АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 10 НОЯБРЬ, 1974 ВЫПУСК 4

НЕЙТРОНИЗАЦИЯ ХОЛОДНОГО ВОДОРОДА В ПРИСУТСТВИИ СВЕРХСИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Г. А. ШУЛЬМАН

Поступила 24 сентября 1973
Пересмотрена 14 февраля 1974

В аналитическом виде получено выражение, определяющее зависимость порога нейтронизации холодного водорода от величины магнитного поля. Численный расчет показал, что порог нейтронизации холодного водорода заметно увеличивается при магнитных полях больших $1.74 \cdot 10^{14}$ *э*.

1. *Введение.* Открытие пульсаров и квазаров поставило на повестку дня вопрос о свойствах плотного вещества в присутствии магнитных полей порядка $10^{8}-10^{14}$ *э*, а возможно и больших. Существование в открытых недавно астрофизических объектах магнитных полей, напряженность которых возможно может достигать даже величины в 10^{30} *э*, обсуждалось в работах [1—3].

В ряде работ, появившихся в последние годы, исследовались свойства атомов в присутствии магнитных полей [4—8]. Расчеты показали, что в полях, напряженностью порядка 10^{10} *э* и выше заметным образом изменяется распределение электронной плотности в атомах и их энергии связи.

Свойства электронного газа в широком интервале температур и плотностей при наличии магнитных полей и некоторые их астрофизические приложения рассматривались в работах [9—11].

Расчеты, проведенные в [12, 13], показали, что сверхсильные магнитные поля способны заметным образом изменить характеристики β-распада ядер и скорость протон — протонной ядерной реакции.

В этой статье проведен расчет изменения в зависимости от величины магнитного поля порога нейтронизации водородного газа большой плотности.

В работе предполагается, что магнитное поле постоянно и однородно, а водород имеет температуру абсолютного нуля.

Для решения поставленной нами задачи необходимо вычислить химический потенциал релятивистского электронного газа в зависимости от магнитного поля, исследовать свойства водорода при больших плотностях и сверхсильных магнитных полях, а затем определить порог нейтронизации водорода в присутствии магнитных полей.

Под сверхсильными магнитными полями будем понимать такие поля, которые заметно изменяют порог нейтронизации холодного водорода. Как будет показано ниже, при сверхсильных магнитных полях исчезают характерные осцилляции химического потенциала и зависящих от него величин, которые имеют место в присутствии магнитного поля.

Слабые магнитные поля практически не изменяют величину химического потенциала.

2. *Химический потенциал релятивистского электронного газа в зависимости от магнитного поля.* Как известно, в постоянном и однородном магнитном поле заряженная частица движется по винтовым линиям, ось которых совпадает с направлением поля. По этой причине движение электрона в направлении поля инфинитно и поэтому неквантованно. В плоскости, перпендикулярной полю, движение заряженной частицы происходит с частотой $\omega = (eH)/(mc)$ и, поскольку является финитным, оказывается квантованным.

Уровни энергии релятивистской заряженной частицы в постоянном и однородном магнитном поле напряженностью H, направленном по оси OZ, определяются формулой [14].

$$\varepsilon(p_z, H) = \{m^2c^4 + c^2p_z^2 + 2mc^2[\mu_B H(2n+1) \pm \mu_B H]\}^{1/2}. \qquad (1)$$

В нерелятивистском пределе $mc \gg p_z$, и формулу (1) легко свести с точностью до слагаемого mc^2 к выражению для уровней энергии нерелятивистской заряженной частицы [15]:

$$\varepsilon(p_z, H) \simeq mc^2 + \frac{p_z^2}{2m} + \mu_B H(2n+1) \pm \mu_B H. \qquad (2)$$

В формулах (1) и (2) $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$; μ_B — магнитный момент электрона, заряд которого e, масса m; $\hbar$ — постоянная Планка; c — скорость света.

В формулах (1) и (2) $\mu_B H(2n+1)$ определяет квантованные уровни „поперечной“ части кинетической энергии, а слагаемое p_z^2 — ее неквантованная „продольная“ часть.

В силу этого число состояний электрона с фиксированным значением квантового числа n и продольным импульсом в интервале от p_z до p_z+dp_z равно [15]

$$\frac{eVH}{4\pi^2\hbar^2 c}\,dp_z. \tag{3}$$

Чтобы найти химический потенциал релятивистского электронного газа достаточно вычислить сумму для Ω-потенциала [16]

$$-\Omega(\mu, H, T) = kT\sum_{(q)}\ln\left(1+e^{\frac{\mu-\varepsilon}{kT}}\right), \tag{4}$$

взятую по всем значениям энергии. Здесь символ $\sum\limits_{(q)}$ означает суммирование по n и по двум направлениям спина и интегрирование по p_z:

$$\sum_{(q)}\cdots = \sum_{\text{спин}}\sum_{n=0}^{\infty}\int\cdots dp_z. \tag{5}$$

Для дифференциала $\Omega(\mu, H, T)$ имеет место следующее выражение ($V=\text{const}$):

$$d\Omega = -SdT - MVdH - Nd\mu, \tag{6}$$

где через V, S, T, M, N, μ обозначены соответственно объем, энтропия, температура, намагничение, число частиц и химический потенциал.

Число частиц N связано с Ω соотношением

$$N = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right)_{T,\,H}. \tag{7}$$

Вычислив (4) и использовав выражение (7), мы получим формулу для химического потенциала μ, зависящего от напряженности магнитного поля H.

Ю. Б. Румер показал [17], что при температуре абсолютного нуля выражение (4) для Ω-потенциала может быть сведено к следующему:

$$\Omega(\mu, H, 0) = -\sum_{(q)}[\mu-\varepsilon(q)]\,\sigma(\mu-\varepsilon(q)), \tag{8}$$

где $\sigma(\mu-\varepsilon(q))$ — ступенчатая функция

$$\sigma(\xi)=\begin{cases}1 & \text{при } \xi>0\\ 0 & \text{при } \xi<0.\end{cases}$$

При суммировании в выражении (8) по n и по двум направлениям спина мы должны учесть то обстоятельство, что разность $\mu-\varepsilon$ для значения квантового числа $n-1$ и спина, направленного по полю, будет равна такой же разности для значения n и спина, направленного против поля, для всех значений

$$\mu-\sqrt{m^2c^4+c^2p_z^2+2mc^2[\mu_B H(2n-1)+\mu_B H]}=$$
$$=\mu-\sqrt{m^2c^4+c^2p_z^2+2mc^2[\mu_B H(2n+1)-\mu_B H]}=$$
$$=\mu-\sqrt{m^2c^4+c^2p_z^2+4mc^2\mu_B Hn}.$$

Благодаря этому в выражении (8) все слагаемые суммы по n удваиваются (кроме члена суммы с $n=0$ и спином, направленным против поля) и мы получаем

$$-\Omega(\mu, H, 0)=\frac{eVH}{4\pi^2\hbar^2c}\int\limits_{p_1}^{p_2}\Bigg[\mu-\sqrt{c^2p_z^2+m^2c^4}+ + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu-\sqrt{c^2p_z^2+m^2c^4+4mc^2\mu_B Hn}\right)\Bigg]dp_z. \tag{9}$$

Из-за опущенного в этом выражении множителя

$$\sigma\left(\mu-\sqrt{c^2p_z^2+m^2c^4+4mc^2\mu_B Hn}\right)$$

интегрирование в каждом члене суммы выражения (9) ведется по промежутку между двумя нулями подынтегральной функции p_1 и p_2, где

$$p_1=-\frac{1}{c}\sqrt{\mu^2-m^2c^4-4mc^2\mu_B Hn}$$

$$p_2=+\frac{1}{c}\sqrt{\mu^2-m^2c^4-4mc^2\mu_B Hn}.$$

Чтобы привести формулу (9) к удобному для наших целей виду, воспользуемся выражением для химического потенциала релятивистского электронного газа при отсутствии внешних воздействий [16]

$$\mu_0^2=m^2c^4+(3\pi^2)^{2/3}\hbar^2c^2n_e^{2/3}, \tag{10}$$

где n_e — плотность числа электронов.

Для значений $\sqrt{m^2c^4 + 4l\, mc^2\mu_B H} < \mu < \sqrt{m^2c^4 + 4(l+1)mc^2\mu_B H}$, где l — целое число, выполняя интегрирование в (9) с учетом выражения (10) имеем:

$$
\begin{gathered}
-\Omega(\mu, H, 0) = \frac{3}{2}\frac{N\mu_H H mc^2}{(\mu_0^2 - m^2c^4)^{3/2}} \times \\
\times \left[\mu\sqrt{\mu^2 - m^2c^4} - \frac{m^2c^4}{2}\ln\frac{|\mu + \sqrt{\mu^2 - m^2c^4}|}{|\mu - \sqrt{\mu^2 - m^2c^4}|} + \right. \\
+ 2\sum_{n=1}^{l}\left(\mu\sqrt{\mu^2 - m^2c^4 - 4mc^2\mu_B Hn} - \right. \\
\left.\left. - \frac{m^2c^4 + 4mc^2\mu_B Hn}{2}\ln\frac{|\mu + \sqrt{\mu^2 - m^2c^4 - 4mc^2\mu_B Hn}|}{|\mu - \sqrt{\mu^2 - m^2c^4 - 4mc^2\mu_p Hn}|}\right)\right].
\end{gathered} \tag{11}
$$

Подставляя (11) в формулу (7), получим

$$
\begin{gathered}
N = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right)_H = \frac{3}{2}\frac{N\mu_B H mc^2}{(\mu_0^2 - m^2c^4)^{3/2}}\, 2\left(\sqrt{\mu^2 - m^2c^4} + \right. \\
\left. + 2\sum_{n=1}^{l}\sqrt{\mu^2 - m^2c^4 - 4mc^2\mu_B Hn}\right).
\end{gathered} \tag{12}
$$

Вводя обозначение

$$
\frac{\mu^2 - m^2c^4}{2mc^2\mu_B H} = x^2, \tag{13}
$$

имеем из формулы (12)

$$
\frac{\mu_0^2 - m^2c^4}{2mc^2\mu_B H} = \left[\frac{3}{2}\left(x + 2\sum_{n=1}^{l}\sqrt{x^2 - 2n}\right)\right]^{2/3}, \tag{14}
$$

откуда

$$
2mc^2\mu_B H = (\mu_0^2 - m^2c^4)\left[\frac{3}{2}\left(x + 2\sum_{n=1}^{l}\sqrt{x^2 - 2n}\right)\right]^{-2/3}. \tag{15}
$$

Из формулы (14) с учетом (15) теперь имеем

$$
\mu^2 - m^2c^4 = (\mu_0^2 - m^2c^4)\, x^2\left[\frac{3}{2}\left(x + 2\sum_{n=1}^{l}\sqrt{x^2 - 2n}\right)\right]^{-2/3}. \tag{16}
$$

Формулы (14) и (16) дают в параметрическом виде зависимость $\frac{\mu^2 - m^2c^4}{\mu_0^2 - m^2c^4}$ от $\frac{\mu_0^2 - m^2c^4}{2mc^2\mu_B H}$.

Из (16) с учетом (10) мы можем теперь получить выражение для химического потенциала релятивистского электронного газа в зависимости от H

$$\mu_e(H,\ 0) = c\left\{m^2c^2 + (3\pi^2)^{2/3}\hbar^2 \cdot n_e^{2/3} x^2 [R(x)]^{-2/3}\right\}^{1/2}, \tag{17}$$

где

$$R(x) = \frac{3}{2}\left(x + 2\sum_{n=1}^{l} \sqrt{x^2 - 2n}\right). \tag{18}$$

Поведение химического потенциала $\mu_e(H,\ 0)$ определяется свойствами функции $R(x)$. Производная функции $R(x)$, равная

$$R'(x) = \frac{3}{2}\left(1 + 2\sum_{n=l}^{l} x(x^2 - 2n)^{-1/2}\right)$$

имеет разрывы (бесконечные) в точках $x^2 = 2l$. Сама функция $R(x)$ испытывает в этих точках конечные скачки. Мы видим, что $\mu_e(H,\ 0)$ является осциллирующей функцией от $\frac{\mu_0^2 - m^2c^4}{2m^2c^2\mu_B H}$.

Для вычисления $\mu_e(H,\ 0)$ необходимо протабулировать функцию $R(x)$. Суммирование по l в выражении (18) основано на свойствах ступенчатой функции $\sigma(\mu - \varepsilon(q))$ и производится до тех пор, пока $x^2 - 2l = 0$, где l принимает значения 0, 1, 2, ...

Используя формулу (14), мы можем определить величину магнитного поля, соответствующую данному значению x при заданном химическом потенциале μ_0 электронного газа, который зависит от плотности вещества.

3. *Свойства плотного водорода в присутствии магнитного поля*. Энергия основного состояния атома водорода в сильном магнитном поле в нерелятивистском приближении [4, 6] $\varepsilon_{св} \simeq -1.4$ *кэв* при напряженностях от 10^{12} до 10^{29} *э*. Мы сразу можем заключить, что при $\rho \simeq 1.25 \cdot 10^7$ *г/см*^{3} в присутствии таких магнитных полей водород будет полностью ионизирован, а электроны будут иметь релятивистские значения энергии. Потому к ним применимы формулы, полученные в разделе 1.

Следуя Д. А. Киржницу [18], разделим водородный газ на нейтральные сферические ячейки с одним ядром и одним электроном вокруг каждого. Если считать, что заряд электрона в ячейке распределен равномерно, то для потенциальной энергии ядра имеем

$$U(r) = -\frac{3}{2}\frac{e^2}{R} + \frac{e^2}{2R^3}r^2, \tag{19}$$

где $R = (3m_p/4\pi\rho)^{1/3}$ — радиус ячейки, $r \leqslant R$ — смещение протона от центра ячейки, m_p — масса протона.

Протон, таким образом, находится в потенциальной яме глубиной $U_0 = 3/2\,(e^2/R)$. Потенциал $U(r)$ — осцилляторного типа. Поэтому частота колебаний протона около положения равновесия

$$\omega_0 = \left(\frac{e^2}{m_p R^3}\right)^{1/2}. \tag{20}$$

Энергия осциллятора равна

$$\varepsilon_n = \hbar\omega_0\left(n + \frac{3}{2}\right), \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{21}$$

В присутствии однородного магнитного поля H энергия протона, колеблющегося около положения равновесия, будет определяться выражением [20]

$$\varepsilon_{nmk} = \hbar\sqrt{\omega_p^2 + \omega_0^2}\,(2n + |m| + 1) + \hbar\omega m + \hbar\omega_0\left(k + \frac{1}{2}\right), \tag{22}$$

где $\omega_p = (eH)/2m_pc$; n, m, k — квантовые числа, принимающие следующие значения:

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots;$$

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad \text{а}\quad m_p \text{ — масса протона.}$$

При нулевой температуре $n = m = k = 0$ и энергия колеблющегося протона в магнитном поле

$$\varepsilon_p = \hbar\sqrt{\omega_p^2 + \omega_0^2} + \frac{\hbar\omega_0}{2}. \tag{23}$$

Если $H = 0$, то формула (23) совпадает с (21).

Сравнение величины колебательной энергии протона в магнитном поле с глубиной потенциальной ямы позволяет оценить связь протона со своей ячейкой и определить устойчивость соответствующего состояния.

С учетом выражений для ω_p, ω_0 и R отношение

$$\frac{\varepsilon}{U_0}=\left(\frac{9\pi\rho}{2m_p}\right)^{-1/3}e^2\left\{\hbar\sqrt{\frac{e^2H^2}{4m_p^2c^2}+\frac{4\pi^2e^2\rho}{3m_p^2}}+\frac{e\hbar}{m_p}\left(\frac{\pi\rho}{3}\right)^{1/3}\right\}. \qquad (24)$$

Условию

$$\frac{\varepsilon}{U_0}\ll 1 \qquad (25)$$

соответствует реализация фазы твердого тела.

При $H=0$ условие (25) справедливо для плотностей, много больших 10^7 $г/см^3$.

Условие $\varepsilon/U_0 \lesssim 10^2$ означает, что кристаллическая структура разрушена и, следовательно, протоны будут свободными. При $\rho \simeq 1.25\cdot 10^7$ $г/см^3$ последнее условие будет выполняться вплоть до $H \simeq 10^{25}$ э.

4. *Нейтронизация водородного газа в присутствии однородного магнитного поля.* Рассматриваем водородный газ с того момента, когда он полностью ионизирован и электроны обладают достаточной энергией для нейтронизации.

Если ε_e — граничная энергия электронов, m_n — масса нейтрона, m_p — масса протона, то процесс нейтронизации в водородном газе начинается, как известно, при выполнении условия

$$\varepsilon_e \geqslant (m_n - m_p)\, c^2. \qquad (26)$$

В состоянии равновесия возможны тогда процессы прямого и обратного β-распадов:

$$p + e^- \rightarrow n + \nu_e; \qquad n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e,$$

где ν_e, $\bar{\nu}_e$ — символы электронного нейтрино и антинейтрино.

Термодинамическое равновесие описывается с помощью следующих соотношений:

$$\mu_p + \mu_e = \mu_n + \mu_\nu, \qquad (27)$$

где μ_p, μ_n, μ_e и μ_ν — химические потенциалы протона, нейтрона, электрона и нейтрино, соответственно.

Поскольку нейтрино сразу же покидают среду, $\mu_\nu = 0$. Среда, в которой происходят эти реакции, является электронейтральной и потому

$$n_p = n_e. \qquad (28)$$

Выражения для химических потенциалов электронного газа в магнитном поле, свободных нерелятивистских нейтронов и связанных в кристаллической решетке протонов будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}&\mu_e(H, 0) = c\{m_e^2c^2 + (3\pi^2)^{2/3}\hbar^2 n_e^{2/3}\cdot x^2[R(x)]^{-2/3}\}^{1/2},\\ &\mu_n = m_n c^2 + (3\pi^2)^{2/3}\frac{\hbar^2}{2m_n}n_n^{2/3},\\ &\mu_p = m_p c^2.\end{aligned}\right| \tag{29}$$

Подставив (29) в (27) и учитывая (28), получим

$$n_n = (2m_n m_e)^{3/2}\frac{c^3}{3\pi^2\hbar^3}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{n_p}{n_0}\right)^{2/3}x^2[R(x)]^{-2/3}} - \alpha\right\}^{3/2}, \tag{30}$$

где

$$\alpha = \frac{m_n - m_p}{m_e} \simeq 2.54; \quad n_0 = \frac{m_e^3c^3}{3\pi^2\hbar^3} \simeq 5.87\cdot 10^{29}\ см^{-3}\ [21].$$

Порог рождения нейтронов получим, приравнивая нулю выражение в круглых скобках формулы (30):

$$n_p^{(0)}(H) = n_0(\alpha^2 - 1)^{3/2}\frac{R(x)}{x^3}. \tag{31}$$

Рассмотрим теперь два предельных случая:

а) *Случай слабых полей:* $x^2 \gg 1$.

Если воспользоваться формулой [22]

$$\sum_{k=1}^{m} k^q = \frac{m^{q+1}}{q+1} + \frac{m^q}{2} + \frac{qm^{q-1}}{12} - \frac{q(q-1)(q-2)}{720}m^{q-3} + \ldots,$$

то мы легко можем получить асимптотические выражения для функции $R(x)$ при больших значениях аргумента x

$$\begin{aligned}R(x) &= \frac{3}{2}\left(x + 2\sum_{n=1}^{l}\sqrt{x^2 - 2n}\right) \simeq\\ &\simeq \frac{3}{2}\left[2^{3/2}\sum_{n=1}^{l} n^{1/2} - x\right] \simeq x^3\left(1 + \frac{1}{4x^4} - \cdots\right)\end{aligned} \tag{32}$$

В этом случае

$$n_p^{(0)}(H) \simeq n_0(\alpha^2 - 1)^{3/2}\left\{1 + \frac{1}{4x^4} + \cdots\right\}, \tag{33}$$

т. е. порог нейтронизации изменяется весьма мало.

При $H=0$, $x^2=\infty$ и $n_p^{(0)}=n_0(\alpha^2-1)^{3/2}$, как это и должно быть.

б) *Случай сильных полей:* $0<x^2\lesssim 10$.

Для сверхсильных полей $0<x^2\leqslant 2$, $R(x)=3x/2$ и

$$n_p^{(0)}=\frac{3}{2}n_0x^{-2}(\alpha^2-1).$$

Для $x^2>2$, $R(x)$ определяется численно.

В табл. 1 приведены значения x^2 и соответствующие им величины $x^{-3}R(x)$, $n_p^{(0)}(H)=n_p^{(0)}x^{-3}R(x)$ и напряженности магнитного поля H. Из табл. 1 видно, что магнитные поля порядка $10^{14}\div 10^{16}$ э и выше заметным образом изменяют порог нейтронизации холодного водорода.

При плотностях выше порогового значения число нейтронов растет намного быстрее числа протонов.

При плотностях значительно больших порогового значения электроны и нуклоны становятся ультрарелятивистскими. Легко получить, что в ультрарелятивистском пределе для заряженной частицы

$$x^2=\frac{\mu^2}{2mc^2\mu_BH},$$

$$\mu(H,0)\simeq\mu_0x\left[\frac{3}{2}\left(x+2\sum_{n=1}^{l}\sqrt{x^2-2n}\right)\right]^{-1/3}.$$

Так как $n_p=n_e$, то $\mu_e=\mu_p=\mu_0x[R(x)]^{-1/3}$; $\mu_n=(3\pi^2)^{1/3}\hbar cn_n^{1/3}$. Очевидно также, что $x_p^2=x_e^2$. Поэтому из условия равновесия (27) имеем

$$n_n=8n_p$$

Иными словами, и в присутствии сверхсильных магнитных полей диспропорция между концентрациями частиц в ультрарелятивистской области энергий остается такой же.

Приношу глубокую благодарность Д. А. Киржницу, В. Н. Сазонову и М. Г. Шраеру за интерес к работе.

Брестский государственный
педагогический институт

x^2	0	0.01	0.05	0.1	0.5
$n_p^{(0)}(H)=n_p^{(0)}\dfrac{R(x)}{x^3}$	∞	150	30	15	3.0
H, э	∞	$1.74\cdot10^{16}$	$3.5\cdot10^{15}$	$1.74\cdot10^{15}$	$3.5\cdot10^{14}$

Таблица 1

1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	10.0
1.5	0.75	1.07	0.91	0.95	0.93	0.85	1.0
$1.74 \cdot 10^{14}$	$8.7 \cdot 10^{13}$	$5.8 \cdot 10^{13}$	$4.4 \cdot 10^{13}$	$3.5 \cdot 10^{13}$	$2.9 \cdot 10^{13}$	$2.5 \cdot 10^{13}$	$1.7 \cdot 10^{13}$

NEUTRONIZATION OF COLD HYDROGEN WHEN EXTRAPOWERFUL MAGNETIC FIELDS ARE PRESENT

G. A. SCHULMAN

The expression determining the dependence of cold hydrogen neutronization cut-off on the size of magnetic field is found in analytical form.

Quantitative calculation showed that cold hydrogen neutronisation cut-off increases greatly with magnetic fields greater than $1.74 \cdot 10^{14}$ oersted.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков, В. В. Зайцев*, УФН, 98, 201, 1969.
2. *В. Л. Гинзбург*, ДАН СССР, 156, 43, 1964.
3. *В. Л. Гинзбург, В. М. Озерной*, ЖЭТФ, 47, 1031, 1964.
4. *R. Cohen, J. Lodenquai, M. Ruderman*, Phys. Rev. Lett, 25, 487, 1970.
5. *Б. Б. Кадомцев*, ЖЭТФ, 58, 1765, 1970.
6. *Б. Б. Кадомцев, В. С. Кудрявцев*, Письма ЖЭТФ, 13, 61, 1971.
7. *V. Canuto, D. C. Kelly*, Astrophys. Space Sci., 17, 277, 1972.
8. *В. П. Крайнов*, ЖЭТФ, 64, 800, 1973.
9. *V. Canuto H.-Y. Chiu*, Phys. Rev., 173, 1210, 1968.
10. *V. Canuto, H.-Y. Chiu*, Phys. Rev., 173, 1220, 1968.
11. *V. Canuto, H.-Y. Chiu*, Phys. Rev., 173, 1229, 1968.
12. *L. Fassio-Canuto*, Phys. Rev., 187, 2141, 1969.
13. *Chin Kang Chou*, Astrophys. Space Sci., 10, 291, 1971.
14. *А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий*, Квантовая электродинамика, Наука, М., 1969, стр. 142.
15. *Л. Д. Ландау*, Собрание трудов, т. I, Наука, М., 1969, стр. 47.
16. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Статистическая физика, Наука, М., 1964.
17. *Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин*, Термодинамика, Статистическая физика и кинетика, Наука, М., 1972, стр. 249.
18. *Д. А. Киржниц*, ЖЭТФ, 38, 505, 1960.
19. *T. Hamada, E. E. Salpeter*, Ap. J., 134, 683, 1961.
20. *И. И. Гольдман, В. Д. Кривченков*, Сборник задач по квантовой механике, ГИТТЛ, М., 1957, стр. 148.
21. *Г. С. Саакян*, Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс, Наука, М., 1972, стр. 55.
22. *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИФМЛ, М., 1962, стр. 15.