ T > 0$. Такое условие вызывается особенностями принятой формы штосс-члена, так как в ней динамическое трение пропорционально v. Реально динамическое трение для высоких скоростей убывает. Поэтому, если рассматривать такие функции h и w, для которых большие значения скорости играют сравнительно существенную роль (тогда интегралы (19) будут расходиться), то их эволюция со временем все равно будет описываться неправильно.

Общие решения (15) и (16) находим по методу Лагранжа, получаем

$$X(\tau) = \frac{1}{\nu N(\tau_1)} \int_0^{\tau_1} \frac{N(\tau_1)}{\tau_1} K\left(\tau_1 + \frac{k}{\nu}\right) d\tau_1, \tag{20}$$

$$Z(\tau) = \frac{1}{\nu \tau_1^2 N(\tau_1)} \int_0^{\tau_1} \tau_1 N(\tau_1) K_1\left(\tau_1 + \frac{k}{\nu}\right) d\tau_1, \tag{21}$$

где

$$N(\tau_1) = \mathrm{const} \cdot \tau_1^{\beta} \exp\left(\frac{\sigma^2 \tau_1^2}{2} + \frac{2k\sigma^2}{\nu} \tau_1\right).$$

Здесь

$$\beta = \frac{p}{\nu} + \frac{k^2\sigma^2}{\nu^2}. \tag{22}$$

При $\beta < 0$ интегралы (20), (21) расходятся и требуется аналитическое продолжение.

Подставляя $\tau = 0$ в (21), с учетом (17) и (18) получим

$$Z(0) = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon k^2} (p^2 - \Omega^2 + k^2\sigma^2) X(0), \tag{23}$$

где

$$\varepsilon = \varepsilon(p) \equiv 1 - \frac{4}{3} \int_0^1 (1-\xi)^{\beta+1} e^{\frac{k^2\sigma^2}{\nu^2}\xi} d\xi.$$

Теперь подставим (23) в (20) и при $\tau = 0$ получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\nu^2 = (\nu p + \Omega^2) \int_0^1 \xi (1-\xi)^{\beta-1} e^{\frac{k^2\sigma^2}{\nu^2}\xi} d\xi + \\ + \frac{p^2 - \Omega^2 + k^2\sigma^2}{3\varepsilon(p)} \int_0^1 \xi^2 (1-\xi)^{\beta-1} e^{\frac{k^2\sigma^2}{\nu^2}\xi} d\xi. \tag{24}$$

Отметим, что в (24) не содержатся некоторые особые решения. Пусть $\beta = -n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. В этом случае аналитические решения (12) и (14) являются более общими, чем (20) и (21) и включают в себя произвольные постоянные. Из (22) получаем

$$p = -n\nu - \frac{k^2\sigma^2}{\nu}.$$

При $\nu \to \infty$ второй член становится несущественным. Это означает, что вязкость системы отодвигает самогравитацию на задний план и мы получаем асимптотику $p = -n\nu$, которая характеризует локальную релаксацию. При конечном ν в решениях данного типа иррегулярные силы все равно играют существенную роль.

3. Критическое волновое число и асимптотика возмущений при больших ν. Критическое волновое число разделяет неустойчивые и устойчивые возмущения и определяется подстановкой $p = 0$ в дисперсионное уравнение. Рассмотрим основное уравнение (24). При $p = 0$ оно примет вид

$$\nu^2 = \Omega^2 \int_0^1 \xi (1-\xi)^{\frac{k^2\sigma^2}{\nu^2}-1} e^{\frac{k^2\sigma^2}{\nu^2}\xi} d\xi + \frac{k^2\sigma^2 - \Omega^2}{3\varepsilon(0)} \int_0^1 \xi^2 (1-\xi)^{\frac{k^2\sigma^2}{\nu^2}-1} e^{\frac{k^2\sigma^2}{\nu^2}\xi} d\xi. \tag{25}$$

Осуществив в первом интеграле (25) замену $1 - \xi \equiv \xi$ и применив интегрирование по частям, получим, что он равен $\nu^2/(k^2\sigma^2)$. Тогда (25) можно записать в виде

$$(k^2\sigma^2 - \Omega^2)\left[\nu^2 - \frac{k^2\sigma^2}{3\varepsilon(0)} \int_0^1 \xi^2 (1-\xi)^{\frac{k^2\sigma^2}{\nu^2}-1} e^{\frac{k^2\sigma^2}{\nu^2}\xi} d\xi\right] = 0.$$

Отсюда критическое k

$$k^* = \frac{\Omega}{\sigma}.$$

Иными словами, критическая длина волны Джинса не зависит от ν и остается такой же, как в бесстолкновительных системах, для которых она была вычислена в [10—13].

Таким образом, по аналогии с определением Джинса [14] система устойчива, если $k > k^*$ (когда $\mathrm{Re}\, p < 0$), неустойчива, если $k < k^*$ (когда $\mathrm{Re}\, p > 0$), и стационарна во времени, если $k = k^*$ (когда $\mathrm{Re}\, p = 0$).

Теперь перейдем к нахождению асимптотики возмущений при $\nu \to \infty$. В (24) разложим экспоненциальную функцию в степенной ряд и ограничимся двумя первыми членами разложения, чтобы получить ниже члены до порядка ν^{-1} включительно. После вычисления возникших простых интегралов имеем

$$\nu^2 = (\nu p + \Omega^2)\left[\frac{1}{\beta(\beta+1)} + \frac{2k^2\sigma^2}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\nu^2}\right] + \\ + \frac{p^2 - \Omega^2 + k^2\sigma^2}{\left[3 - \frac{4}{\beta+2} - \frac{4k^2\sigma^2}{(\beta+2)(\beta+3)\nu^2}\right]} \times \\ \times \left[\frac{2}{\beta(\beta+1)(\beta+2)} + \frac{6k^2\sigma^2}{\beta(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)\nu^2}\right]. \tag{26}$$

Умножив обе части (26) на $\beta(\beta+1)$, разложим выражения, стоящие в квадратных скобках, по степеням ν^{-1}, учитывая (22). Находим

$$\beta(\beta+1)\nu^2 = (\nu p + \Omega^2)\left(1 + \frac{k^2\sigma^2}{\nu^2} - \frac{k^2\sigma^2}{2\nu^3}p\right) + \\ + (p^2 - \Omega^2 + k^2\sigma^2)\left(1 - \frac{3}{2}\frac{p}{\nu} + \frac{9}{4}\frac{p^2}{\nu^2} + \frac{1}{6}\frac{k^2\sigma^2}{\nu^2}\right). \tag{27}$$

Отсюда получаем искомое дисперсионное уравнение при больших ν

$$18p^3 + 6(5k^2\sigma^2 - 3\Omega^2)p + \frac{1}{\nu}(10k^4\sigma^4 - 10k^2\sigma^2\Omega^2 - 23k^2\sigma^2p^2 + \\ + 27\Omega^2p^2 - 27p^4) = 0, \tag{28}$$

где поправки более высокого порядка можем не вычислять. Если отбросить в (28) член, пропорциональный ν^{-1}, то оставшаяся часть совпадает с дисперсионным уравнением, полученным гидродинамическим методом в приложении II. Величина

$$k = \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{\Omega}{\sigma}$$

является границей гидродинамической устойчивости.

Решение (28) будем искать в виде

$$p = p_0 + \frac{1}{\nu} p_1 \tag{29}$$

где p_0 — решения гидродинамического дисперсионного уравнения:

$$p_0 = 0, \quad \pm \sqrt{\Omega^2 - \frac{5}{3} k^2\sigma^2} \,. \tag{30}$$

Для нахождения p_1 подставим (29) в (28) и полученное выражение в левой части (28) разложим в ряд Тейлора. Находим

$$p_1 = -\frac{10\, k^2\sigma^2 (k^2\sigma^2 - \Omega^2) - (23\, k^2\sigma^2 - 27\, \Omega^2)\, p_0^2 - 27\, p_0^4}{6\,(9p_0^2 - 3\Omega^2 + 5k^2\sigma^2)} . \tag{31}$$

Данное решение не справедливо только вблизи $k = \sqrt{3/5}(\Omega/\sigma)$, поскольку в этой точке не имеет место разложение Тейлора.

Характерно, что для решения, совпадающего в гидродинамическом случае с $p_0 = 0$, получается $p_1 > 0$ в интервале $(\sqrt{3/5}\, k^*, k^*)$. В гидродинамическом случае это решение соответствовало бы сосуществованию объемов с разной температурой и плотностью, но с совпадающим давлением. Однако кинетические эффекты препятствуют поддержанию такого равновесия и, как видим, могут вызвать медленно нарастающую неустойчивость.

Относительно колебания с $p_0 = \pm \sqrt{\Omega^2 - (5/3)\, k^2\sigma^2}$ отметим, что оно от кинетических эффектов зависит мало.

4. *Асимптотика возмущений при малых* ν. Поскольку в реальных звездных системах ν мало, то решение (24) при малых ν имеет особую важность. Перед тем как начать рассмотрение (24), приведем его к более удобной форме. Обозначив интегралы в нем, соответственно, через J_1 и J_2, имеем

$$\nu^2 = (\nu p + \Omega^2)\, J_1 + \frac{p^2 - \Omega^2 + k^2\sigma^2}{3\varepsilon} J_2. \tag{32}$$

В ε, J_1 и J_2 сделаем опять подстановку $1 - \xi \equiv \xi$ и проинтегрируем по частям, после чего получим

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\nu^2}{3k^4\sigma^4} \left[k^2\sigma^2 + \nu^2 (\beta + 1) - \nu^2\beta (\beta + 1)\, e^{\frac{k^2\sigma^2}{\nu^2}} I \right], \tag{33}$$

$$J_1 = \frac{\nu^2}{k^2\sigma^2} - \frac{\nu p}{k^2\sigma^2}\, \sigma^{\frac{k^2\sigma^2}{\nu^2}} I, \tag{34}$$

$$J_2 = \frac{\nu^2}{k^2\sigma^2} - \frac{\nu^2\beta}{k^2\sigma^2} e^{\frac{k^2\sigma^2}{\nu^2}} I + \frac{3}{4}(1-\varepsilon) + J_1, \tag{35}$$

где введено обозначение

$$I = \int_0^1 \xi^{\beta-1} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{\nu^2}\xi} d\xi. \tag{36}$$

Чтобы воспользоваться разложением по степеням ν, нужно в (36) сделать такую же замену, как и в [2], а именно:

$$\xi = e^{-\frac{\nu}{k\sigma}q}.$$

Тогда

$$I = \frac{\nu}{k\sigma}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{p}{k\sigma}q - \frac{k\sigma}{\nu}q - \frac{k^2\sigma^2}{\nu^2}e^{-\frac{\nu}{k\sigma}q}\right)dq.$$

Подставив сюда разложение функции $e^{-\frac{\nu}{k\sigma}q}$ до порядка ν^3 включительно, имеем

$$I = \frac{\nu}{k\sigma} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{\nu^2}} \int_0^\infty \left(1 + \frac{\nu}{6k\sigma}q^3\right)\exp\left(-\frac{p}{k\sigma}q - \frac{q^2}{2}\right)dq.$$

Наконец, после вычисления интегралов (см. [15]),

$$I = \frac{\nu}{k\sigma} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{\nu^2}} \left[E(p) + \frac{\nu}{3k\sigma} + \frac{\nu p^2}{6k^3\sigma^3} - \frac{\nu p(p^2+3k^2\sigma^2)}{6k^4\sigma^4}E(p)\right], \tag{37}$$

где $E(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp\left(\frac{p^2}{2k^2\sigma^2}\right)\left[1 - \Phi\left(\frac{p}{\sqrt{2}\,k\sigma}\right)\right]$, Φ — интеграл вероятности.

Теперь (37) подставим в (33)—(35). Тогда (32) примет вид

$$\Omega^2 k\sigma - k^3\sigma^3 - \Omega^2 pE(p) + \nu A(p) = 0, \tag{38}$$

где

$$A(p) = \frac{(p^2 - \Omega^2 + k^2\sigma^2)E(p)}{3} +$$

$$+ p\frac{\Omega^2 k^3\sigma^3 + (\sigma k - pE(p))\left[(p^2 + k^2\sigma^2)(4k^2\sigma^2 - \Omega^2) - 6p^2k^2\sigma^2\right]}{6k^4\sigma^4}.$$

Легко показать, что при $\nu = 0$ (38) переходит в дисперсионное уравнение бесстолкновительных систем, полученное в [10—12, 16].

Решение (38) будем искать в виде

$$p = p_0 + \nu p_1, \tag{39}$$

где теперь p_0 — решение дисперсионного уравнения бесстолкновительных систем [17].

Подставляя (39) в (38) и разлагая $E(p_0 + \nu p_1)$ в ряд Тейлора с точностью $\sim \nu$, найдем

$$p_1 = -\frac{k^2\sigma^2}{\Omega^2} \frac{A(p_0)}{k\sigma p_0 - (p_0^2 + k^2\sigma^2)E(p_0)}. \tag{40}$$

Отрицательность p_1 при $0 < k - k^* \ll k^*$ доказываем в приложении III.

Как мы видим, оба предельных случая подтверждают, что $k^* = \Omega/\sigma$ разделяет устойчивые и неустойчивые решения.

Заключение. Мы рассмотрели влияние иррегулярных сил на колебание и устойчивость слабонестационарных самогравитирующих систем с помощью штосс-члена (1), удовлетворяющего закону сохранения энергии и H-теореме Больцмана. Оказалось, что эти силы не затрагивают критическую длину волны Джинса. Поправки за иррегулярные силы при малых ν отрицательны в устойчивом случае, то есть процесс затухания возмущений облегчается.

При больших ν имеет место потеря непрерывности при переходе к гидродинамическому пределу: в интервале $(\sqrt{3/5}\,k^*, k^*)$ инкремент неустойчивости уменьшается до нуля. В этом случае при любом конечном ν неустойчивость формально остается, а при $\nu = \infty$ она исчезает.

Реальные звездные системы, конечно, неоднородны. Тем не менее, уже на примере однородной модели выявляются многие качественные стороны совместного действия регулярных и иррегулярных сил.

Ленинградский государственный
университет

ON THE ROLE OF IRREGULAR FORCES IN WEAKLY NON-STATIONARY SELF-GRAVITATING SYSTEMS

V. A. ANTONOV, S. N. NURITDINOV

A suitable simple approximation of the collision integral is proposed. The conservation of energy and the Boltsmann's H-theorem are fulfilled. The role of irregular forces in a weakly non-stationary, self-gravitating system is investigated by means of this approximation. The Jeans' critical wavelength is not affected by the magnitude of irregular forces .The increments are decreased by the irregular forces in all typical cases.

ЛИТЕРАТУРА

1. *D. Lynden-Bell*, M. N., 136, 101, 1967.
2. *С. Г. Помогаев*, Бюлл. Ин-та астрофизики АН Тадж.ССР, № 51—52, 65, 1968.
3. *И. Л. Генкин*, Труды Астрофиз. ин-та АН Каз.ССР, 17, 68, 1971.
4. *С. Г. Помогаев*, Бюлл. Ин-та астрофизики АН Тадж. ССР, № 61, 3, 1972.
5. *A. Lenard, I. B. Bernstein*, Phys. Rev., 112, 1456, 1958.
6. *В. И. Карпман*, ЖЭТФ, 51, 907, 1966.
7. *С. Чандрасекар*, Стохастические проблемы в физике и астрономии, М., 1947.
8. *Л. С. Марочник, В. К. Бабков*, Бюлл. Ин-та астрофизики АН Тадж.ССР, № 50, 16, 1968.
9. *И. Л. Генкин*, Труды Астрофиз. ин-та АН Каз.ССР, 12, 34, 1969.
10. *R. Simon*, Bull. Cl. sci. Acad. Roy. Belg., 47, 731, 1961.
11. *D. Lynden-Bell*, M. N., 124, 279, 1962.
12. *P. A. Sweet*, M. N., 125, 285, 1963.
13. *М. Н. Максумов, Л. С. Марочник*, ДАН СССР, 164, 1019, 1965.
14. *J. H. Jeans*, Astronomy and Cosmogony, Cambridge, 1929.
15. *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1963.
16. *В. И. Лебедев, М. Н. Максумов, Л. С. Марочник*, Астрон. ж., 22, 709, 1965.
17. *Л. С. Марочник*, Бюлл. Ин-та астрофизики АН Тадж.ССР, № 51—52, 10, 1968.

Приложения

I. Докажем, что (1) удовлетворяет Н-теореме Больцмана, т. е. закону возрастания энтропии. Достаточно дать доказательство для пространственно однородного случая. С этой целью умножим обе части (5) на $1+\ln f$ и проинтегрируем по всему пространству скоростей. Имеем

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\int (1+\ln f)\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{st} dv, \tag{I.1}$$

где $S=-\int f\ln f dv$ есть энтропия системы. Остается показать, что интеграл, стоящий в правой части [I.1], меньше либо равен нулю. Для этого в него подставляем (1) и, интегрируя по частям, получаем

$$\int (1+\ln f)\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{st} dv = -\frac{\nu}{3\mu}\left[\int (v-\bar{v})^2 f dv \int \frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 dv - \right.$$
$$\left. -\left(\int (v-\bar{v})\frac{\partial f}{\partial v} dv\right)^2\right].$$

Пусть $M(v) = (v - \bar{v})^2 f$, а $\Theta(v) = (1/f)(\partial f/\partial v)^2$. Тогда выражение в квадратной скобке в последнем уравнении, согласно неравенству Коши-Буняковского для функций $M(v)$ и $\Theta(v)$, является положительным.

II. Выведем дисперсионное уравнение в случае $\nu \to \infty$ гидродинамическим методом. Если с самого начала предполагать, что распределение Максвелла устанавливается мгновенно, то можно вести расчеты методом моментов.

Сначала получим нужные нам связи между моментами. Представим некоторую случайную величину ξ в виде $\xi = \alpha + \eta$, причем α — малая величина, а средние значения $\bar{\xi} = \alpha$, $\eta = 0$ и $\overline{\xi^2} = \alpha^2 + \overline{\eta^2} \approx \overline{\eta^2}$. Тогда

$$\overline{\xi^3} = \alpha^3 + 3\alpha\,\overline{\eta^2} \approx 3\bar{\xi}\cdot\overline{\xi^2}. \tag{II.1}$$

Если ξ_1 — некоторая другая независимая случайная величина, то

$$\overline{\xi\cdot\xi_1^2} = \alpha\cdot\overline{\xi_1^2} = \bar{\xi}\cdot\overline{\xi_1^2}. \tag{II.2}$$

Вернемся к основному уравнению звездной динамики (5). Введя следующие обозначения

$$s = \int v_x f\,dv, \qquad u = \int v_x^2 f\,dv, \qquad \chi = \int v_x^3 f\,dv$$

и интегрируя (5) по v, предварительно умножив его на 1, v_x и $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, соответственно, получаем

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - \mu\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0,$$

$$3\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\chi + \int v_x (v_y^2 + v_z^2) f\,dv\right] - 2s\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0,$$

где $\mu = \int f\,dv$.

Из (II.1) и (II.2) следует, что

$$\chi + \int v_x (v_y^2 + v_z^2) f\,dv = 5su.$$

Линеаризация этих уравнений и замена $\partial/\partial t = p$ и $\partial/\partial x = ik$ с учетом уравнения Пуассона дает

$$p\mu_1 + iks_1 = 0,$$

$$ps_1 + iku_1 = i\,\frac{\Omega^2\mu_1}{k},$$

$$3pu_1 + 5ik\sigma^2 s_1 = 0,$$

откуда находим дисперсионное уравнение

$$3p^2 - 3\Omega^2 + 5k^2\sigma^2 = 0,$$

III. Докажем, что выражение (40) отрицательно при $0 < k - k^* \ll k^*$. Введя обозначения $\gamma = (p_0^2/\Omega^2) - 1$ и $R = (k/k^*)^2$, из (40), с учетом определения p_0 в (38), получаем

$$p_1 = (\gamma + 1)\,\frac{\gamma + 3R - 6R^2}{6R(\gamma + R)} + \frac{\gamma + R}{3}.$$

При $R = 1$ и $-1 < \gamma < 1/3$ эта дробь отрицательна. То же по непрерывности верно и при R, несколько большем 1.

Отметим, что в некоторых случаях возможно и $p_1 > 0$: в области очень больших k или при $k < k_*$ (при $k = 0$ имеем $p^2 = \Omega^2$ независимо от ν).