АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 10 НОЯБРЬ, 1974 ВЫПУСК 4

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ СКОРОСТЕЙ ЗВЕЗД ПРИ ЧИСТО РАЗРЫВНОМ СЛУЧАЙНОМ ПРОЦЕССЕ

Р. Б. ШАЦОВА

Поступила 20 января 1974

Модификация формулы Планка для скоростей звезд аппроксимирует квазистационарное решение уравнения Колмогорова—Феллера для чисто разрывного случайного процесса. Это следует как из совпадения их асимптотик в областях малых и больших скоростей, так и из практического совпадения функции с численным решением для промежуточных скоростей. Функция Планка применяется для определения вероятности звездных сближений с заданным изменением модуля скорости, если массы равны средней массе звезд поля.

Пространственные плотности звездных систем разного ранга весьма различны как по средним, так и по их зависимостям от координат и времени. Наряду с такими разреженными системами, как Галактика в окрестностях Солнца в современную эпоху, известны гораздо более плотные скопления звезд и центральные области галактик. С точки зрения теории волн плотности повышенные плотности могут быть и на периферии галактик, в течение отдельных интервалов времени.

В условиях повышенной плотности нередкие сближения между звездами или газово-пылевыми туманностями могут определять динамику системы. В ряде работ, следуя предложению Т. А. Агекяна [1], такие взаимодействия трактуются с позиций чисто разрывного случайного процесса. Для описания изменений скоростей в этом процессе используется уравнение Колмогорова—Феллера, которое И. В. Петровская [2] записала в виде

$$\frac{\partial \varphi(x,\theta,y)}{\partial\theta} = -\varphi(x,\theta,y)\int\limits_0^\infty \Phi(y,z-y)\,dz + \int\limits_0^{y_1} \varphi(x,\theta,z)\,\Phi(z,y-z)\,dz \quad (1)$$

с безразмерными переменными — временем θ и модулями скорости x и y. $\varphi(x,\theta,y)$ — вероятность того, что модуль, равный x в момент $\theta=0$, примет значение в интервале $(y, y+dy)$ в момент θ. $\Phi(x, y-x)dy\,d\theta$ — вероятность того, что за время $d\theta$ случайная переменная x получит приращение, когда ее новое значение будет заключено в $(y, y+dy)$.

Трудности в получении аналитического решения интегро-дифференциального уравнения [1] побудили И. В. Петровскую и В. С. Калиберда [3, 4] решать его численными методами для ряда вариаций в начальных условиях, в y_1 — скорости усечения, а также в массах взаимодействующих звезд.

Сравнение теоретических функций, представленных таблицами, с наблюдениями для звездных скоплений пока недоступно, в связи с малой дисперсией скоростей в скоплениях и довольно большими ошибками наблюдений. Однако допустим, что распределение скоростей звезд поля установилось в процессе звездообразования, в условиях повышенной плотности материи, и сохранилось без существенных изменений до нашего времени. Тогда современная малая плотность материи в окрестностях Солнца не может быть аргументом против сравнения теоретических функций [3, 4] с наблюденными распределениями скоростей близких звезд. А результат этого сравнения может быть интересен с точки зрения сделанного допущения.

Трудностью на пути такого сопоставления служит различие в абсциссах усечения: для вычислений принимались y_1 от 1.4 до 2.5, наблюдения же дают $y_1 > 4$. Эту трудность мы обошли следующим образом. Вместо самих гистограмм распределений скоростей использовали их аналитическое представление во всем диапазоне наблюдаемых скоростей с помощью модификации функции Планка [5], которое затем искусственно усекли по методу Мичи [6], введя в числитель множитель усечения при том же y_1 что и в [3]:

$$\varphi(y)\,dy = p(\delta, w_1)\,\frac{l^3 y^2 [1-\exp(y^2-y_1^2)]\,dy}{(\delta+l^2y^2)^{7/2}\,[\exp(\delta+l^2y^2)^{-1/2}-1]}, \quad (2)$$

где $y^2 = v^2/\langle v^2\rangle$, $l^2 = \langle v^2\rangle/C^2$, $w_1^{-2} = \delta + l^2y_1^2$.

Здесь $\langle v^2\rangle$ — дисперсия скоростей, C и δ — параметры, $p(\delta\, w_1)$ — получаемая из условия нормировки функция.

Наиболее детальное сравнение производилось с теоретическим случаем равных масс у пробной звезды и звезд поля для разных моментов времени по данным [3]. Обнаружено, что у сравниваемых функций имеется заметное сходство, которое нарастает по мере увеличения θ, вплоть до квазиравновесного случая, изображенного на рис. 1a. Здесь кривая ([2]) рассчитана при $l=0.22$ и $\delta=0.02$. Чтобы иметь критерии близости, на рис. 1b та же функция И. В. Петровской сопоставляется с функцией Максвелла при двух значениях дисперсий и на рис. 1c изображены функции И. В Петровской и В. С. Калиберда 1-го приближения, а также полученная на основе последней функция 2-го приближения [7], которые их авторы считают почти совпадающими между собой. Как видим, расхождения между кривыми на рис. 1a не больше, чем на рис. 1c. Они будут еще меньше для 2-го приближения функции И. В. Петровской.

Отметим, что в [3] для звезд поля принималось распределение Максвелла. Рис. 1b показывает степень несамосогласованности решения [3], что, впрочем мало влияет на окончательную функцию $f(y)$ для $y<2$, судя по [7].

Большое сходство кривых рис. 1a делает желательным получение более согласованного решения уравнения (1), когда распределение скоростей звезд поля представляется формулой Планка. Первоочередной задачей на этом пути становится нахождение Φ — вероятности сближений с заданным изменением скорости. Эта задача имеет и самостоятельный интерес. При максвелловском распределении скоростей звезд поля ее решил Т. А. Агекян [1]. Для распределения В. С. Калиберда [4] с усечением $y_1=2$ функция Φ получена в [7]. Привлечение нового примера позволит оценить чувствительность результатов к исходным данным и, в частности, к усечению функции.

Вероятность сближений с заданным изменением модуля скорости в случае равенства масс рассматриваемой звезды и звезд поля получаем на основании общих формул Т. А. Агекяна [1], в которых переходим к переменной в виде первой степени приведенной скорости $x=v/\sqrt{\langle v^2\rangle}$ и интегрирование производим по $z=v_f/\sqrt{\langle v\rangle}$ — приведенной скорости звезд поля. Тогда

$$\Phi'(x,\ y-x)=\frac{32\pi y}{3x\,(y^2-x^2)^3}\left|\frac{1}{4}x\,(x^2+3y^2)\int_y^\infty\varphi(z)\frac{dz}{z}+\right.$$
$$\left.+\int_{\sqrt{y^2-x^2}}^{y}\varphi(z)\left(z^2-\frac{y^2-x^2}{4}\right)\sqrt{z^2-y^2+x^2}\,\frac{dz}{z}\right|,\quad y>x \tag{3}$$

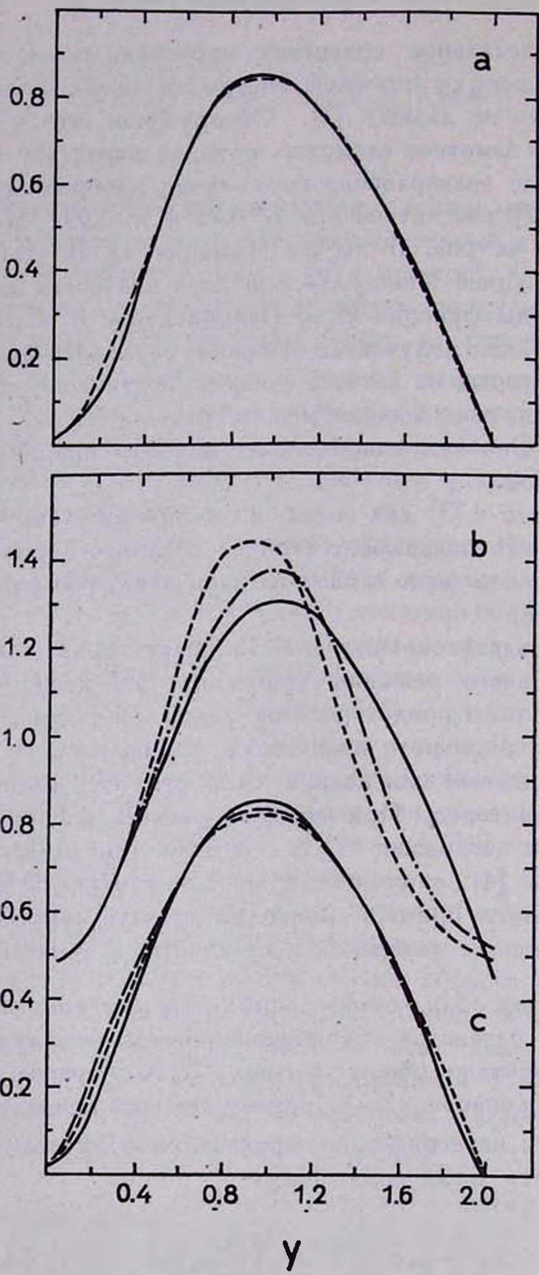

Рис. 1. Кривые распределений скоростей звезд. Обозначения: *a*) сплошная линия — функция Планка, пунктирная — функция И. В. Петровской. *b*) сплошная линия — функция И. В. Петровской, пунктирная и штрих-пунктирная — функции Максвелла с σ 1 и 1.175, соответственно, *c*) сплошная линия — функция И. В. Петровской, редкий пунктир — функция В. С. Калиберда, частый пунктир — функция А. А. Вьюга, В. С Калиберда и И. В. Петровской.

и

$$\Phi''(x, y-x) = -\frac{32\pi y}{3x(y^2-x^2)^3}\left[\frac{1}{4}y(3x^2+y^2)\int_y^\infty \varphi(z)\frac{dz}{z} + \right.$$

$$\left. + \int_0^y \varphi(z)\left(z^2 - \frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{4}x^2\right)dz\right], \quad y < x. \tag{4}$$

При $y \to x$ выражения (3) и (4) совпадают, но $\Phi \to \infty$.

В качестве $\varphi(z)$ — распределения скоростей звезд поля — примем неусеченное или вертикально усеченное планковское распределение из [5]:

$$\varphi(z)\,dz = \frac{p(\delta)\,l^3 z^2 dz}{(\delta + l^2z^2)^{7/2}\left[\exp(\delta + l^2z^2)^{-1/2} - 1\right]}, \tag{5}$$

где

$$p(\delta) = \left[\int_0^{\delta^{-1/2}} \frac{t^3\sqrt{1-\delta t^2}\,dt}{e^t - 1}\right]^{-1}, \tag{6}$$

смысл l^2 и δ объяснен выше. В случае усечения $p(\delta)$ заменяется на $p(\delta, v_1/C)$, когда нижний предел в (6) равен $(v_1^2/C^2 + \delta)^{-1/2}$.

При подстановке (5) в (3) и (4) сталкиваемся со следующими интегралами и их представлением через табличные (некоторые из них приведены в [8], другие еще не опубликованы):

$$J_1 = \int_y^\infty \varphi(z)\frac{dz}{z} = p(\delta)\,l^3\int_y^\infty \frac{(\delta + l^2z^2)^{-7/2}\,z\,dz}{\exp(\delta + l^2z^2)^{-1/2} - 1} =$$

$$= p(\delta)\,l\int_0^{\Delta_1^{-1/2}} \frac{u^4 du}{e^u - 1},$$

$$J_2 = \int_0^y \varphi(z)\left[z^2 - \frac{3}{4}(y^2 - x^2)\right]dz = \frac{p(\delta)}{l^2} =$$

$$\times\left\{\int_{\Delta_1^{-1/2}}^{\delta^{-1/2}} \frac{u\sqrt{1-\delta u^2}\,du}{e^u - 1} - \left[\delta + \frac{3}{4}l^2(y^2-x^2)\right]\int_{\Delta_1^{-1/2}}^{\delta^{-1/2}} \frac{u^3\sqrt{1-\delta u^2}\,du}{e^u - 1}\right\}. \tag{7}$$

$$J_3 = \int\limits_{\sqrt{y^2-x^2}}^{y} \varphi(z)\left(z^2 - \frac{y^2-x^2}{4}\right)\sqrt{z^2-y^2+x^2}\,\frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{p(\delta)}{l^2}\left\{\int\limits_{\Delta_1^{-1/2}}^{\Delta_2^{-1/2}} \frac{u\sqrt{1-\Delta_2 u^2}\,du}{e^u-1} -\right.$$

$$\left. - \left[\delta + \frac{1}{4} l^2 (y^2 - x^2)\right] \int\limits_{\Delta_1^{-1/2}}^{\Delta_2^{-1/2}} \frac{u^3\sqrt{1-\Delta_2 u^2}\,du}{e^u-1}\right\},$$

где

$$\Delta_1 = \delta + l^2 y^2, \quad \Delta_2 = \delta + l^2 y^2 - l^2 x^2. \tag{8}$$

Искомые вероятности теперь записываются:

$$\begin{aligned} \Phi'(x,\ y-x) &= \frac{32\pi y}{3x(y^2-x^2)^3}\left[J_3 + \frac{1}{4}\,x(x^2+3y^2)\,J_1\right], \quad y > x, \\ \Phi''(x,\ y-x) &= -\frac{32\pi y}{3x(y^2-x^2)^3}\left[J_2 + \frac{1}{4}\,y(3x^2+y^2)\,J_1\right], \quad y < x \end{aligned} \tag{9}$$

и легко рассчитываются для каждой пары x и y при заданных l и δ. Функция $\lg[(1/2y)\,\Phi(x,\ y-x)]$ вычислялась при $\delta = 0.02$ и $l = 0.2$ и тех же, что и в [1], аргументах, в окончательный результат внесено исправление ошибки в 2 раза в [1], отмеченной в [3] (табл. 1). На рис. 2 сопоставляются функции, соответствующие распределениям для звезд поля по формулам Планка, Максвелла и по таблице В. С. Калиберда [4].

Хотя в общих чертах сравниваемые функции сходны, между ними имеются заметные расхождения. Они тем больше, чем больше x^2 и $|y^2 - x^2|$, поскольку в области больших скоростей неусеченная функция Планка проходит существенно выше функции Максвелла и, естественно, выше усеченной при $y_1 = 2$ функции В. С. Калиберда. Наша функция более симметрична относительно $y^2 - x^2 = 0$.

Если различия между кривыми Т. А. Агекяна и нашими обязаны различию в принятых $\varphi(z)$, то меньшие различия между кривыми из [7] и нашими иллюстрируют роль усечения и, частично, учета кратности сближений.

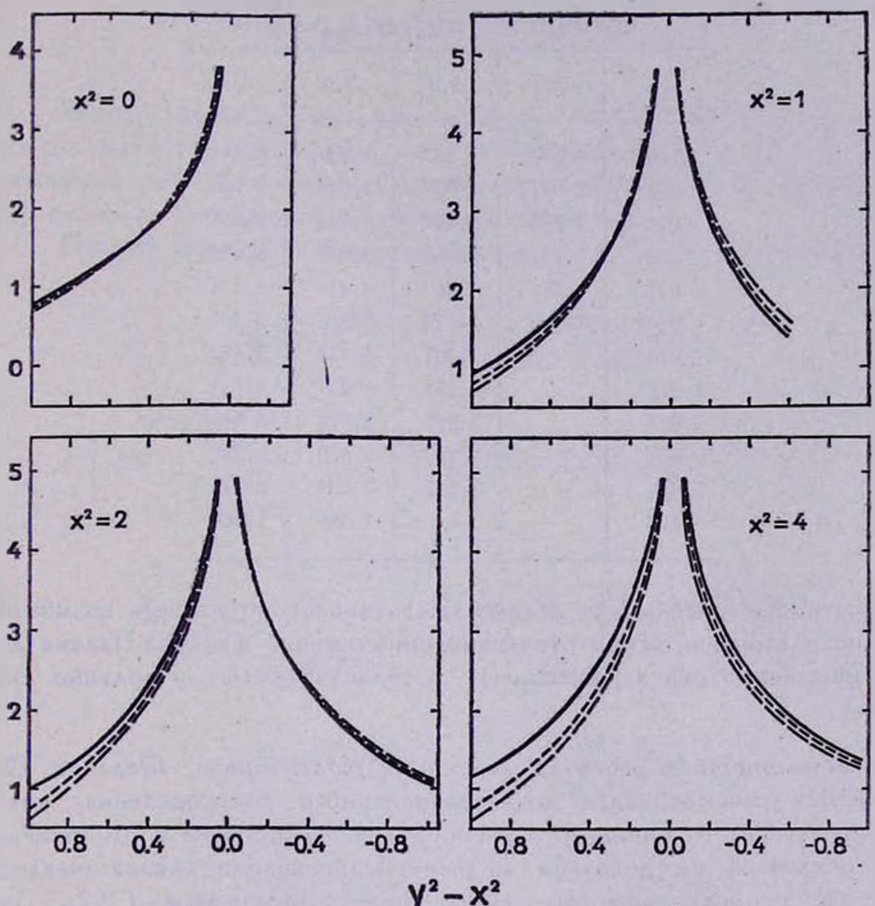

Рис. 2. Функция $\lg(\Phi(x, y-x)/2y)$. Сплошные кривые — по данным табл. 1, частый пунктир — по данным А. А. Вьюга, В. С. Калиберда и И. В. Петровской, редкий пунктир — по данным Т. А. Агекяна.

Из [7] и [9] видно, что Φ' и Φ'' не выражаются через элементарные функции, это затрудняет получение аналитического решения уравнения Колмогорова—Феллера и сравнение его с модификацией функции Планка (5). Если для промежуточных скоростей можно довольствоваться близостью (5) с результатами численного интегрирования, то для малых скоростей на рис. 1a имеются небольшие расхождения и желательно проверить, насколько они принципиальны. Установить поведение решения при больших y, начиная приблизительно с 1.5, и особенно при $y > 2$ по рис. 1а вообще невозможно из-за принятого усечения в $y_1 = 2$.

Таблица 1

ФУНКЦИЯ $\lg[(1/2y)\,\Phi(x,\ y-x)]$

y^2-x^2 \ x^2	0.0	1.0	2.0	4.0
1.0	1.009	1.260	1.349	1.414
0.6	1.571	1.939	2.045	2.115
0.4	1.988	2.470	2.588	2.662
0.2	2.657	3.369	3.503	3.584
0.1	3.292	4.269	4.416	4.494
0.05	3.909	5.170	5.316	5.401
−0.05		5.162	5.322	5.410
−0.1		4.255	4.427	4.511
−0.2		3.337	3.523	3.616
−0.4		2.390	2.620	2.728
−0.6		1.752	2.089	2.213
−1.0		−∞	1.395	1.566

Эти обстоятельства делают желательной проверку возможности использования асимптотических приближений функции Планка для описания асимптотики решения (1) в областях малых и больших скоростей.

Асимптотика решения уравнения Колмогорова—Феллера. Ограничимся рассмотрением квазистационарного распределения, которое не зависит от начального распределения скоростей и от времени, если отвлечься от довольно медленной диссипации членов звездной системы, скорости которых превосходят критическую ($\gg 2$). Для простоты не будем учитывать регулярные силы системы и кратные сближения. В этом случае уравнение (1) сводится к

$$f(y)\int_0^{\infty}\Phi(y,\ z-y)\,dz = \int_0^{y_1} f(z)\,\Phi(z,\ y-z)\,dz. \tag{10}$$

Функция Φ, по [3] и [4], зависит от знака $z-y$, поэтому (10) следует развернуть в виде:

$$f(y)\left[\int_0^y \Phi''(y,\, z-y)\, dz + \int_y^\infty \Phi'(y,\, z-y)\, dz\right] =$$
$$= \int_0^y f(z)\,\Phi'(z,\, y-z)\, dz + \int_y^{y_1} f(z)\,\Phi''(z,\, y-z)\, dz. \tag{11}$$

Вследствие того, что при выводе Φ' и Φ'' допускались сколь угодно далекие сближения, при $z \to y$ функции Φ' и $\Phi'' \to \infty$ и все интегралы по z расходятся. Однако, как показала И. В. Петровская [2], решение интегрального уравнения возможно.

Правую часть (11) при подстановке (9) и (7), (8) можно записать:

$$R(y) = \frac{32\pi}{3}\, p(\delta)\, y \left\{ \int_0^y \frac{f(z)}{z(y^2-z^2)^3} \times \right.$$
$$\times \left[l^{-2} \int_{(\delta+l^2y^2)^{-1/2}}^{(\delta+l^2y^2-l^2z^2)^{-1/2}} \frac{t(1-\delta t^2)\sqrt{1-(\delta+l^2y^2-l^2z^2)t^2}\, dt}{e^t-1} - \right.$$
$$- \frac{y^2-z^2}{4} \int_{(\delta+l^2y^2)^{-1/2}}^{(\delta+l^2y^2-l^2z^2)^{-1/2}} \frac{t^3\sqrt{1-(\delta+l^2y^2-l^2z^2)t^2}\, dt}{e^t-1} +$$
$$\left. + \frac{lz}{4}(z^2+3y^2) \int_0^{(\delta+l^2y^2)^{-1/2}} \frac{t^4 dt}{e^t-1} \right] dz + \tag{12}$$
$$+ \int_y^{y_1} \frac{f(z)}{z(z^2-y^2)^3} \left[l^{-2} \int_{(\delta+l^2y^2)^{-1/2}}^{\delta^{-1/2}} \frac{t(1-\delta t^2)^{3/2}\, dt}{e^t-1} - \right.$$
$$- \frac{3}{4}(y^2-z^2) \int_{(\delta+l^2y^2)^{-1/2}}^{\delta^{-1/2}} \frac{t^3\sqrt{1-\delta t^2}\, dt}{e^t-1} +$$
$$\left.\left. + \frac{ly}{4}(y^2+3z^2) \int_0^{(\delta+l^2y^2)^{-1/2}} \frac{t^4 dt}{e^t-1} \right] dz \right\}.$$

Коэффициент при $f(y)$ в левой части (11) в этом случае:

$$L(y) = \frac{32\pi}{3}\frac{p(\delta)}{y}\left\{\int\limits_0^y \frac{z}{(y^2-z^2)^3}\left[l^{-2}\int\limits_{(\delta+l^2z^2)^{-1/2}}^{\delta^{-1/2}} \frac{t(1-\delta t^2)^{3/2}\,dt}{e^t-1} - \right.\right.$$

$$- \frac{3}{4}(z^2-y^2)\int\limits_{(\delta+l^2z^2)^{-1/2}}^{\delta^{-1/2}} \frac{t^3(1-\delta t^2)^{1/2}\,dt}{e^t-1} +$$

$$\left. + \frac{lz}{4}(3y^2+z^2)\int\limits_0^{(\delta+l^2z^2)^{-1/2}} \frac{t^4dt}{e^t-1}\right]dz + \int\limits_y^\infty \frac{z}{(z^2-y^2)^3}\times \tag{13}$$

$$\times\left[l^{-2}\int\limits_{(\delta+l^2z^2)^{-1/2}}^{(\delta+l^2z^2-l^2y^2)^{-1/2}} \frac{t(1-\delta t^2)\sqrt{1-(\delta+l^2z^2-l^2y^2)\,t^2}\,dt}{e^t-1} - \right.$$

$$- \frac{1}{4}(z^2-y^2)\int\limits_{(\delta+l^2z^2)^{-1/2}}^{(\delta+l^2z^2-l^2y^2)^{-1/2}} \frac{t^3\sqrt{1-(\delta+l^2z^2-l^2y^2)\,t^2}\,dt}{e^t-1} +$$

$$\left.\left. + \frac{ly}{4}(y^2+3z^2)\int\limits_0^{(\delta+l^2z^2)^{-1/2}} \frac{t^4dt}{e^t-1}\right]dz\right\}.$$

Асимптотика функции (5) имеет вид

$$\begin{aligned} &\text{для малых } z: && f(z) = \alpha z^2 - \beta z^4 + \cdots \\ &\text{для больших } z: && f(z) = \frac{A}{z^4} + \cdots \end{aligned} \tag{14}$$

Подстановка в уравнение (10) выражений (13) и (12) с $f(z)$ по (14) дает искомые $f(y)$ для малых и, соответственно, больших y, а точнее говоря, проверяет их. Однако большое число членов в $R(y)$ и $L(y)$, каждый из которых — двойной интеграл, не выражающийся через элементарные функции, делает очень громоздкими выкладки. Чтобы сократить их, выделим в R и L старшие члены.

Для малых y l^2y^2 гораздо меньше δ, вследствие чего в ряде интегралов в (12) и (13) оба предела почти одинаковы и эти интегралы можно опустить. Остаются лишь

$$R(y) \approx \frac{8\pi}{3} p(\zeta)\, ly \int\limits_0^{\zeta^{-1/2}} \frac{t^4 dt}{e^t - 1} \left| \int\limits_0^y \frac{f(z)(3y^2 + z^2)\, dz}{(y^2 - z^2)^3} + \right.$$
$$\left. + y \int\limits_y^{y_1} \frac{f(z)(y^2 + 3z^2)\, dz}{z(z^2 - y^2)^3} \right| \tag{15}$$

и

$$L(y) \approx \frac{8\pi}{3} \frac{p(\zeta)\, l}{y} \int\limits_0^{\zeta^{-1/2}} \frac{t^4 dt}{e^t - 1} \left| \int\limits_0^y \frac{z^2(3y^2 + z^2)\, dz}{(y^2 - z^2)^3} + \right.$$
$$\left. + y \int\limits_y^{\infty} \frac{z(y^2 + 3z^2)\, dz}{(z^2 - y^2)^3} \right|. \tag{16}$$

Расходимость интегралов при $z \to y$, которая не сказывается на окончательном значении $f(y)$, обходим введением разложений

$$\frac{1}{(y^2 - z^2)^3} = \frac{1}{2y^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!} \left(\frac{z}{y}\right)^{2n}, \quad y > z;$$
$$\frac{1}{(z^2 - y^2)^3} = \frac{1}{2z^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!} \left(\frac{y}{z}\right)^{2n}, \quad z > y. \tag{17}$$

С их помощью запишем интегралы в $R(y)$

$$I_R = \int\limits_0^y \frac{f(z)(z^2 + 3y^2)\, dz}{(y^2 - z^2)^3} = \frac{1}{2y^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!\, y^{2n}} \int\limits_0^y (\alpha z^2 - \beta z^4 + \cdots) \times$$
$$\times (3y^2 + z^2)\, z^{2n} dz = \frac{1}{2y} \sum_0^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!} \left[\alpha \left(\frac{3}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} \right) - \right.$$
$$\left. - \beta y^2 \left(\frac{3}{2n+5} + \frac{1}{2n+7} \right) + \cdots \right]; \tag{18}$$

$$II_R = \int\limits_y^{y_1} \frac{f(z)(y^2 + 3z^2)\, dz}{z(z^2 - y^2)^3} = \int\limits_0^{y_1} \frac{f(z)(y^2 + 3z^2)\, dz}{z(z^2 - y^2)^3} + \int\limits_0^{y} \frac{f(z)(y^2 + 3z^2)\, dz}{z(y^2 - z^2)^3} =$$
$$= \frac{\alpha}{4y^2} \sum_0^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{3}{n+2} \right) - \frac{\beta}{4} \sum_0^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{3}{n+3} \right) + \tag{19}$$
$$+ 3 \left\langle \frac{z}{(z^2 - y^2)^3} \right\rangle + y^2 \left\langle \frac{1}{z(z^2 - y^2)^3} \right\rangle.$$

Сумму двух последних членов — средних — можно записать в виде:

$$\frac{3}{2}\left\langle \frac{1}{z^5}\sum_0^\infty \frac{(n+2)!}{n!}\frac{y^{2n}}{z^{2n}}\right\rangle + \frac{1}{2}y^2\left\langle \frac{1}{z^7}\sum_0^\infty \frac{(n+2)!}{n!}\frac{y^{2n}}{z^{2n}}\right\rangle =$$

$$= 3\left\langle \frac{1}{z^5}\right\rangle + 10\,y^2\left\langle \frac{1}{z^7}\right\rangle + \cdots$$

после чего вся комбинация $R(y)$ оказывается равной

$$R(y) \approx \frac{8\pi}{3}p(\delta)\,ly\int_0^{\delta^{-1/2}} \frac{t^4dt}{e^t-1}\left[\frac{\alpha}{2y}\sum_0^\infty \frac{(n+2)!}{n!}\left(\frac{1}{2n+2} + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{3}{2n+3} + \frac{3}{2n+4} + \frac{1}{2n+5}\right) - \tag{20}$$
$$- \frac{\beta}{2}y\sum_0^\infty \frac{(n+2)!}{n!}\left(\frac{1}{2n+4} + \frac{3}{2n+5} + \frac{3}{2n+6} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2n+7}\right) + 3y\left\langle \frac{1}{y^5}\right\rangle + \cdots\right].$$

Члены из $L(y)$ можно представить следующими разложениями:

$$I_L = \int_0^y \frac{z^2(3y^2+z^2)\,dz}{(y^2-z^2)^3} = \frac{1}{2y}\sum_0^\infty \frac{(n+2)!}{n!}\left(\frac{3}{2n+3} + \frac{1}{2n+5}\right) \tag{21}$$

и

$$II_L = \int_y^\infty \frac{z(y^2+3z^2)\,dz}{(z^2-y^2)^3} = \frac{1}{4y^2}\sum_0^\infty \frac{(n+2)!}{n!}\left(\frac{3}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right). \tag{22}$$

Отсюда

$$L(y) \approx \frac{8\pi}{3}p(\delta)\,\frac{l}{y}\int_0^{\delta^{-1/2}} \frac{t^4dt}{e^t-1}\,\frac{1}{2y}\sum_0^\infty \frac{(n+2)!}{n!}\left(\frac{3}{2n+2} + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{2n+3} + \frac{1}{2n+4} + \frac{1}{2n+5}\right). \tag{23}$$

Сочетание (20) и (23) дает искомое асимптотическое приближение для малых скоростей

$$f(y) = y^2\alpha\,\frac{\sum\limits_0^\infty \frac{(n+2)!}{n!}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{3}{n+1.5}+\frac{3}{n+2}+\frac{1}{n+2.5}\right)}{\sum\limits_0^\infty \frac{(n+2)!}{n!}\left(\frac{3}{n+1}+\frac{3}{n+1.5}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2.5}\right)} -$$

$$- y^4\left[\frac{\beta\sum\limits_0^\infty \frac{(n+2)!}{n!}\left(\frac{1}{n+2}+\frac{3}{n+2.5}+\frac{3}{n+3}+\frac{1}{n+3.5}\right)-6\left\langle\frac{1}{y^5}\right\rangle}{\sum\limits_0^\infty \frac{(n+2)!}{n!}\left(\frac{3}{n+1}+\frac{3}{n+1.5}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2.5}\right)}\right]+\ldots \tag{24}$$

Отношения сумм в обоих членах незначительно меньше единиц, то есть первый член близок к αy^2, а второй — к $-\beta y^4$, что означает положительный результат проверки и несущественное влияние опущенных членов на коэффициенты $f(y)$.

Отметим, что в области малых v, как уже отмечалось в [5], функции Планка и Максвелла имеют одинаковую асимптотику, а одинаковый ход последней и решения [3] виден на рис. 1b.

Большие y. Большими скоростями часто называют скорости, превосходящие несколько стандартов. Для таких y старшие члены в R и L выделим, воспользовавшись численными значениями внутренних интегралов в (12) и (13) для одного из таких значений y, а именно, для $y = 5$ (при $l = 0.2$ и $\delta = 0.02$). В табл. 2 цифрами I—VI озаглавлены порядковые номера членов в квадратных скобках (12) и (13). z принимались равными предельному и одному промежуточному значению.

Таблица 2

z	I	II	III	IV	V	VI
			В $R(y)$			
0	0	0	0			
3.6	2.7	0.4	2.5			
5.0	17.5	0	4.0	17.5	0	4.0
7.1				17.5	90	6.9
			В $L(y)$			
0	0	0	0			
3.6	2.7	1.3	2.5			
5.0	17.5	0	4.0	17.5	0	4.0
6.1					0.6	2.7
∞				0	0	0

Старшими членами в R оказываются I и V, а в L — I и IV:

$$R(y) \approx \frac{32\pi}{3} p(\delta)\, l^{-2} y \left| \int\limits_0^y \frac{f(z)\,dz}{z(y^2-z^2)^3} \times \right.$$

$$\times \int\limits_{(\delta+l^2y^2)^{-1/2}}^{(\delta+l^2y^2-l^2z^2)^{-1/2}} \frac{t\sqrt{1-(\delta+l^2y^2-l^2z^2)\,t^2}\,dt}{e^t-1} + \tag{25}$$

$$\left. + \frac{3}{4} l^2 \int\limits_y^{y_*} \frac{f(z)\,dz}{z(z^2-y^2)^2} \int\limits_0^{\delta^{-1/2}} \frac{t^3\sqrt{1-\delta t^2}\,dt}{e^t-1} \right|$$

и

$$L(y) \approx \frac{32\pi}{3} p(\delta)\, l^{-2} y^{-1} \left[\int\limits_0^y \frac{z\,dz}{(y^2-z^2)^3} \int\limits_{(\delta+l^2z^2)^{-1/2}}^{\delta^{-1/2}} \frac{t\sqrt{1-\delta t^2}\,dt}{e^t-1} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_y^{\infty} \frac{z\,dz}{(z^2-y^2)^3} \int\limits_{(\delta+l^2z^2)^{-1/2}}^{(\delta+l^2z^2-l^2y^2)^{-1/2}} \frac{t\sqrt{1-(\delta+l^2z^2-l^2y^2)\,t^2}\,dt}{e^t-1} \right|. \tag{26}$$

В первых членах (25) и (26) опущены малые произведения интеграла на δ, а во втором члене (25) малый нижний предел заменен нулем.

Через y_* обозначена абсцисса реального усечения функции скоростей.

Подставим в (25) асимптотическое приближение для $f(z)$ в форме Рэлея-Джинса из (14). Из под знаков интегралов в (25) и (26) вынесем значения $1/(e^{\bar t}-1)$, где $\bar t = \theta t_1 + (1-\theta)\,t_2$ — некоторое среднее значение в пределах интегрирования (t_1, t_2) и, если $\bar t$ мало, имеем приближение $e^{\bar t} - 1 = \bar t\,(1 + (1/2)\,\bar t)$. Пренебрегаем малым δ по отношению к большим l^2y^2. Тогда, произведя очевидные операции, получаем:

$$I_R = \int\limits_0^y \frac{f(z)\,dz}{z(y^2-z^2)^3} \int\limits_{\Delta_1^{-1/2}}^{\Delta_2^{-1/2}} \frac{t\sqrt{1-\Delta_2 t^2}\,dt}{e^t-1} =$$

$$= \frac{l^3}{3} \int\limits_0^y \frac{f(z)\,z^2\,(y^2-z^2)^{-3}\,(\delta + l^2y^2)^{-3/2}\,dz}{\exp\left[\theta(\delta+l^2y^2-l^2z^2)^{-1/2} + (1-\theta)(\delta+l^2y^2)^{-1/2}\right]-1} =$$

$$= \frac{1}{3y^2\left(\exp\frac{1+\theta\theta'^2}{ly}-1\right)}\left[\int_0^{y_*}\frac{f(z)\,z^2dz}{(y^2-z^2)^3}-\int_y^{y_*}\frac{f(z)\,z^2dz}{(z^2-y^2)^3}\right]=$$

$$=\frac{ly^{-8}}{6\left(1+\frac{1}{2}\theta\theta'^2\right)}\left(1-\frac{1+\frac{1}{2}\theta\theta'^2}{2ly}+\cdots\right)\times \tag{27}$$

$$\times\left[2\langle z^2\rangle+\frac{6}{y^2}\langle z^4\rangle+\cdots+\frac{A}{y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n!\,(2n+7)}\left(1-\frac{y^{2n+7}}{y_*^{2n+7}}\right)\right],$$

$$0<\theta \text{ и } \theta'<1.$$

Заменим моменты z на моменты y, опустим малые $(y/y_*)^{2n+7}$ и $(1/2)\,\theta\theta'^2$, тогда ряд по степеням $1/y$ приобретает вид:

$$I_R\approx\frac{1}{y^8}\left(\frac{l}{3}\langle y^2\rangle\right)+\frac{1}{y^9}\left(\frac{Al}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n!\,(2n+7)}-\frac{\langle y^2\rangle}{6}\right)+$$

$$+\frac{1}{y^{10}}\left(l\langle y^4\rangle-\frac{A}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n!\,(2n+7)}+\cdots\right)+\cdots \tag{28}$$

Второй член $R(y)$:

$$II_R=\frac{3}{4}l^2\int_0^{\delta^{-1/2}}\frac{t^3\sqrt{1-\delta t^2}\,dt}{e^t-1}\int_y^{y_*}\frac{f(z)\,dz}{z\,(z^2-y^2)^2}=$$

$$=\frac{3}{8}\frac{Al^2}{y^8}\int_0^{\delta^{-1/2}}\frac{t^3\sqrt{1-\delta t^2}\,dt}{e^t-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{(n+4)}\left(1-\frac{y^{2n+8}}{y_*^{2n+8}}\right)\approx \tag{29}$$

$$\approx\frac{3}{8}\frac{Al^2}{y^8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n+4}\int_0^{\delta^{-1/2}}\frac{t^3\sqrt{1-\delta t^2}\,dt}{e^t-1}.$$

Аналогично члены $L(y)$:

$$I_L \approx \int_0^y \frac{zdz}{(y^2-z^2)^3} \int_{(\delta+l^2z^2)^{-1/2}}^{\delta^{-1/2}} \frac{t\sqrt{1-\delta t^2}\,dt}{e^t-1} =$$

$$= \frac{l^3}{3}\int_0^y \frac{z^4(y^2-z^2)^{-3}(\delta+l^2z^2)^{-3/2}\,dz}{\exp[\theta_1\delta^{-1/2}+(1-\theta_1)(\delta+l^2z^2)^{-1/2}]-1} =$$

$$= \frac{l^3}{3y}(\delta+\theta_1'^2l^2y^2)^{-3/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n!(2n+5)}\exp\left|-\left(\frac{\theta_1}{\sqrt{\delta}}+\frac{1-\theta_1}{\sqrt{\delta+\theta_1'^2l^2y^2}}\right)\right| =$$

$$= \frac{e^{-\theta_1\delta^{-1/2}}}{3\theta_1'^3y^4}\left(1-\frac{3}{2}\frac{\delta}{\theta_1'^2l^2y^2}+\cdots\right)\times \tag{30}$$

$$\times\left[1+\frac{1-\theta_1}{\theta_1'ly}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\delta}{\theta_1'^2l^2y^2}\right)+\cdots\right]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n!(2n+5)} \approx$$

$$\approx\left[\frac{1}{y^4}\left(\frac{1}{3\theta_1'^3}\right)+\frac{1}{y^5}\left(\frac{1-\theta_1}{3\theta_1'^4l}\right)-\frac{1}{y^6}\left(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\theta_1'^5l^2}\right)\right]e^{-\theta_1\delta^{-1/2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n!(2n+5)}$$

$$0<\theta_1 \text{ и } \theta_1'<1$$

и

$$II_L = \int_y^{\infty}\frac{zdz}{(z^2-y^2)^3}\int_{\Delta_1^{-1/2}}^{\Delta_2^{-1/2}}\frac{t\sqrt{1-\Delta_2t^2}\,dt}{e^t-1} = \frac{l^3y^3}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n!}\times$$

$$\times\int_y^{\infty}\frac{y^{2n}z^{-2n-5}(\delta+l^2z^2)^{-3/2}\,dz}{\exp[\theta''(\delta+l^2z^2-l^2y^2)^{-1/2}+(1-\theta'')(\delta+l^2z^2)^{-1/2}]-1} = \tag{31}$$

$$= \frac{l}{12y^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n!}\left[\frac{1}{n+3}-\frac{\theta''}{2(n+4)}-\frac{1}{yl}\left(\frac{1}{2n+7}+\frac{\theta''}{2n+9}\right)+\cdots\right];$$

$$0<\theta''<1.$$

Суммы членов в квадратных скобках (25) и (26) равны

$$I_R+II_R = \frac{a'}{y^8}+\frac{b'}{y^9}+\frac{c'}{y^{10}}+\cdots \quad \text{и} \quad I_L+II_L = \frac{a''}{y^3}+\frac{b''}{y^4}+\frac{c''}{y^5}+\cdots \tag{32}$$

где

$$a' = \frac{3}{8} A l^2 \int\limits_0^{\zeta^{-1/2}} \frac{t^3 \sqrt{1-\zeta t^2}\, dt}{e^t - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+4} + \frac{l}{3} \langle y^2 \rangle .$$

$$b' = \frac{1}{6} A l \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!\,(2n+7)} - \frac{1}{6} \langle y^2 \rangle$$

$$c' = -\frac{1}{12} A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!\,(2n+7)} + l \langle y^4 \rangle$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (33)$$

$$a'' = \frac{1}{12} l \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!} \left| \frac{1}{n+3} - \frac{\theta''}{2(n+4)} \right|$$

$$b'' = -\frac{1}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!} \left(\frac{1}{2n+7} + \frac{\theta''}{2n+9} \right) + \frac{1}{3\theta_1'^3} e^{-\theta_1 \zeta^{-1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n'\,(2n+5)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Сопоставление коэффициентов показывает, что $a' \ll b'/y$, в то время, как различия между b' и c', а также между a'' и b'' значительно меньше. По этой причине член с a' следует опустить, тогда

$$f(y) = y^2 \frac{I_R + II_R}{I_L + II_L} = \frac{b'/a''}{y^4} \left(1 + \frac{c'/b'}{y} + \cdots \right)\left(1 - \frac{b''/a''}{y} + \cdots \right) = $$
$$= \frac{b'/a''}{y^4} \left[1 + \left(\frac{c'}{b'} - \frac{b''}{a''} \right) \frac{1}{y} + \cdots \right]. \qquad (34)$$

Отношения коэффициентов a, b и c в (34) конечны, так как отношения расходящихся рядов из (33) равны или близки к 1.

Поэтому

$$\frac{b'}{a''} \approx A, \qquad (35)$$

что означает положительный результат проверки распределения Рэлея—Джинса для больших скоростей и несущественность опущенных при выводе членов.

Таким образом, судя по старшим членам разложений в ряды функции распределения скоростей, удовлетворяющей уравнению (10), подтверждается близость между ней и модификацией функции Планка (5) для областей малых и больших y. Учитывая близость этих функций и для промежуточных скоростей (по рис. 1а), заключаем, что функция Планка для скоростей может служить аналитическим приближением к квазиравновесному решению уравнения Колмогорова—Феллера для чисто разрывного случайного процесса.

С другой стороны, возможность аппроксимации этой функцией распределения скоростей звезд на периферии Галактики (около Солнца) говорит в пользу того, что некогда эти звезды находились в плотных областях (скоплениях, волнах плотности и др.). Вместе с фактом, что даже у наиболее молодых звезд уже установилось распределение рассматриваемого вида [8], рассмотренная аппроксимация относит это время к „моменту“ звездообразования.

Ростовский-на-Дону
педииститут

AN ANALYTICAL APPROXIMATION FOR THE VELOCITY FUNCTION OF STARS IN THE PURELY DISCONTINUOUS RANDOM PROCESS

R. B. SHATSOVA

The modification of Planck's formula for velocities of stars approximates the quasistationary solution of Kolmogorov—Feller equation in the purely discontinuous random process. This follows both from the coincidence of their asymptotics in the regions of small and large velocities and from the practical coincidence of the function with the numerical solution for the intermediate velocities. Planck's function is used for the determination of the probability of rapprochements of stars with a set variation of the velocity module, if the masses are equal to the average mass of the field stars.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Т. А. Агекян, Б. А. Воронцов-Вельяминов, В. Г. Горбацкий, А. Н. Дейч, В. А. Крат, О. А. Мельников, В. В. Соболев*, Курс астрофизики и звездной астрономии, II, гл. XX, ГИФМЛ, 1962. *Т. А. Агекян*, Астрон. ж., 36, 41, 1959.
2. *И. В. Петровская*, Астрон. ж., 46, 824, 1969.
3. *И. В. Петровская*. Астрон. ж., 46, 1220, 1969.
4. *В. С. Калиберда*, Астрофизика, 5, 433, 1969; Астрон. ж., 47, 960, 1970; *В. С. Калиберда, И. В. Петровская*, Астрофизика, 6, 135, 1970; 7, 663, 1971; 8, 305, 1972.
5. *Р. Б. Шацова*, Астрон. ж., 48, 126, 1971.
6. *R. W. Michie*, M. N., 125, 127, 1963; 126, 331, 1963.
7. *А. А. Вьюга, В. С. Калиберда, И. В. Петровская*. Уч. зап. ЛГУ (в печати).
8. *Р. Б. Шацова*, Планковское распределение скоростей звезд в окрестности Солнца, изд-во Ростовского университета, 1965.