АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 10 НОЯБРЬ, 1974 ВЫПУСК 4

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕУСТОЙЧИВЫХ МОД ДЛЯ ОБОЛОЧЕЧНЫХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Е. М. НЕЖИНСКИЙ

Поступила 19 января 1974

В работе доказана неустойчивость, а затем непосредственно вычислены неустойчивые моды для сферической оболочечной центральной конфигурации как перед столкновением, так и после взрыва.

В данной статье, так же, как и в [1, 2], изучая взрывы, происходящие в ядрах галактик или каких-либо других центрах конденсации материи, с небесно-механической точки зрения, предположим, что между осколками, образующимися в результате взрыва, действуют только гравитационные силы. Такая постановка задачи вполне законна и уже встречалась у Уинтнера [3]. Уинтнер показал, что в этом случае перед одновременным столкновением, а также сразу после взрыва частицы образуют центральные конфигурации.

В работе [4] мы, обобщив в некотором смысле понятие центральной конфигурации, ввели оболочечные центральные конфигурации, т. е. такие самогравитирующие системы, которые в отличие от обычных (см. [3, 5]) центральных конфигураций образованы не отдельными материальными точками, а непрерывным слоем. Напомним, (см. [4]) определение оболочечной центральной конфигурации.

Определение. Назовем оболочечной центральной конфигурацией такую замкнутую оболочку ($\mu(x, y, z)$ — поверхностная плотность слоя в точке (x, y, z)), у которой на любой элемент поверхности (ds — площадь элемента) в рассматриваемый фиксированный момент времени действует сила притяжения, пропорциональная массе элемента ($dm(x, y, z) = \mu(x, y, z)\,ds$) и его вектору положения в барицентрической системе координат

$$\begin{cases} V_{x_0} = \sigma x_0^{*}, \\ V_{y_0} = \sigma y_0, \\ V_{z_0} = \sigma z_0, \end{cases}$$

где

$$V_{x_0} = G \int\limits_{(S)} \frac{\mu(x, y, z)(x - x_0)\, ds}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}},$$

аналогично V_{y_0}, V_{z_0}; при этом интеграл берется по поверхности оболочки (S), $G = 1$.

В приведенной ниже работе докажем неустойчивость, а затем непосредственно вычислим неустойчивые моды для сферической оболочечной центральной конфигурации как перед столкновением, так и после взрыва.

1. Движение любого бесконечно малого куска рассматриваемой поверхности оболочечной центральной конфигурации с „текущими" координатами (x_0, y_0, z_0) можно описать следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 = V_{x_0}, \\ \ddot{y}_0 = V_{y_0}, \\ \ddot{z}_0 = V_{z_0}. \end{cases} \tag{1}$$

Перейдем в системе (1) к сферическим переменным

$$\begin{cases} x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z = r \cos \vartheta. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим осесимметрическое движение оболочечной центральной конфигурации, т. е. $\varphi = \text{const}$.

Тогда из (1) подстановкой (2) получим следующие уравнения движения

$$\begin{cases} \ddot{r}_0 - r_0 \dot{\vartheta}_0^2 = V_{r_0}, \\ 2 r_0 \dot{r}_0 \dot{\vartheta}_0 + r_0^2 \ddot{\vartheta}_0 = V_{\vartheta_0}. \end{cases} \tag{3}$$

Замечание 1. Эту же систему (3) можно получить, если воспользоваться вариационным принципом [6].

* Индексом нуль обозначены координаты выбранной точки.

Поведение оболочечной центральной конфигурации перед одновременным столкновением или сразу после взрыва удобно рассматривать, если перейти к новым переменным (это делается так же, как в V гл. книги Уинтнера [3])

$$\left\{\begin{aligned} x &= t^{-2/3}x,\\ y &= t^{-2/3}y,\\ z &= t^{-2/3}z,\\ t &= e^{-t}\end{aligned}\right.$$

или, для сферических координат, $r = t^{-2/3}r$, $\vartheta = \vartheta$, $\varphi = \varphi$. (Перед столкновением t стремится к $+\infty$, а после взрыва к $-\infty$).

Уравнения (3) в новых переменных имеют вид (точками обозначены производные по t):

$$\left\{\begin{aligned} &\ddot{r}_0 - \frac{1}{3}\dot{r}_0 - \frac{2}{9}r_0 - r_0\dot{\vartheta}_0^2 = V_{r_0},\\ &2r_0\dot{r}_0\dot{\vartheta}_0 - \frac{1}{3}r_0^2\dot{\vartheta}_0 + r_0^2\ddot{\vartheta}_0 = V_{\vartheta_0}.\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Замечание 2. Покажем, что при переходе к новым переменным $G = 1/9\pi$.

Рассмотрим однородную сферу единичного радиуса ($r = 1$, $\mu=1$). Тогда из первого уравнения системы (4)

$$V_{r_0} = -\frac{2}{9}; \tag{5}$$

с другой стороны

$$V_{r_0} = \frac{V_{r_0 i} + V_{r_0 e}}{2} = -2\pi G; \tag{6}$$

так как $V_{r_0 i} = 0$, $V_{r_0 e} = -4\pi G$, то из (5) и (6)

$$G = 1/9\pi. \tag{7}$$

2. На формально стационарное решение уравнений (4) (сферическую оболочечную центральную конфигурацию $r = \mathrm{const}$, $\vartheta = \mathrm{const}$, $\varphi = \mathrm{const}$, $\mu = \mathrm{const}$ (не умаляя общности, положим $r=1$, $\mu = 1$) наложим небольшое осесимметрическое возмущение

$$\left\{\begin{aligned} r &= 1 + e^{pt}\delta r,\\ \vartheta &= \vartheta^0 + e^{pt}\delta\vartheta.\end{aligned}\right. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (4) и сохраняя члены первого порядка малости, получим уравнения в вариациях

$$\begin{cases} \left(\alpha - \dfrac{2}{9}\right)\delta r_0 = \delta V_{r_0}, \\ \alpha\delta\vartheta_0 = \delta V_{\vartheta_0}, \end{cases} \tag{9}$$

где

$$\alpha = p^2 - \frac{1}{3} p. \tag{10}$$

3. Полная система уравнений, описывающая поведение оболочечной центральной конфигурации при наложении на нее осесимметрических возмущений, имеет вид:

$$\left(\alpha - \frac{2}{9}\right)\delta r_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta V_{0i}}{\partial r_0} + \frac{\partial \delta V_{0e}}{\partial r_0}\right) + \frac{4}{9}\delta r_0, \tag{11}$$

$$\alpha\delta\vartheta_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta V_{0i}}{\partial \vartheta_0} + \frac{\partial \delta V_{0e}}{\partial \vartheta_0}\right), \tag{12}$$

$$\delta\rho_0 = -\frac{1}{\sin\vartheta_0}\frac{\partial}{\partial\vartheta_0}(\sin\vartheta_0\delta\vartheta_0), \tag{13}$$

$$\frac{\partial \delta V_{0i}}{\partial \vartheta_0} - \frac{\partial \delta V_{0e}}{\partial \vartheta_0} = -\frac{4}{9}\frac{\partial \delta r_0}{\partial \vartheta_0}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \delta V_{0i}}{\partial r_0} - \frac{\partial \delta V_{0e}}{\partial r_0} = \frac{4}{9}\delta\rho_0. \tag{15}$$

Рассматриваемая система включает: а) вариационные уравнения движения (11), (12).

Эти уравнения были получены в предыдущем разделе (см. (9)). Для записи (9) в виде (11), (12) необходимо учесть (7), а также

$$\left(\frac{\partial V_0}{\partial r_0}\right)_i = 0, \quad \left(\frac{\partial V_0}{\partial r_0}\right)_e = -\frac{4}{9r^2}. \tag{16}$$

б) Уравнение неразрывности [7] на поверхности сферы (13). $\delta\rho$ — вариация плотности, радиально спроектированная на поверхность сферы, она связана с действительной вариацией плотности $\delta\mu$

$$\delta\mu_0 = \delta\rho_0 - 2\delta r_0. \tag{17}$$

в) Уравнения (14) и (15) связывают внешние и внутренние нормальные (η) и касательные по меридиану (ζ) производные от потенциала простого слоя

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial V_{0e}}{\partial \tau_{i0}} - \frac{\partial V_{0i}}{\partial \tau_{i0}} = -4\pi G\mu, \\ &\frac{\partial V_{0i}}{\partial \zeta_0} = \frac{\partial V_{0e}}{\partial \zeta_0}, \end{aligned}\right.$$

где $\mu = 1 + \delta\mu$.

Причем, в нашем случае, когда форма простого слоя мало отличается от сферы,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \delta V_0}{\partial \tau_{i0}} = \frac{\partial \delta V_0}{\partial r_0}, \\ &\frac{\partial \delta V_0}{\partial \zeta_0} = \frac{\partial \delta V_0}{\partial \vartheta_0} + \frac{\partial \delta r_0}{\partial \vartheta_0}\frac{\partial V_0}{\partial r_0}. \end{aligned}\right.$$

Чтобы получить выражения (14), (15), необходимо также использовать (7), (16), (17).

Полную систему (11)—(15) можно переписать:

$$\left(\alpha - \frac{2}{3}\right)\delta r_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta V_{0i}}{\partial r_0} + \frac{\partial \delta V_{0e}}{\partial r_0}\right) \tag{18}$$

$$\alpha\delta\vartheta_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta V_{0i}}{\partial \vartheta_0} + \frac{\partial \delta V_{0e}}{\partial \vartheta_0}\right), \tag{19}$$

$$\frac{\partial \delta V_{0i}}{\partial \vartheta_0} - \frac{\partial \delta V_{0e}}{\partial \vartheta_0} = -\frac{4}{9}\frac{\partial \delta r_0}{\partial \vartheta_0}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial \delta V_{0i}}{\partial r_0} - \frac{\partial \delta V_{0e}}{\partial r_0} = -\frac{4}{9\sin\vartheta_0}\frac{\partial}{\partial \vartheta_0}(\sin\vartheta_0\delta\vartheta_0). \tag{21}$$

4. Обычным путем разложив возмущения по сферическим функциям, найдем дисперсионное уравнение.

Пусть

$$\delta V_i = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\vartheta), \tag{22}$$

$$\delta V_e = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-n-1} P_n(\cos\vartheta), \tag{23}$$

$$\delta r = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\vartheta), \tag{24}$$

$$\delta\vartheta = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{d}{d\vartheta} P_n(\cos\vartheta). \tag{25}$$

С помощью (21) выразим $\delta\vartheta$ через (22) и (23) $(r=1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[nA_n+(n+1)B_n]P_n(\cos\vartheta)\cdot\sin\vartheta=-\frac{4}{9}\frac{d}{d\vartheta}(\sin\vartheta\delta\vartheta),$$

проинтегрируем обе части этого уравнения и обозначим $\cos\vartheta=q$

$$\frac{4}{9}\sin\vartheta\delta\vartheta=\sum_{n=0}^{\infty}[nA_n+(n+1)B_n]\int_1^q P_n(q)\,dq. \tag{26}$$

Воспользуемся уравнением Лежандра [8]

$$\frac{d}{dq}\left[(1-q^2)\frac{dP_n}{dq}\right]+n(n+1)P_n=0$$

или

$$(1-q^2)\frac{dP_n}{dq}=-n(n+1)\int_1^q P_n(q)\,dq. \tag{27}$$

Следовательно (см. (26) и (27)),

$$\frac{4}{9}\delta\vartheta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nA_n+(n+1)Bn}{n(n+1)}\cdot\frac{dP_n(\cos\vartheta)}{d\vartheta}, \tag{28}$$

где $B_0=0$.

Из (28) и (25)

$$\frac{4}{9}n(n+1)D_n=nA_n+(n+1)B_n, \tag{29}$$

а из (18)—(20) и (22)—(25)

$$\left|\begin{aligned}&\left(\alpha-\frac{2}{3}\right)C_n=0.5[nA_n-(n+1)B_n],\\&\alpha D_n=0.5(A_n+B_n),\\&A_n-B_n=-\frac{4}{9}C_n.\end{aligned}\right. \tag{30}$$

Исключая из (29) и (30) A_n, B_n, C_n, D_n, получим дисперсионное уравнение

$$\left(\alpha^2-\frac{2}{3}\alpha\right)(2n+1)+\frac{4}{27}n(n+1)\left(2-\frac{2n+1}{3}\right)=0. \tag{31}$$

5. Наконец, непосредственно вычислим все неустойчивые моды сферической оболочечной центральной конфигурации как перед столкновением, так и после взрыва при осесимметрических возмущениях.

Так как (из (10))

$$p_{1,2} = \frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} + \alpha}\,, \tag{32}$$

то (из (31) и (32))

$$p_{1,2\,(3,4)} = \frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{13}{36} \overset{+}{(-)} \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{4}{27}\frac{n(n+1)}{(2n+1)}\left(2 - \frac{2n+1}{3}\right)}}\,. \tag{33}$$

Из (33) видно*, что при каждом значении n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ найдутся моды, у которых $Re(p_1) > 0$, $Re(p_2) < 0$. То есть как при разлете, так и при столкновении оболочечные центральные конфигурации неустойчивы (см. (8)).

В конце этого раздела я хотел бы обратить внимание на следующий интересный факт: при $n = 1$ (см. (33)) мы имеем четыре частоты

$$p_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{6}, \qquad p_3 = \frac{2}{3},$$

$$p_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{6}, \qquad p_4 = -\frac{1}{3},$$

то есть помимо мод p_3 и p_4, означающих просто твердотельный сдвиг системы относительно выбранной барицентрической системы координат, имеется еще две частоты p_1 и p_2. Одна из них (p_1) указывает на неустойчивость при столкновении, другая (p_2) — при взрыве.

Выводы. В статье удалось непосредственно вычислить неустойчивые моды для сферических оболочечных центральных конфигураций при осесимметрических возмущениях**. Рассмотренный пример не только в какой-то степени контролирует и иллюстрирует доказанную в предыдущих работах [1, 2] теорему о неустойчивости центральных конфигураций перед столкновением и сразу после взрыва, но и показывает достаточную сложность нахождения мод даже у довольно простых центральных конфигураций.

---

* Выражение, стоящее под внутренним корнем в (33), при любом n $(n = 0,1,2,\ldots)$ положительно.

** Известно, что произвольное возмущение можно представить как суперпозицию осесимметрических, по-разному ориентированных относительно друг друга.

В заключение мне хочется выразить благодарность кандидату физико-математических наук В. А. Антонову за руководство этой работой.

Институт теоретической астрономии
АН СССР

CALCULATION OF UNSTABLE FREQUENCY MODES FOR SHELL CENTRAL CONFIGURATIONS

E. M. NEZHINSKI

In this paper unstable frequency modes for the shell central configuration have been computed both before the collision and after the explosion. We assume the shell to move in accordance with the Newton law of gravitation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. М. Нежинский*, ДАН СССР, 206, № 3, 1972.
2. *Е. М. Нежинский*, Астрофизика, 10, 3, 1974.
3. *А. Уинтнер*, Аналитические основы небесной механики, Наука, М., 1967.
4. *Е. М. Нежинский*, Бюлл. ИТА, 14, 1(154), 1975.
5. *Е. М. Нежинский*, Астрон. ж., 51, № 5, 1974.
6. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Механика, Наука, М., 1965.
7. *Г. К. Суслов*, Теория потенциала и гидродинамика, т. 2, Киев, 1910.
8. *Е. В. Гобсон*, Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, М., 1952.