

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 10

НОЯБРЬ, 1974

ВЫПУСК 4

О РАВНОВЕСИИ И УСТОЙЧИВОСТИ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ПОДСИСТЕМ

М. Г. АБРАМЯН, С. А. КАПЛАН

Поступила 5 июля 1974

В работе исследуется устойчивость и равновесие вращающихся взаимопрони- кающих сфероидальных подсистем. Получены формулы, определяющие эксцентриситет и частоту колебаний внутреннего сфероида для различных моделей. Указаны возможные применения полученных результатов к конкретным астрофизическим про- блемам.

Астрономическая проблема исследования формы небесных тел привела к созданию математически современной теории эллипсоидаль- ных фигур равновесия (см. [1]). Конечно, теория равновесия однород- ных жидких масс, которыми занимается эта теория, представляет со- бой слишком идеализированную картину для того, чтобы применять ее в деталях к грубой реальной действительности. Тем не менее, ряд вы- водов этой теории (неустойчивость сфероидов Маклорена с эксцентри- ситетами, близкими к единице, понятие о пределе Роша) достаточно широко используются и в конкретных астрофизических исследованиях. Интерес к этой теории связан и с другими соображениями, приведен- ными в эпилоге к цитированной книге С. Чандрасекара [1].

Можно указать еще на один раздел теории сфероидальных фи- гур равновесия, по-видимому, до сих пор нигде не рассматривавшийся, но тем не менее имеющий некоторое применение к астрофизическим вопросам.

Известно, что наша Галактика, другие спиральные галактики, а возможно и эллиптические галактики состоят из подсистем (наसेле- ний) с разной степенью сферичности и различными угловыми скоро- стями. Идеализируя постановку задачи, можно считать, что такие си- стемы состоят из вложенных друг в друга взаимопрони- кающих сфе-

роидов с разными эксцентриситетами, но с одной и той же плоскостью симметрии и с одним центром. Каждый сфероид вращается со своей угловой скоростью, определяемой как его собственным эксцентриситетом и плотностью, так и параметрами других сфероидов.

Можно поставить задачу об исследовании фигур равновесия подобных вложенных сфероидов. Правда, условия „взаимопроницаемости“ подобных сфероидов, на первый взгляд, мало соответствуют картине жидких однородных тел, рассматриваемых в теории фигур равновесия. Но на самом деле здесь нет непреодолимого противоречия. В теории фигур равновесия условие „жидкости“ используется, во-первых, для того, чтобы оправдать однородность (постоянство плотности) сфероидов при вычислении фигур равновесия, а, во-вторых, пренебречь сжимаемостью (скоростью звука) при исследовании устойчивости этих фигур.

Если мы предположим, что вложенные сфероиды однородны по плотности, то постановка задачи о вычислении фигур равновесия таких сфероидов оказывается достаточно строгой. Если же предположить, что дисперсия пекулярных скоростей частиц, составляющих подсистему, достаточно велика, то и расчет устойчивости таких систем будет более или менее точным.

В настоящей работе рассмотрены только некоторые наиболее простые задачи теории фигур равновесия и устойчивости вложенных сфероидов. Как мы увидим, некоторые результаты такого рассмотрения могут быть применены к анализу звездных подсистем.

Для решения соответствующих задач нами был использован метод вириальных тензорных уравнений. Поскольку этот метод уже неоднократно излагался (см. [1—3]), здесь будут приведены только результаты.

1. Система из двух вложенных сплюснутых сфероидов. Будем характеризовать каждый сфероид однородной плотностью вещества ρ , большой полуосью a , малой полуосью b , эксцентриситетом $e = (1 - b^2/a^2)^{1/2}$, угловой скоростью вращения Ω . Будем считать, что внутренний сфероид, обозначаемый индексом „1“, находится целиком внутри второго сфероиде (индекс „2“), т. е.

$$a_1 < a_2, \quad b_1 < b_2. \quad (1)$$

но соотношения между ρ_1 и ρ_2 , e_1 и e_2 могут быть произвольными (при выполнении (1)).

Гравитационный потенциал внутри однородного сфероиде описывается формулой:

$$V(r, z, e) = -\pi G \rho [A(e)r^2 + B(e)z^2], \quad (2)$$

где

$$A(e) = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} [\arcsin e - e\sqrt{1-e^2}], \quad (3)$$

$$B(e) = \frac{2}{e^3} [e - \sqrt{1-e^2} \arcsin e]. \quad (4)$$

Здесь r — координата в плоскости симметрии, z — перпендикулярная координата. Выражения для потенциала вне сфероида здесь не понадобятся.

Условие равновесия внутреннего сфероида определяется гидростатическим уравнением

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad} \left[V_1(r, z, e_1) + V_2(r, z, e_2) + \frac{1}{2} \Omega_1^2 r^2 \right], \quad (5)$$

где V_1 и V_2 определяются по (2)–(4) с заменой e, ρ на e_1, ρ_1 и e_2, ρ_2 соответственно.

Используя вириальные тензорные уравнения, получим следующее соотношение, связывающее параметры двух сфероидов:

$$\Omega_1^2 = \pi G \rho_1 F_M(e_1) + \pi G \rho_2 F_E(e_1, e_2), \quad (6)$$

где $F_M(e_1)$ есть известная функция Маклорена

$$F_M(e_1) = \frac{2\sqrt{1-e_1^2}}{e_1^3} [(3-2e_1^2) \arcsin e_1 - 3e_1 \sqrt{1-e_1^2}], \quad (7)$$

а $F_E(e_1, e_2)$ есть новая функция, описывающая влияние внешнего сфероида на внутренний сфероид:

$$F_E(e_1, e_2) = 2 \left[1 + \frac{3-2e_1^2}{e_2^3} (\sqrt{1-e_2^2} \arcsin e_2 - e_2) \right]. \quad (8)$$

Второе уравнение, связывающее параметры обоих сфероидов (и определяющее Ω_2), труднее получить, поскольку здесь приходится учитывать более сложные выражения для внешнего потенциала гравитационного поля внутреннего сфероида.

Далее, используя теорию малых возмущений равновесной конфигурации (здесь приходится предполагать несжимаемость), находим частоты колебаний поверхности сфероида по отношению к возмущениям типа $m = n = 2$, являющимися определяющими в теории устойчивости сфероидов [2, 4, 5]. В результате находим для частоты:

$$\omega_{1,2} = \Omega_1 \pm [\pi G \rho_1 f_M(e_1) + \pi G \rho_2 f_E(e_1, e_2)]^{1,2}, \quad (9)$$

где $f_M(e_1)$ есть известная функция для маклореновских сфероидов:

$$f_M(e_1) = \frac{\sqrt{1-e_1^2}}{e_1^3} \left| e_1 \sqrt{1-e_1^2} (3+4e_1^2) - (3+2e_1^2-4e_1^4) \arcsin e_1 \right|, \quad (10)$$

а новая функция $f_E(e_1, e_2)$ учитывает влияние внешнего сфероида на частоты колебаний внутреннего сфероида:

$$f_E(e_1, e_2) = 2 \left[1 + \frac{1-2e_1^2}{e_2^3} (e_2 - \sqrt{1-e_2^2} \arcsin e_2) \right]. \quad (11)$$

И здесь трудно получить аналогичную формулу для частот колебаний внешнего сфероида, поскольку при этом следует учитывать сложные формулы для гравитационного поля вне внутреннего сфероида.

Рассмотрим теперь следствия формул (6)–(11). Однако прежде напомним известные результаты теории одиночных маклореновских сфероидов. Функция $F_M(e_1)$ всюду положительна, достигает максимума при

$$e^* = 0.92995, \quad \text{где } F_M(e^*) = 0.44933 \quad (12)$$

и затем быстро спадает до нуля. При $1 - e_1 \ll 1$ имеем

$$F_M(e_1) = \pi \sqrt{2(1-e_1)}. \quad (13)$$

С другой стороны, $f_M(e) < 0$ при $e > e^0 = 0.95289$. Асимптотически при $1 - e_1 \ll 1$ имеем:

$$f_M(e_1) = -\pi \sqrt{\frac{1-e_1}{2}}. \quad (14)$$

Это означает, что сфероиды с $e_1 > e^0$ динамически неустойчивы, т. е. здесь невозможно сжатие большее, чем при $e = e^0$ (т. е. $b \geq 0.3a$). Как известно, этот результат часто используется для объяснения причин того, что не обнаружены эллиптические галактики с большим сжатием, чем у E7. Отсюда также следует, что предельная угловая скорость вращения сфероидов Маклорена есть

$$\Omega \leq \sqrt{0.44933 \pi G \rho}. \quad (15)$$

Теперь посмотрим, как изменятся эти результаты при учёте влияния внешнего сфероида.

Во-первых, функция $f_E(e_1, e_2)$ всегда положительная и, следовательно, его присутствие всегда стабилизирует внутренний сфероид. В частности, если внешний сфероид есть сфера, т. е. при $e_2 \rightarrow 0$ имеем

$$f_E(e_1, 0) = \frac{4}{3} (2 - e_1^2). \quad (16)$$

Сопоставляя (16) и (14), убеждаемся, что даже если плотность внутреннего сфероида много больше плотности внешнего сфероида, существование последнего стабилизирует очень тонкие диски, т. е. становятся устойчивыми внутренние сфероиды с $e_1 = 1$. Область неустойчивости теперь

$$1 - \left(\frac{2\rho_2}{3\pi\rho_1} \right)^2 > e_1 > e^0. \quad (17)$$

Эта формула справедлива при $\rho_1 \gg \rho_2$. Если плотности обоих сфероидов сравнимы, то все внутренние сфероиды устойчивы.

Во-вторых, если внешний сфероид отличен от сферы, т. е. если $e_2 \neq 0$, то $F_E(e_1, e_2)$ при малых e_1 и e_2 становится отрицательной. Это означает, что теперь запрещены слабо сплюснутые внутренние сфероиды. Для примера приведем нижние границы для e_1 при $e_2 = 0.9$:

$$\begin{array}{ccc} \rho_2/\rho_1 = 0.5 & 1.0 & 10. \\ e_1 \geq 0.649 & 0.701 & 0.776. \end{array} \quad (18)$$

Заметим, что внутренний сфероид все же может быть менее сплюснутым, чем внешний.

В-третьих, рассмотрим случай, когда внешний сфероид есть сфера ($e_2 = 0$) и предположим, что ρ_2 не мало по сравнению с ρ_1 . Тогда

$$F_E(e_1, 0) = \frac{4}{3} e_1^2 \quad (19)$$

и мы можем опустить в (6) первый член. Отсюда следует связь между угловой скоростью и эксцентриситетом внутреннего сфероида

$$\Omega_1 = e_1 \sqrt{\frac{4}{3} \pi G \rho_1}, \quad (20)$$

которую можно было бы проверить при анализе статистической связи между угловой скоростью вращения и сжатием звездных подсистем в Галактике. Из (20) при $e_1 = 1$ следует также предел скорости вращения внутренних сфероидов, заметно больший, чем предел угловой скорости вращения маклореновских сфероидов (15).

Зависимости Ω_1 от e_1 , e_2 и ρ_2/ρ_1 иллюстрируются графиками рис. 1—3 (положительные ветви кривых).

2. *Влияние магнитного поля и вытянутые сфероида.* Можно обобщить эти результаты на случай, когда во внутреннем сфероиде есть тороидальное магнитное поле, индукция которого пропорциональна радиусу магнитной силовой линии, т. е. $B \sim r$.

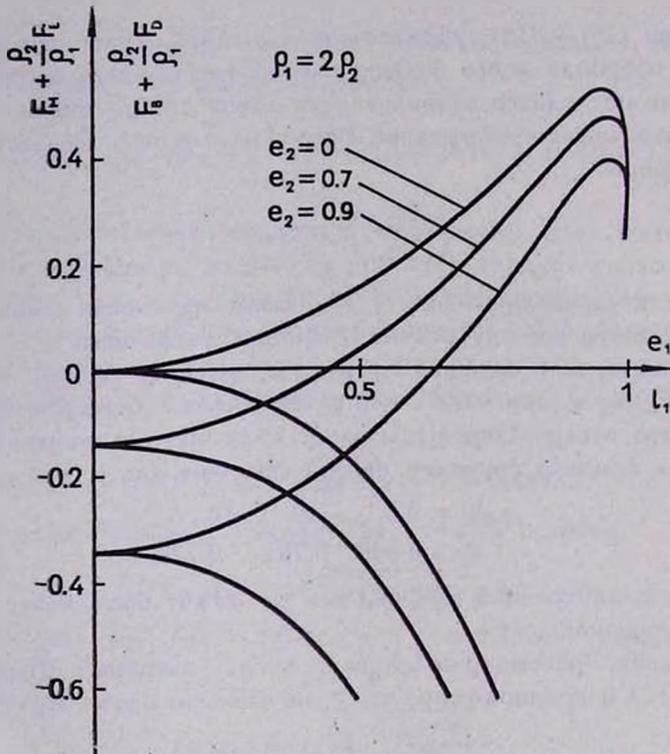


Рис. 1.

Иными словами, рассмотрим случай, когда альвеновская скорость $V/\sqrt{4\pi\rho_1}$ всюду пропорциональна и параллельна линейной скорости вращения $v = \Omega r$. Тогда уравнения равновесия внутреннего сфероида останутся такими же, как (6), только в правой части добавится член, учитывающий магнитное давление:

$$\Omega_1^2 - \frac{B_a^2}{2\pi G\rho_1 a_1^2} = \pi G\rho_1 F_M(e_1) + \pi G\rho_2 F_E(e_1, e_2), \quad (21)$$

где B_a — магнитная индукция при $r = a_1$, т. е. на границе экватора внутреннего сфероида. В этом случае сильное магнитное поле при медленном вращении допускает отрицательные значения правой части (21).

Иными словами, здесь возможны и эксцентриситеты, меньшие пределов (18). В сильно сплюсненном внешнем сфероиде могут быть вложены равновесные сферические конфигурации, если только они обладают достаточно сильным тороидальным магнитным полем.

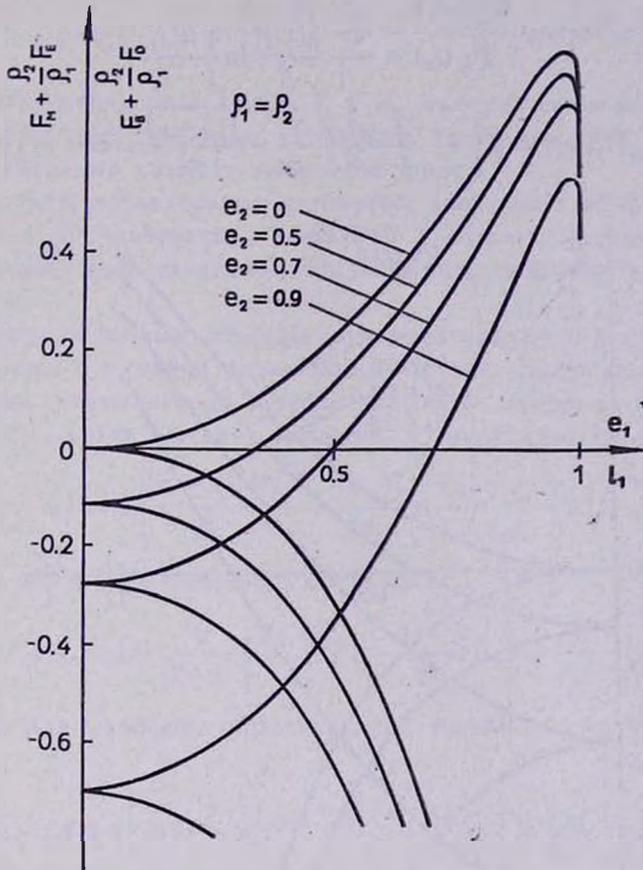


Рис. 2.

На рис. 1—3 продолжение линий из верхней полуплоскости в нижнюю полуплоскость и соответствует переходам к таким сфероидам.

Более того, сильное тороидальное магнитное поле может сделать внутренний сфероид вытянутым вдоль оси, перпендикулярной плоскости симметрии ($b_1 > a_1$). Пользуясь общим методом, можно рассмотреть и такие сфероиды. Здесь вместо (21) получим

$$\Omega_1^2 - \frac{B_a^2}{2\pi G \rho_1 a_1^2} = \pi G \rho_1 F_B(l_1) + \pi G \rho_2 F_D(l_1, e_2), \quad (22)$$

где l_1 эксцентриситет вытянутого сфероида

$$l_1 = \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{b_1^2}}, \quad (23)$$

и функции

$$F_B(l_1) = \frac{6}{l_1^2} \frac{3 - l_1^2}{l_1^3} \ln \frac{1 + l_1}{1 - l_1}, \quad (24)$$

$$F_D(l_1, e_2) = 2 \left[1 - \frac{3 - l_1^2}{1 - l_1^2} \left(\frac{1}{e_2^2} - \frac{\sqrt{1 - e_2^2}}{e_2^3} \arcsin e_2 \right) \right]. \quad (25)$$

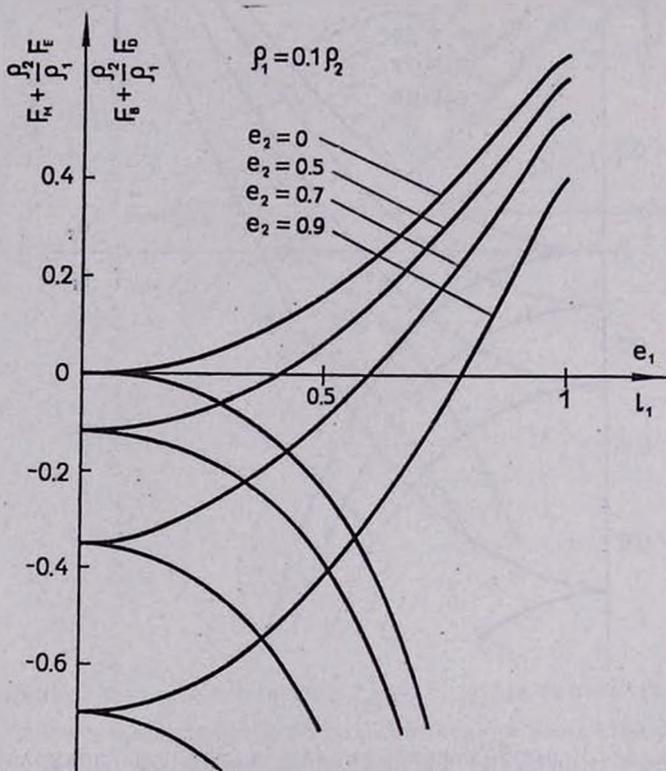


Рис. 3.

Эти функции всегда отрицательны. Кривые, описывающие (22), также изображены на рис. 1—3 (спадают с увеличением l_1).

Частоты колебаний вытянутых вложенных сфероидов также определяются соотношением типа (9)

$$\omega_{1,2} = \omega_1 \pm [\pi G \rho_1 f_B(l_1) + \pi G \rho_2 f_D(l_1, e_2)]^{1/2}, \quad (26)$$

где функции

$$f_B(l_1) = \frac{3-7l_1^2}{l_1^4} - \frac{3-8l_1^2+l_1^4}{2l_1^5} \ln \frac{1+l_1}{1-l_1}, \quad (27)$$

$$f_D(l_1, e_2) = 2 \left[1 + \frac{1+l_1^2}{1-l_1^2} \left(\frac{1}{e_2^2} - \frac{1-\sqrt{1-e_2^2}}{e_2^3} \arcsin e_2 \right) \right]. \quad (28)$$

Обе функции всегда, при любых l_1 и e_2 , положительны и поэтому вытянутые вложенные сфероиды устойчивы. Напомним, что для их равновесия необходимо сильное магнитное поле.

Результаты исследования вытянутых вложенных сфероидов может быть удастся использовать в проблеме выбросов плазмы вдоль оси из центральных ядер галактик. Как известно, подобное явление часто наблюдается.

Наконец, подобным образом можно рассмотреть и случай, когда внешний сфероид вытянут вдоль оси вращения. Здесь появляются новые функции, учитывающие влияние внешнего сфероиды на внутренний. В случае, когда вытянут внешний, а внутренний сплюсчен:

$$F_G(e_1, l_2) = 2 \left[\frac{3-2e_1^2}{l_2^2} \left(1 - \frac{1-l_2^2}{2l_2} \ln \frac{1+l_2}{1-l_2} \right) - 2(1-l_2^2) \right] \quad (29)$$

и в случае, когда оба сфероиды вытянуты:

$$F_H(l_1, l_2) = \frac{2}{1-l_1^2} \left[\frac{3-l_1^2}{l_2^2} \left(1 - \frac{1-l_2^2}{2l_2} \ln \frac{1+l_2}{1-l_2} \right) - 2 \right]. \quad (30)$$

Аналогично для функций, определяющих колебание внутреннего сpheroида:

$$f_G(e_1, l_2) = 4 \left[2(1-e_1^2) + \frac{1-2e_1^2}{l_2^2} \left(\frac{1-l_2^2}{2l_2} \ln \frac{1+l_2}{1-l_2} - 1 \right) \right], \quad (31)$$

$$f_H(l_1, l_2) = \frac{8}{1-l_1^2} \left[2 - \frac{1+l_1^2}{l_2^2} \left(1 - \frac{1-l_2^2}{2l_2} \ln \frac{1+l_2}{1-l_2} \right) \right]. \quad (32)$$

Эти функции всегда положительны, так что рассматриваемые сфероиды устойчивы.

Исследования вытянутых сфероидов также могут иметь конкретный выход, поскольку наблюдаются и веретенообразные галактики.

В заключение отметим, что есть еще ряд задач теории фигур равновесия, которые до сих пор не рассматривались, но которые могут иметь применение в астрофизике. Например, учитывая характер

распределения межзвездного газа в Галактике, можно поставить задачу о равновесии двуполостного гиперboloида, вложенного в сфероид. Некоторые из этих задач, в том числе и обобщения полученных выше результатов, будут рассмотрены в других работах.

Ереванский государственный
университет
НИРФИ, г. Горький

ON THE EQUILIBRIUM AND STABILITY OF SPHEROIDAL SUBSETS

M. G. ABRAHAMIAN, S. A. KAPLAN

The problem of equilibrium and stability of spheroidal figures of the stellar subsets (stratum shape of interstellar medium) placed in the spheroidal galaxies is investigated. The formulas defining eccentricity and frequency oscillations of inner spheroid for different models are obtained.

The possible applications of results revealed from this theory concerning concrete astrophysical problems are indicated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. Чандрасекар, Эллипсоидальные фигуры равновесия, Мир, М., 1973.
2. N. R. Lebovitz, *Ap. J.*, 134, 500, 1961.
3. Р. С. Оганесян, М. Г. Абрамян, *Астрофизика*, 9, 391, 1973.
4. Р. С. Оганесян, М. Г. Абрамян, *Астрофизика*, 8, 599, 1972.
5. P. H. Roberts, K. Stewartson, *Ap. J.*, 137, 777, 1963.