

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 10

АВГУСТ, 1974

ВЫПУСК 3

ОБЗОРЫ

ТЕОРИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Д. И. НАГИРНЕР

1. *Введение.* Теория нестационарного переноса излучения — важный раздел теории переноса, тесно связанный со стационарной теорией и развивавшийся вслед за ней. Наиболее полно развита теория нестационарного поля излучения в стационарных однородных средах. Значительно меньше работ посвящено исследованию случаев, когда оптические свойства среды меняются в пространстве или во времени заданным образом. Нелинейные же задачи, в которых учитывается зависимость свойств среды от самого поля излучения, рассматривались лишь в считанных работах.

Многие результаты теории изложены в монографиях С. Чандрасекара [1], В. В. Соболева [2], Винга [3], В. Г. Горбацкого и И. Н. Мина [4], Белмана и др. [5], Кейза и Цвайфеля [6], Вильямса [7]. Имеется несколько обзорных статей [8—11], однако ни в одной из этих работ не дается обзора всех разделов теории. Именно такую цель преследует настоящая статья.

В статье будет говориться о переносе излучения, хотя многие результаты получены для нейтронов. В то же время мы не будем касаться вопросов, связанных с диффузией частиц, описываемой обычным уравнением диффузии, с их замедлением и перераспределением по скоростям при рассеянии (о замедлении нейтронов см. в [7, 11]). Не затрагиваются очень схожие задачи, возникающие при решении линеаризованного уравнения Больцмана, которым посвящена книга К. Черчиньяни [12], а также другие близкие задачи, решаемые кинети-

ческими методами: изменение ионизации (см., например, в [2, 4]), а также температуры и населенностей уровней атомов [13]. Приходится оставить в стороне рассеяние излучения на электронах, изучаемое при помощи нестационарного уравнения Компанейца [14, 15].

Важными характеристиками поля излучения являются различные средние временных решений. Однако, как правило, они могут быть найдены без решения нестационарных уравнений. Определению таких средних посвящена обширная литература. Например, среднее число и дисперсия числа рассеяний фотонов находились в работах [16—20], среднее время пребывания фотонов в среде — в работах [2, 21], средний путь их — в [22]. Все эти величины определялись при помощи стационарных решений. Дальнейшую библиографию можно найти в указанных работах.

Мы будем обсуждать главным образом результаты, полученные аналитическим путем, численным же методам решения будет уделено немного внимания. Большинство результатов лишь описывается, приводятся только наиболее простые и наглядные формулы.

Мы будем в основном придерживаться не хронологического, а предметного принципа, описывая работы в порядке усложнения решаемых в них задач. Так вначале мы обратимся к монохроматическому нестационарному рассеянию света в одномерной среде, затем последовательно к монохроматическому рассеянию в трехмерной среде и резонансному рассеянию. Потом рассмотрим неоднородные и нестационарные среды и нелинейные задачи. Наконец, мы укажем на сделанные астрофизические и геофизические применения результатов теории. В каждом разделе по возможности выдерживая тот же принцип: вначале рассматриваются бесконечные среды, затем конечные; случай, когда учитывается конечность скорости света, — после случая, когда задержка излучения во времени происходит только при рассеянии. В статье употребляются единые обозначения, не всегда совпадающие с обозначениями авторов.

2. Монохроматическое рассеяние в одномерной среде. Несмотря на грубую схематичность одномерной среды, то есть такой, в которой возможно движение фотона только вдоль одной прямой, задачи о монохроматическом рассеянии излучения в ней долго привлекали внимание исследователей. Это объясняется, во-первых, тем, что интегро-дифференциальные и интегральные уравнения переноса для одномерной среды сводятся к дифференциальным, и многие решения удается получить не только в явном виде, но и в сравнительно простой форме. Во-вторых, приближенно трехмерные задачи сводятся к одномерным (метод Эддингтона, двухпотокое приближение и т. д.).

Уравнения, описывающие рассеяние монохроматического излучения в одномерной среде, могут быть записаны в виде

$$t_1 \frac{\partial I_{\pm}}{\partial t} \pm \frac{\partial I_{\pm}}{\partial \tau} = -I_{\pm} + S_{\pm}, \quad (1)$$

где t — время, τ — оптическая глубина точек среды ($d\tau = \alpha dz$, α — коэффициент поглощения, z — геометрическая глубина); $t_1 = 1/\alpha c$ — среднее время, проводимое фотоном в пути между двумя последовательными рассеяниями; $I_{+}(\tau, t)$ — интенсивность излучения, идущего в сторону увеличения τ , $I_{-}(\tau, t)$ — в противоположную сторону. $S_{\pm}(\tau, t)$ — функции источников, то есть количества энергии, излучаемой единицей „объема“ в соответствующие стороны:

$$S_{\pm}(\tau, t) = g_{\pm}(\tau, t) + \\ + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^t [(1 \pm y) I_{+}(\tau, t') + (1 \mp y) I_{-}(\tau, t')] \psi(t - t') dt'. \quad (2)$$

В это уравнение входят характеристики элементарного акта рассеяния: λ — вероятность выживания фотона. $(1 + y)/2$ — доля фотонов, рассеиваемых вперед, $\lambda \psi(t) dt$ — вероятность того, что поглощенный

фотон переизлучится в момент от t до $t + dt$ $\left(\int_y^{\infty} \psi(t) dt = 1 \right)$. Если не

оговорено прстивное, мы будем считать, как это принималось в большинстве работ, что

$$\psi(t) = e^{-\frac{t}{t_1}} \frac{1}{t_1}, \quad (3)$$

где t_1 — среднее время пребывания фотона в поглощенном состоянии. Наконец, $g_{\pm}(\tau, t)$ — мощность первичных источников излучения: $g_{\pm}(\tau, t) d\tau dt$ — энергия, излучаемая объемом $d\tau$ на глубине τ за время dt в направлениях $+$ и $-$. В уравнениях (1) и (2) надо брать либо все верхние, либо все нижние знаки. К ним должны быть добавлены начальные и граничные условия.

Как известно, стационарное уравнение переноса в одномерной среде эквивалентно уравнению диффузии. Поэтому первые попытки рассмотрения нестационарных задач также были связаны с уравнением диффузии [23]. Вскоре, однако, Милн [24] вывел и правильное уравнение в предположении бесконечности скорости света ($t_2 = 0$), изотроп-

ности и консервативности рассеяния ($y = 0$, $\lambda = 1$). В. А. Фок [25] и Б. И. Давыдов [26] получили уравнение для случая, когда фотон все время проводит в пути, а рассеивается мгновенно ($t_1 = 0$; очевидно, при $t_1 \rightarrow 0$ $\dot{\varphi}(t) \rightarrow \dot{\varphi}(t)$). В работе [26] показано, как происходит предельный переход к уравнению диффузии (см. ниже).

При произвольных t_1 , t_2 и λ уравнения (1) и (2), описывающие изотропное рассеяние в одномерной среде, были выведены В. В. Соболевым [27, 2]. Дифференциальное уравнение для функции источников $S_+ = S_- = S(\tau, t)$, равносильное системе (1) — (2), имеет вид

$$t_1 \frac{\partial^3 S}{\partial \tau^2 \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial \tau^2} = t_1 t_2^2 \frac{\partial^3 S}{\partial t^3} + (2t_1 + t_2) t_2 \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + (t_1 + t_2(2 - \lambda)) \frac{\partial S}{\partial t} + (1 - \lambda) S. \quad (4)$$

Легко видеть, что при $\lambda = 1$, $\tau = \alpha z$, $\alpha \rightarrow \infty$, $t_1 + t_2 \rightarrow 0$ уравнение (4) переходит в диффузионное

$$\frac{\partial S}{\partial t} = D \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}, \quad (5)$$

если $\alpha \rightarrow \infty$ и $t_1 + t_2 \rightarrow 0$ таким образом, что коэффициент диффузии $D = [\alpha^2(t_1 + t_2)]^{-1}$ остается постоянным. Переход $\alpha \rightarrow \infty$ соответствует устремлению к нулю среднего свободного пробега частицы $1/\alpha$.

Для введенной им (сначала при решении стационарных задач) вероятности выхода фотона из среды с данной глубины через заданное время В. В. Соболев [27, 2] вывел дифференциальное (совпадающее с (4)), интегральное и функциональные уравнения. Теперь обратимся к полученным решениям.

В. В. Соболев [27, 2] при $t_2 = 0$ нашел явное выражение для $p(\tau, t, \lambda)$ двумя способами: методом разделения переменных в дифференциальном уравнении и путем применения преобразования Лапласа по времени. Для полубесконечной среды вероятность выхода фотона

$$p(\tau, t, \lambda) = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{t_1} \int_0^\infty (x \cos x\tau + \sin x\tau) e^{-\left(1 - \frac{\lambda}{1+x^2}\right) \frac{t}{t_1}} \frac{xdx}{(1+x^2)^2}. \quad (6)$$

Найден был также коэффициент отражения $\rho(t)$ и режим высвечивания полубесконечной среды после выключения стационарных до этого источников.

Систематически к решению нестационарных задач применял преобразование Лапласа И. Н. Минин [28]. Он обратил внимание на связь

преобразованных по времени нестационарных величин с соответствующими стационарными. Например, если $p(\tau, \lambda)$ стационарная вероятность выхода фотона из полубесконечной среды, то непосредственно из уравнений, определяющих $p(\tau, t, \lambda)$ и $p(\tau, \lambda)$, следует

$$\int_{t_2}^{\infty} p(\tau, t, \lambda) e^{-st} dt = (1 + st_2) p\left(\tau(1 + st_2), \frac{\lambda}{(1 + st_1)(1 + st_2)}\right). \quad (7)$$

Путем обращения преобразования Лапласа в [28] найдены явные выражения для $p(\tau, t, \lambda)$, резольвенты соответствующего интегрального уравнения (или, что то же самое, функции Грина уравнения (1)) и других величин, характеризующих нестационарный перенос излучения в полубесконечной среде, в общем случае отличных от нуля t_1 и t_2 (но при $y = 0$). В [28] получена резольвента и для бесконечной в обе стороны среды.

Важный случай $t_1 = 0$, $\lambda = 1$, отвечающий рассеянию на аэрозольных частицах (в облаках, дымаках и др.), а также турбулентной диффузии, изучался в уже упоминавшихся работах [25, 26], а также [29—31]. Результаты [29—31] получаются из общих подстановкой $\lambda = 1$, $t_1 = 0$.

Неизотропное ($y \neq 0$) нестационарное рассеяние в полубесконечной одномерной среде при $t_1 = 0$ рассматривалось в работе [32]. Там найдены $p_{\pm}(\tau, t, \lambda)$ — функции источников, определяемые (1) и (2) при $g_{\pm}(\tau, t) = \lambda((1 \pm y)/2) e^{-\tau_0} (t - t_2 \tau)$, то есть вероятности выхода через время t фотонов, летевших на глубине τ в момент $t = 0$ в сторону границы и от нее и поглощенных там.

Рассеяние в среде конечной оптической толщины, даже одномерной, поддается исследованию с гораздо большим трудом. Здесь справедлива та же связь преобразований Лапласа по времени от нестационарных решений с соответствующими стационарными, в которых дополнительно надо оптическую толщину τ_0 заменить на $\tau_0(1 + st_2)$. Рассмотрим, например, вероятность выхода фотона из среды ($y = 0$). Стационарная функция $p(\tau, \tau_0, \lambda)$ определяется уравнением

$$p(\tau, \tau_0, \lambda) = \frac{\lambda}{2} e^{-\tau} + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} e^{-|\tau - \tau'|} p(\tau', \tau_0, \lambda) d\tau' \quad (8)$$

и имеет явное выражение

$$p(\tau, \tau_0, \lambda) = \sqrt{\lambda} \frac{\operatorname{sh} [\sqrt{1 - \lambda}(\tau_0 - \tau) + \operatorname{arth} \sqrt{1 - \lambda}]}{\operatorname{sh} [\sqrt{1 - \lambda}\tau_0 + 2 \operatorname{arth} \sqrt{1 - \lambda}]} \quad (9)$$

В наиболее простом случае $t_2=0$ достаточно сделать замену $\lambda \rightarrow \lambda/(1+st_1)$ (заменять τ и τ_0 не нужно) и дело сводится к нахождению собственных чисел (с. ч.) и собственных функций (с. ф.) уравнения (8). Оно имеет, как фредгольмовское, счетное множество с. ч. $\lambda_n = 1 + x_n^2$, где $x_n > 0$ определяются из условия обращения в нуль знаменателя в (9). Таким образом, при $t_2=0$ у преобразования Лапласа от $p(\tau, t, \tau_0, \lambda)$ имеется счетное множество полюсов и оно легко обращается:

$$p(\tau, t, \tau_0, \lambda) = \frac{\lambda}{t_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n (x_n \cos x_n \tau + \sin x_n \tau)}{\left(1 + \tau_0 \frac{1+x_n^2}{2}\right) (1+x_n^2)} e^{-\left(1 - \frac{\lambda}{1+x_n^2}\right) \frac{t}{t_1}}. \quad (10)$$

Эта формула была получена В. В. Соболевым [27,2]. В числителе стоят с. ф. уравнения (8) (ненормированные). При $\tau_0 \rightarrow \infty$ (10) переходит в (6).

Случай $t_2 \neq 0$ также изучался в ряде работ. В [33] найдено преобразование Лапласа по времени от коэффициента отражения при $y \neq 0$. Наиболее полное исследование (при $y=0$) принадлежит И. Н. Минину [34]. Он явным образом, исходя из формул типа (9), показал, что преобразования Лапласа по времени от нестационарных искомых функций имеют особенностями на комплексной плоскости s линию ветвления (уходящую на ∞ при $t_2 \rightarrow 0$), конечное число полюсов (стремящееся к ∞ при $\tau_0 \rightarrow \infty$ или $t_2 \rightarrow 0$) и существенно особую точку ∞ . Соответственно этому решения имеют вид суммы контурного интеграла и членов, отвечающих вычетам в полюсах и на ∞ . В [34] приводятся выражения для вероятности выхода фотона из среды и коэффициентов отражения и пропускания для $t_1=0$ и $t_1=t_2$.

Частная задача о размножающей среде ($t_1=0$, $y=0$, $\lambda=2$, $\tau_0 < \infty$) рассматривалась в [35]. Винг [35,3] при помощи функционального уравнения для коэффициента отражения $\rho(t)$ доказал существование решения и нашел преобразование Лапласа по времени $\bar{\rho}(s)$. В книге [3] приводится список работ, в которых получены уравнения для различных величин при помощи принципов инвариантности (см. также [36]). Различные асимптотические формулы для величин, характеризующих нестационарное поле излучения в одномерной среде, были получены в работах [2,27—30,32]. Все они имеют вид диффузионных решений, так что уравнение (5) асимптотически правильно описывает рассеяние света. Но асимптотики мы обсудим в следующем разделе для случая трехмерной среды.

3. *Монохроматическое рассеяние в трехмерной среде.* Здесь уравнения, описывающие процесс переноса в плоской среде, имеют вид

$$t_2 \frac{\partial I}{\partial t} + \mu \frac{\partial I}{\partial \tau} = -I(\tau, \mu, \varphi, t) + S(\tau, \mu, \varphi, t), \quad (11)$$

$$S(\tau, \mu, \varphi, t) = g(\tau, \mu, \varphi, t) + \\ + \frac{\lambda}{4\pi} \int x(\gamma) d\omega' \int_{-\infty}^t \psi(t-t') I(\tau, \mu', \varphi', t') dt', \quad (12)$$

где μ — косинус угла между лучом и внутренней нормалью к слоям среды, φ — азимут, γ — угол рассеяния, $x(\gamma)$ — индикатриса рассеяния, $d\omega'$ — элемент телесного угла. Остальные обозначения имеют тот же или аналогичный смысл, что и в разделе 2.

В ряде работ искалось приближенное решение (11) — (12). Например, каким-нибудь методом эта система сводилась к одномерной (1) — (2), из последней получалось выражение для функции источников, подставлявшееся в (11), откуда находилась интенсивность излучения $I(\tau, \mu, \varphi, t)$. Так делалось в работе [30] для $t_1 = 0$, $x(\gamma) = 1$. В [37] при помощи двух итераций решений, найденных в малоугловом приближении, получены довольно точные формулы для интенсивности излучения на не очень больших глубинах полубесконечной среды. В [38] временные распределения восстанавливались по их найденным моментам.

Как легко показать непосредственно при помощи уравнений (11) и (12), преобразования Лапласа по времени от нестационарных решений можно получить формально из стационарных точно так же, как и для одномерной среды, то есть сделав замены $\lambda \rightarrow \lambda/(1+st_1)(1+st_2)$, $\tau \rightarrow \tau(1+st_2)$. Для обращения этих преобразований необходимо исследовать поведение стационарных решений при комплексных λ и τ .

Из свойств преобразования Лапласа следуют некоторые „принципы подобия“, исследованные наиболее подробно в [9] (частные случаи в работах [37, 39, 40]). Там показано, что в трех случаях $t_1 = 0$, $t_2 = 0$ и $t_1 = t_2$ достаточно изучить чистое рассеяние, так как решения при любом λ выражаются через решения при $\lambda = 1$. В работе [41] доказано, что других таких случаев нет.

Точные решения практически найдены лишь для изотропного рассеяния и предельных случаев $t_1 = 0$ и $t_2 = 0$. Монохроматическое изотропное рассеяние для $t_2 = 0$ можно считать частным случаем резонансного (полное перераспределение по частотам при прямоугольном профиле коэффициента поглощения, см. раздел 4). Для изучения рассеяния в облаках, море и др. наибольший интерес, как уже отмечалось, представляет случай, когда фотоны рассеиваются мгновенно, а запаздывание происходит лишь за счет конечности скорости света.

Первое точное решение для бесконечной среды получено методом Кейза, наметившего путь его получения, Боуденом (изложение его результатов см. в книге [6]). Он нашел функцию Грина (11) и (12) $G_-(\tau, \mu, \mu_0, t)$, то есть интенсивность в задаче о „вспыхивающей“ плоскости, когда в правой части (12) стоит $g(\tau, t) = \delta(\mu - \mu_0) \delta(\tau) \delta(t)$. Важным вопросом при этом было установление существования корней характеристического уравнения

$$\frac{\lambda}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} = 1 \quad (13)$$

при комплексных λ . Было показано, что такой корень существует только, если λ принадлежит некоторой области на комплексной плоскости. Решение было получено в форме контурных интегралов в двух видах, соответствующих преобразованиям Лапласа от него по времени t или по координате τ , причем доказана их равносильность. Путем применения к уравнениям двойного преобразования Фурье (по времени и по координате) функция $G_-(\tau, \mu, \mu_0, t)$ найдена в работе [42]. Для анизотропного рассеяния при индикатрисе $x(\gamma)$, разлагающейся в конечную сумму полиномов Лежандра от косинуса угла рассеяния γ , $G_-(\tau, \mu, \mu_0, t)$ получена в [43] (методом Кейза).

Для полубесконечной среды первоначально усилия были направлены на исследование выходящего излучения. В [44] выведены уравнения для функций, определяющих интенсивность выходящего излучения при освещении изотропно рассеивающей излучение среды импульсом параллельных лучей или при равномерной вспышке всей среды. Это уравнение при $t_2 = 0$ было численно решено в [45] методом итераций. Функция Грина $G(\tau, \mu, 0, \mu_0, t)$ для полубесконечной среды при изотропном рассеянии и $t_1 = 0$ была найдена И. Кушнером и Цвайфелем [39] в явном виде методом Кейза.

Специально исследовалось поле излучения в полубесконечной среде при освещении ее излучением, интенсивность которого гармонически меняется со временем (синусоидальная модуляция). В [7, 46] показано, что при больших частотах модуляции ω в глубоких слоях при $t_1 = 0$ не существует установившегося режима, то есть распределение по углам меняется с глубиной: поле излучения не успевает подстраиваться к слишком частым изменениям падающего сигнала. Это соответствует отсутствию корня характеристического уравнения (13), если λ заменить на $\lambda/(1 + it_2\omega)$, при больших ω .

Ряд работ посвящен изотропному рассеянию в примыкающих полупространствах, отличающихся значениями λ и t_2 ($t_1 = 0$). В [47] рассмотрен импульсный плоский источник на границе, а в [48, 49] распространение волн яркости, пропорциональных $e^{i\omega t}$, от плоских источ-

ников с такой же временной зависимостью мощности, расположенных на бесконечной [48] и конечной [49] глубинах.

При изучении рассеяния в конечном слое при $t_2 = 0$ возникает та же проблема, что и в случае одномерной среды, о числе полюсов преобразований Лапласа от решений. Много места этому вопросу уделено в книге [3], где исследуется чисто математически оператор переноса (его спектр, собственные функции, полнота их и т. д.). В частности, там строго доказано, что при $t_1 = 0$ число таких полюсов конечно и дано предположительное физическое объяснение этому обстоятельству. Так как из результатов работы [50] следует, что число полюсов бесконечно для рассеяния в шаре, Винг считал, что их конечность объясняется возможностью фотону двигаться бесконечно долго вдоль прямой, параллельной границам слоя. Однако, поскольку число полюсов конечно и для одномерной среды (см. раздел 2), а там такая интерпретация не проходит, то она вызывает сомнения.

Формальное решение задачи о нестационарном диффузном отражении от изотропно рассеивающего плоского слоя конечной оптической толщины также получено Боуденом (см. книгу [6]). Для полного нахождения решения необходимо численно решить интегральное уравнение на собственные значения, что и было сделано в [51] для ряда значений τ_0 . Ранее спектр с.з. и методы их определения исследовались в [52, 53], в том числе и для сферической геометрии среды [50, 53] (другие работы см. в [3]).

Если точные решения получаются сложными даже в простейших случаях, то асимптотическое поведение их можно сравнительно просто найти для неизотропного рассеяния (при не слишком вытянутой индикатрисе) и произвольных t_1 , t_2 и λ . Например, для бесконечной среды из асимптотики стационарной функции Грина при $\tau \gg 1$ и $1 - \lambda \ll 1$ [6, 54] в [9] получено при $t \gg \tau \gg 1$, $\lambda = 1$

$$G_-(\tau, \mu, \mu_0, t) \sim \frac{\sqrt{3-x_1}}{4\sqrt{\pi}\sqrt{t}} e^{-\frac{3-x_1}{4}\frac{\tau}{t}}. \quad (14)$$

Здесь x_1 — коэффициент при $P_1(\cos \gamma)$ в разложении индикатрисы $x(\gamma)$ по полиномам Лежандра, а время измеряется в единицах $t_1 + t_2$. Более точная асимптотика получена в [43] для $t_1 = 0$.

Для полубесконечной среды остановимся лишь на задаче о диффузном отражении. Из точной формулы для коэффициента отражения, усредненного по азимуту, верной при $1 - \lambda \ll 1$ [54], делая в ней замену λ на $\lambda/(1 + st_1)(1 + st_2)$ и обращая преобразование Лапласа, легко получить, как и (14), при $t \gg t_1 + t_2 = 1$ и $\lambda = 1$ [9]

$$\rho(\mu, \mu_0, t) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{u_0(\mu)u_0(\mu_0)}{\sqrt{3-x_1}t^{3/2}}. \quad (15)$$

Здесь $u_0(\mu)$ — распределение по углам выходящего излучения в консервативной проблеме Милна, нормированное определенным образом [54]. Подобная формула получена в [37] при помощи приближенных формул.

Асимптотику интенсивности внутри полубесконечной среды, то есть решения (11) и (12) $G(\tau, \mu, 0, \mu_0, t)$ при $g(\tau, t) = \delta(\mu - \mu_0) \delta(\tau) \delta(t)$ и граничном условии $G(0, \mu, 0, \mu_0, t) = 0$ ($\mu > 0$), нашел И. Н. Минин также для чистого рассеяния [9]:

$$G(\tau, \mu, 0, \mu_0, t) \sim \frac{\sqrt{3-x_1} \tau}{\sqrt{\pi} t^{3/2}} u_0(\mu_0) e^{-\frac{3-x_1}{4} \frac{\tau^2}{t}}. \quad (16)$$

Различные частные случаи изучались в работах [55, 56].

Асимптотическое поведение нестационарных коэффициентов отражения и пропускания (и функций источников) исследовалось несколькими авторами, исходя из диффузионных решений, исправленных на границе [41], либо при помощи приближенных формул [10, 37, 56, 57], либо из точных асимптотик стационарных величин при $1 - \lambda \ll 1$ [58, 59]. Можно сказать, что итог этим исследованиям подведен в работах [41, 59].

В. В. Иванов и С. Д. Гутшабаш [59] исходили из точных асимптотических формул, полученных В. В. Соболевым [54] для коэффициентов отражения и пропускания при слабом истинном поглощении в анизотропно рассеивающем плоском слое большой оптической толщины τ_0 . Обращая преобразования Лапласа после соответствующей замены λ , они получили для коэффициента отражения при $\lambda = 1$

$$\rho(\mu, \mu_0, \tau_0, t) \sim \rho(\mu, \mu_0, t) - \frac{4u_0(\mu) u_0(\mu_0)}{(3-x_1)(\tau_0 + 2q)} \frac{1}{t_d} R\left(\frac{t}{t_d}\right), \quad (17)$$

где

$$t_d = (3-x_1)(\tau_0 + 2q)^2(t_1 + t_2), \quad (18)$$

q — так называемая экстраполированная длина, выражающаяся через функцию $u_0(\mu)$, а $R(x)$ определяется разложением

$$R(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} x^{3/2}} - 2\pi^2 \sum_{l=1}^{\infty} l^2 e^{-l^2 \pi^2 x^2}. \quad (19)$$

Это разложение указывает на связь $R(x)$ с θ -функциями Якоби, являющимися частными решениями уравнения диффузии (5). Формулы для предельных случаев $t \ll t_d$ и $t \gg t_d$ были известны раньше [37, 56–58]. В работе [59] дана физическая интерпретация хода изменения функций

отражения и пропускания со временем, отражающая процесс распространения в слое волны яркости. Легко переписать формулы (14)–(17) для $\lambda < 1$ и любых t_1 и t_2 . О второй работе [41] скажем несколько ниже.

Нестационарное рассеяние монохроматического излучения в средах, не сводящихся к плоскопараллельным, изучалось в сравнительно небольшом количестве работ. Получены различного рода уравнения на основании принципов инвариантности, описывающие поле выходящего из конечного слоя излучения от падающего узкого импульсного пучка света [60]. Вопрос о числе дискретных с. з. оператора переноса в шаре рассматривался в уже упоминавшейся работе [50].

Расплывание узких пучков в плоских средах изучалось Л. М. Романовой [37, 55, 10]. Она получила цепочку уравнений, определяющих J_{nk} — интегралы от произведений целых степеней прямоугольных координат на плоскостях, параллельных границам, $x^n y^k$ на интенсивность излучения, и замкнула их для $0 \leq n + k \leq 2$. Это дало возможность найти координаты центра и дисперсию распределения яркости светового пятна. Функции J_{nk} оценивались по асимптотикам на больших глубинах и временах и численно.

При помощи диффузионных решений стационарных задач в работе [56] изучено свечение полубесконечной среды и оптически толстого плоского слоя после вспышки в них изотропного точечного источника. Там же учтено влияние ортотропной отражающей поверхности. В работах [37, 55, 60, 61] считалось $t_1 = 0$.

В работе Э. П. Зеге и И. Л. Кацева [41] подведен итог их предшествующим исследованиям и сделаны обобщения. Там, показано, что асимптотический временной режим можно находить для сред любой формы и любых источников, пользуясь решениями стационарных задач, полученными в диффузионном приближении. Исходя из этого, найден закон высвечивания среды, составляющей долю α полного пространства по объему, если в момент $t = 0$ на нее действовал источник измерения m ($m = 0$ для точечного источника, $m = 1$ для линейного и т. д.):

$$t^{-\frac{3-m}{2} + \log_2 \alpha} e^{-s_0 t}, \quad (20)$$

причем $2s_0 t_1 t_2 = 1 - \sqrt{1 - 4(1 - \lambda)t_1 t_2}$, $t_1 + t_2 = 1$. Для нахождения закона затухания излучения в ограниченной по одной или несколькими координатам среде, необходимо определить первое с. ч. оператора Лапласа в такой среде, что легко сделать, если переменные разделяются. Это вопрос связан с известной проблемой критичности [6].

В [41] приводятся результаты для объемов, допускающих разделение переменных в прямоугольных декартовых координатах. Затем там находится асимптотический режим поля излучения в глубоких слоях полубесконечной среды и плоского слоя при освещении их узкими пучками. Обсуждается влияние отражающих границ, а также точность получаемых асимптотик путем сравнения с численными расчетами для конкретных индикатрис рассеяния, в том числе полидисперсных.

В заключение этого раздела отметим, что нестационарная задача при $t_1=0$ эквивалентна задаче о нахождении распределения фотонов по пробегам в однородной среде, а при $t_2=0$ — распределения их по числу рассеяний. На эти обстоятельства было указано Ван де Хюлстом и Ирвином [62]. Дальнейшему исследованию этих вопросов посвящены работы [37, 57, 63].

Отметим также, что численные методы, применявшиеся для решения нестационарных задач рассеяния, перечисляются в [9, 10].

4. Резонансное рассеяние. Нестационарное рассеяние в резонансной линии изучалось, как и стационарное, в рамках предположения о полном перераспределении по частотам (ППЧ) и изотропии при элементарном акте рассеяния. Эти предположения означают, что фотон при рассеянии полностью „забывает“ о частоте и направлении, которые он имел до поглощения. Сделанные приближения позволяют ввести функцию источников, не зависящую от частоты и равную с точностью до численного множителя степени возбуждения рассеивающих двухуровневых атомов.

Из-за возможности переизлучения фотона в крыле линии, где коэффициент поглощения мал, а средний свободный пробег велик, процесс переноса резонансного излучения не локален и его расчет не сводится к решению уравнения типа диффузии даже в приближении одномерной среды. Поэтому одномерная среда и не рассматривалась.

Уравнения, описывающие нестационарный перенос резонансного излучения в линейном приближении, в случае плоской геометрии выглядят следующим образом:

$$t_2 \frac{\partial I}{\partial t} + v \frac{\partial I}{\partial x} = -[\alpha(x) + \beta] I + W(x) S, \quad (21)$$

где τ — оптическая глубина в центре линии, β — отношение коэффициентов поглощения в непрерывном спектре и центре линии α_∞ , $t_2 = 1/c\alpha_\infty$, x — безразмерная частота, $\alpha(x)$ — профиль коэффициента поглощения, $\alpha(0) = 1$. Далее $W(x)$ — плотность распределения фотонов,

переизлучающихся в линии, по частоте. В большинстве работ $W(x)$ считалась пропорциональной коэффициенту поглощения: $W(x) = A\alpha(x)$, A — постоянная нормировки. Наконец, $I(\tau, \mu, x, t)$ — интенсивность излучения, идущего на глубине τ в момент t в направлении μ и частоте x , рассчитанная на единицу безразмерных частот, а $S(\tau, t)$ — функция источников, выражающаяся через интенсивность:

$$S(\tau, t) = g(\tau, t) + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx \int_{-\infty}^t \psi(t-t') dt' \int_{-1}^1 I(\tau, \mu, x, t') d\mu. \quad (22)$$

Здесь $g(\tau, t)d\tau dt$ — энергия, излучаемая без рассеяний объемом единичной площади основания и высотой $d\tau$ на глубине τ за время от t до $t+dt$ во всех частотах в единице телесного угла. Остальные обозначения совпадают с употреблявшимися ранее.

Достаточно рассмотреть источники такого вида, так как в противном случае одна итерация сводит уравнение к виду (21) и (22) при любых источниках.

Как и при монохроматическом рассеянии, преобразованные по Лапласу искомые характеристики поля излучения можно получить из соответствующих стационарных. Здесь надо в последних заменить λ на $\lambda/(1+st_1)(1+st_2)$, а β на $\beta+st_1$, где s — параметр преобразования. Таким образом, появляется необходимость изучать поведение стационарных решений при комплексных λ и β .

Для резонансного рассеяния наибольший интерес представляет случай, когда задержка излучения в среде обуславливается в основном временем, проводимым фотоном в поглощенном состоянии. Кроме того, случай $t_2 \neq 0$ ставит, как кажется, непреодолимые трудности для аналитического исследования. Поэтому рассматривался лишь случай $t_2 = 0$. Везде также принималась функция ψ вида (3). Во всех последующих формулах положено $t_1 = 1$.

Нестационарное уравнение для функции источников для плоского слоя конечной оптической толщины было составлено Холстейном [64], одним из первых введшим предположение о ППЧ в теорию переноса. В наших обозначениях оно имеет вид

$$S(\tau, t) = g(\tau, t) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau} K(|\tau - \tau'|) d\tau' \int_{-\infty}^t \psi(t-t') S(\tau', t') dt', \quad (23)$$

где

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W'(x) \alpha(x) E_1[\tau \alpha(x)] dx. \quad (24)$$

Первое точное решение нестационарной задачи о рассеянии резонансного излучения, а именно функцию Грина для бесконечной однородной среды при пренебрежении непрерывным поглощением $G_{\infty}(|\vec{r} - \vec{r}'|, t - t')$ получил Б. А. Векленко [65]. Сферическую задачу о распространении возбуждения в бесконечной среде, если в начальный момент оно имело δ -образную плотность распределения, он свел к плоской задаче и нашел решение $A(\tau, t)$ уравнения (23) при $g(\tau, t) = \delta(\tau)e^{-t}$ и интегрировании по τ' от $-\infty$ до ∞ :

$$A(\tau, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-[1-\lambda V(u)]t} \cos \tau u du, \quad (25)$$

где

$$V(u) = \int_0^{\infty} K(\tau) \cos \tau u d\tau. \quad (26)$$

Функция Грина выражается через $A(\tau, t)$ следующим образом:

$$G_{\infty}(\tau, t) = -\frac{1}{2\pi\tau} \frac{\partial A(\tau, t)}{\partial \tau}. \quad (27)$$

В [65] исследовано асимптотическое поведение $G_{\infty}(\tau, t)$ при $\tau \gg 1$ и $t \gg 1$ для доплеровского и лоренцовского профилей $\alpha(x)$, а также получены асимптотики при $\tau \rightarrow \infty$ величины $\bar{t}(\tau)$, представляющей собой среднее время выхода фотона из сферы оптического радиуса τ (в бесконечной среде).

Подробнее задача о свечении бесконечной среды рассматривалась Ю. Ю. Абрамовым и А. П. Напартовичем [66] (случай $\beta = 0$), а также Д. И. Нагирнером [67] (любые β). Они нашли резольвенту уравнения (23) $\Phi_{\infty}(\tau, t)$ (с интегралом по τ' от $-\infty$ до ∞), то есть решение задачи о вспыхивающей плоскости, отвечающее $g(\tau, t) = \lambda/2 (K(|\vec{r}|) \psi(t))$ (для простоты ограничимся случаем $\beta = 0$). При $\tau > 0$

$$\Phi_{\infty}(\tau, t) = A(\tau, t) + \frac{\partial A(\tau, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{\infty} V(u) e^{-[1-\lambda V(u)]t} \cos \tau u du. \quad (28)$$

Через $\Phi_-(\tau, t)$ выражается и решение задачи о вспыхивающем точечном источнике (так же, как G_- через A в (27)). Из (28) видно, что имеет место принцип подобия, как и в разделе 3: функция $\Phi_-(\tau, t)$ при любом λ получается из Φ_- при $\lambda = 1$, если последнюю умножить на $e^{-(1-\lambda)t}$ и заменить в ней t на λt . Этим свойством обладают и все другие решения, поэтому достаточно найти их для $\lambda = 1$.

Асимптотики $\Phi_-(\tau, t)$ в [66] и [67] были получены для достаточно общего случая, когда коэффициент поглощения $\alpha(x)$ в крыле линии убывает как произведение некоторой степени частоты ($x^{-1/(1-2\gamma)}$, где $0 < \gamma < 1/2$) на медленно меняющуюся функцию или постоянную. Тогда, как показано в [66], функция $V(u)$ при $u \rightarrow 0$ ведет себя следующим образом:

$$1 - V(u) \sim u^{2\gamma} V_0(u), \quad (29)$$

где $V_0(u)$ также медленно меняющаяся функция или постоянная. Закон (29) справедлив и в более общем случае, например, для доплеровского профиля ($\gamma = 1/2$) и даже для монохроматического рассеяния ($\gamma = 1$).

При $t \gg t_1 = 1$ и $\tau \gg 1$ функция $\Phi_-(\tau, t)$ выражается через функции одной переменной, то есть осуществляется „автомодельный режим“ распространения волны возбуждения. Мы здесь приведем выражения лишь для предельных случаев:

$$\Phi_-(\tau, t) \sim \begin{cases} \frac{1+t}{2} K(\tau), & \tau^{2\gamma} \gg t, \\ \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2\gamma}\right)}{\pi (V_0 t)^{\frac{1}{2\gamma}}} = c_\gamma(t), & \tau^{2\gamma} \ll t. \end{cases} \quad (30)$$

В первой формуле t , а во второй τ не обязательно большие. Если $V_0(u)$ функция, а не постоянная, то ее аргументом надо считать $t^{1/2\gamma}$.

В статье [68] задача о рассеянии фотона в бесконечной среде связана с задачей о случайном блуждании частицы и нахождении асимптотик распределения по числу рассеяний.

Для полубесконечной среды в [66] и [67] были получены асимптотики решений задачи о вспыхивающей граничной плоскости. При этом авторы [66] получали их непосредственно из асимптотик стационарных решений, а в [67] была решена более общая задача. Там найдено точное решение $\Phi(\tau, t)$ уравнения (23) при $\tau_0 = \infty$ и $g(\tau, t) = \lambda K(\tau) \psi(t)/2$ при любом ядре K , представляющемся в виде суперпозиции экспонент, в частности, это позволило учесть непрерывное поглощение. В [67] было

найденно и точное выражение для интенсивности выходящего излучения в той же задаче, т. е. нестационарная H -функция. Для этого, исходя из явного выражения для стационарной H -функции, было изучено ее поведение при λ вблизи линии ветвления $[1, +\infty)$.

Из точных решений [67] или из асимптотик при $\lambda \rightarrow 1$ получается

$$\Phi(\tau, t) \sim \begin{cases} c_1(t) \Psi(\tau) \sim c_1(t) \frac{\tau^{\frac{1}{2}}}{V \bar{V}_0 \Gamma(1+\frac{1}{2})}, & \tau^{\frac{1}{2}} \ll t, \\ \frac{1}{2} K(\tau) \left[e^{-\frac{t}{2}} I_0\left(\frac{t}{2}\right) + \int_0^t e^{-\frac{t'}{2}} I_0\left(\frac{t'}{2}\right) dt' \right], & \tau^{\frac{1}{2}} \gg t. \end{cases} \quad (31)$$

Здесь $\Psi(\tau)$ — решение однородного стационарного уравнения (проблема Милна) при $\tau_0 = \infty$ и $\lambda = 1$, $\Psi(0) = 1$. Вторая часть в первой строчке (31) справедлива при $\tau \gg 1$. В [67] найдены также асимптотики решений, полученных с учетом §. Результаты могут быть применены и к монохроматическому рассеянию.

В. В. Иванов и Ш. А. Сабашвили [69] изучили связанный с нестационарным рассеянием вопрос о поведении разложений стационарных решений по кратностям рассеяний n при $n \rightarrow \infty$.

Для решения уравнения (35) при $\tau_0 < \infty$, то есть для конечного слоя, необходимо найти с. ф. и с. ч. стационарного интегрального уравнения с ядром $1/2 K(|\tau - \tau'|)$. При больших t асимптотика нестационарных решений будет определяться наименьшим с. ч. $\lambda_0(\tau_0)$ (все они больше единицы). Асимптотическое поведение $\lambda_0(\tau_0)$ при $\tau_0 \rightarrow \infty$ для доплеровского и лоренцовского профилей изучал еще Холстейн [74]. Он указал функциональную форму зависимости λ_0 от τ_0 , а коэффициенты получил вариационным методом. До конца для плоского слоя эту проблему решил Вайдом [70] (см. также [71], где дано обобщение на среды любой формы и учтено наличие в (29) функции $V_0(u)$). Результат [70, 71] заключается в следующем. Если справедливо соотношение (29), то при $\tau_0 \rightarrow \infty$ и $n = \text{const}$

$$\lambda_n(\tau_0) \sim 1 + \beta_n(\gamma) \bar{V}_0\left(\frac{1}{\tau_0}\right) \frac{1}{\tau_0^{\frac{1}{2}}}, \quad (32)$$

где численные коэффициенты $\beta_n(\gamma)$ определяются путем решения некоторого стандартного интегрального уравнения (одного и того же для всех τ_0). Ван Тригт вычислил β_n для доплеровского ($\gamma = 1/2$) и лоренцовского ($\gamma = 1/4$) профилей [72], а затем обобщил результат на другие геометрии рассеивающих сред, а также многомерные области [73]. Обобщение для цилиндра было сделано раньше [74]. Отметим, что при $\gamma = 1$ коэффициент β_n находится точно: $\beta_n = (n+1)^2 \pi^2$.

Как говорилось в начале раздела, во всех обсуждавшихся работах делалось предположение о ППЧ и считалось $t_2=0$. Исключение составляет работа Филда [75], где решена задача о высвечивании мгновенно вспыхивающего однородного бесконечного пространства, так что интенсивность излучения зависит лишь от частоты и времени. В [75] принималось, что $t_1=0$, а рассеяние происходит консервативно и по закону перераспределения по частотам, учитывающему лишь тепловое движение атомов. Ту же задачу, но при ППЧ решил В. В. Иванов [76], который использовал эти решения для обоснования приближения ППЧ, сравнив главные члены асимптотик функций источников при $t \rightarrow \infty$ и показав их тождественность.

5. Неоднородные и нестационарные среды. Нелинейные задачи.

1. *Неоднородные среды.* Уравнения, описывающие нестационарное рассеяние излучения в неоднородных средах, были составлены несколькими авторами для плоской [77, 78] и для сферической геометрий [79]. В этих же работах предлагаются методы сведения исходных уравнений переноса к другим, более удобным для численных расчетов. Они пригодны и для однородных сред.

Общие соотношения между величинами, характеризующими поле рассеянного излучения при $t_2=0$ и произвольной функции $\psi(t)$ для сред любой формы, в частности, принцип подобия для вероятности выхода фотона из среды, найдены в работе [40].

Н. Б. Енгибарян [33] получил уравнение типа Риккати для преобразования Лапласа по времени от коэффициента отражения одномерной конечной среды, в которой величины λ , t_1 , t_2 и u зависят от глубины. Когда от τ зависит лишь λ , при помощи принципа инвариантности получено нелинейное уравнение Вольтерра для преобразования Лапласа от коэффициента отражения трехмерной среды [80]. Это уравнение предлагается решать разложением в ряд Лорана относительно параметра преобразования s .

И. Н. Минин [81] предложил обобщение своего метода на неоднородные среды. Именно, в решении стационарной задачи для плоского слоя, полученном для произвольной зависимости $\lambda(\tau)$, вместо этой функции надо подставить $\lambda(\tau)/(1+st_1(\tau))(1+st_2(\tau))$, а затем обращать преобразование Лапласа. Лишь в одном конкретном случае ему удалось проделать эту процедуру: были получены уравнения для вспомогательных функций, через которые выражается коэффициент отражения полубесконечной среды, в которой $t_2=0$, $t_1=\text{const}$, а зависит от глубины λ .

В. В. Леонов [82] нашел точное выражение для вероятности выхода фотона из одномерной полубесконечной среды, когда $t_2=0$, а t_1

является функцией глубины вида $t_1(\tau) = t_1(0)/(1 + \delta_1\tau)$, где $t_1(0)$ и δ_1 — постоянные.

2. Нестационарные среды. Под этим термином мы понимаем среду, оптические свойства которой заданным образом, не зависящим от поля излучения, меняются со временем. Здесь уравнения все еще линейны, но, вообще говоря, не обладают свойством инвариантности по отношению к сдвигу во времени. Например, вероятность выхода зависит отдельно от моментов поглощения фотона и его выхода из среды, а не только от их разности.

Уравнения, определяющие коэффициенты отражения и пропускания плоским слоем с зависимостью коэффициента поглощения, λ и индикатрисы от времени и глубины при $t_1 = 0$, получены в [83].

Уравнения для вероятности выхода фотона из одномерной конечной среды и коэффициента отражения при $t_2 = 0$, когда оптические глубины в ней меняются по произвольному закону $\tau = \tau(t)$, $\tau_0 = \tau_0(t)$, получил С. А. Каплан [84]. Им же рассмотрен кратко случай трехмерной среды и получено приближенное решение для ППЧ. В дальнейшем рассматривались два вида зависимости оптических глубин от времени.

а) Среды с движущейся границей. Уравнение для коэффициента отражения от одномерной среды с произвольно движущейся границей и $t_1 = 0$ получены в [85] в связи с переносом нейтронов в стержнях. В [86] доказаны существование и единственность их решений. В остальных работах, упоминаемых ниже, рассматривался перенос излучения. Случай движения границы среды может осуществляться, например, когда рассеяние излучения в линии происходит в среде, где движется фронт ионизации (вызываемой внешним излучением или проходящей ударной волной). Тогда зона, где атомы, на которых рассеиваются фотоны данной линии, ионизованы, будет прозрачна для этих фотонов. Другой случай — отрыв вещества от среды.

Первая работа в этом направлении была выполнена С. А. Капланом, И. А. Климишиным и В. Н. Сиверсом [87]. Они рассмотрели полубесконечную одномерную среду с равномерно движущейся внутрь или наружу границей. Ясно, что при этом задача инвариантна относительно сдвига по времени. В [87] были составлены уравнения для вероятности выхода фотона $p(\tau, t)$ в двух предельных случаях $t_1 = 0$ и $t_2 = 0$ и найдена функция $P(\tau)$ — полная вероятность выхода из такой среды с данной глубины (за все время). Для $P(\tau)$ было получено дифференциальное уравнение и при любых t_1 и t_2 . В следующей работе [88] были выведены уравнения для $p(\tau, t)$ и найдена $P(\tau)$ при произвольных t_1 и t_2 . В [89] получены $p(\tau, t)$ и $p(t)$ для $t_2 = 0$ в явном виде,

а также их асимптотики при $t \rightarrow \infty$. Там же найдены закон высвечивания среды при линейных по τ первичных источниках излучения и среднее время выхода фотона с любой глубины.

б) Среда, в которых оптические глубины во всех точках изменяются одинаково. Тогда при $t_2 = 0$, что принималось всеми авторами, $\tau(t) = \tau g(t/t_1)$. Здесь инвариантность к сдвигу по времени имеется только тогда, когда функция $g(u)$ экспоненциальна: $g(u) = e^{-\gamma u}$. В этом случае зависимость от начального момента входит лишь через параметр τ_0 , а для полубесконечной среды вообще отсутствует.

В [90] рассмотрен такой закон изменения оптических глубин в полубесконечной одномерной среде при $\gamma > 0$ и получено интегральное и дифференциальное уравнения для $P(\tau)$. Последнее решено методом определенных интегралов, а $p(\tau, t)$ и $\rho(t)$ найдены с точностью до линейных членов разложения по γ . Для $g(u) = 1 - e^{-\gamma u}$ была найдена также асимптотика коэффициента отражения $\rho(t, t')$, зависящего от моментов падения t' и отражения t фотона отдельно.

И. Н. Минин [91] рассмотрел уравнения для вероятности выхода фотона $p(\tau, t)$ и коэффициента отражения $\rho(t)$, также при $g(u) = e^{-\gamma u}$. Он вывел функциональное уравнение для преобразования Лапласа $\bar{p}(s)$ от $p(t)$ и решил его для некоторых частных случаев ($\gamma = \pm \lambda/2$, $\gamma = \pm \lambda/4$), что дало возможность найти для тех же случаев и $\rho(t)$. Затем [92] было показано, что $\bar{p}(\tau, s)$ получается из $P(\tau) = \bar{p}(\tau, 0)$ заменой λ на $\lambda/(1 + st_1)$ и γ на $\gamma/(1 + st_1)$; такова же связь $\bar{\rho}(s)$ и $\bar{\rho}(0)$. Тем же методом, что и в [90], в работе [92] найдена функция $P(\tau)$ и при $\gamma < 0$. Показано также, что при $\gamma = \pm \lambda/2n$, $n = 1, 2, \dots$ функция $\bar{p}(s)$ является дробно-рациональной и $\rho(t)$ можно найти в явном виде. При $\gamma = \pm \lambda/2$ получено выражение и для $p(\tau, t)$. Отмечено, что при $\lambda = 1$ и $\gamma < 0$ $\bar{p}(0) < 1$, то есть, если оптические глубины растут, то даже при чистом рассеянии не все фотоны выходят из среды.

Уравнения, определяющие коэффициент отражения трехмерной полубесконечной среды при $g(u) = e^{-\gamma u}$ и любых t_1 и t_2 и его преобразование Лапласа, получены из принципа инвариантности в [93]. Там же найдены рекуррентные соотношения для коэффициентов асимптотического разложения $\bar{p}$ по степеням s^{-1} .

В дальнейшем [94] были получены уравнения для вероятности выхода и коэффициентов отражения и пропускания одномерным конечным слоем при $t_2 = 0$ и произвольной функции $g(u)$. Подробно рассмотрены $g(u) = e^{-\gamma u}$ и полубесконечная среда, для которых найдены уравнения для преобразований Лапласа рассматриваемых величин.

3. *Нелинейные задачи.* Нелинейные нестационарные задачи, связанные с нахождением распространения возбуждения атомов резонансным излучением в линии с учетом отрицательного поглощения [95, 96], рассматривались Р. С. Варданием и Н. Б. Енгибаряном. Ими предложен алгоритм решения этих задач, сводящий их к легко, в принципе, решаемым интегральным уравнениям.

Некоторые нелинейные задачи решались методом линеаризации, например, в работах [97, 98], о которых мы скажем ниже.

6. *Некоторые приложения теории.* Хотя нестационарная теория переноса возникла и развивалась в связи с потребностями астрофизики, геофизики и нейтронной физики, многие ее результаты имеют пока чисто теоретический характер и не нашли применений. В этом разделе мы кратко перечислим те применения, которые уже были сделаны. Не будем касаться здесь переноса нейтронов, где нестационарные задачи имеют очевидное применение, а ограничимся астрофизикой и геофизикой.

1. *Свечение новых звезд.* Впервые нестационарную теорию излучения применил к интерпретации вспышек новых звезд В. В. Соболев [27, 2] (см. также [4, 8]). В одномерном приближении он нашел закон высвечивания горячих областей звезды после отрыва от нее оболочки. В [27] была оценена энергия высвечивания и отмечено, что она меньше энергии, которая выделяется при вспышке новой звезды согласно наблюдениям.

В [82] показано, что неоднородность атмосферы, заключающаяся в зависимости t_2 от τ , может изменить закон высвечивания лишь спустя годы после начала вспышки.

В [91] рассмотрена та же задача в предположении, что оптические глубины атмосферы уменьшаются (непрерывное истечение вещества). Был сделан качественный вывод об обусловленном этим сильным возрастании свечения звезды.

Подробно свечение новых в предмаксимальный период изучено в [99]. Непрерывное истечение вещества учитывалось допущением, что граница атмосферы движется вглубь, а часть кинетической энергии выбрасываемых газов переходит в излучение. Отмечено качественное согласие с наблюдениями.

2. *Свечение оболочек нестационарных звезд.* При объяснении свечения нестационарных звездных оболочек возникает несколько задач [4]. Одна из них — найти закон свечения оболочки, расширяющейся после отрыва ее от звезды при вспышке новой. Задача эта

существенно нестационарна, так как оптические свойства оболочки и источники излучения быстро меняются. Приближенно она была решена В. В. Соболевым [100]. Светимость оболочки определена как функция времени в предположении, что заданы зависимости от времени оптической толщины оболочки и мощности излучения звезды.

Другая задача — изменение со временем ионизации в оболочке. В [101, 102] ее решение было получено в предельных случаях малой [101] и большой [102] оптической толщины оболочки для L_* -излучения. Это дало возможность объяснить усиление свечения Новой Геркулеса 1934 г. после минимума.

Изменением ионизации в оболочках В. Г. Горбацкий объяснял появление узких линий поглощения в спектрах звезд Ве [103] (вследствие уменьшения мощности истечения вещества) и ярких линий водорода в спектрах долгопериодических переменных [104] (при прохождении ударной волны).

Уравнения, описывающие нестационарный перенос L_* -излучения в быстро расширяющейся оболочке в случае средних оптических толщин, были составлены в [105]. Там учитывалась также зависимость коэффициентов поглощения и излучения от частоты.

Можно указать еще задачу о свободном высвечивании оболочки, рассмотренную в [27, 2, 106].

3. Эффект отражения. Если на атмосферу падает поток излучения, то он может вызвать более или менее сильное возмущение ее. Когда поток сравнительно слабый, то увеличивается лишь светимость атмосферы. При сильных потоках повышается внутренняя температура атмосферы и изменяются ее оптические свойства. Рассмотрим сначала простой эффект отражения.

В одномерном приближении И. Н. Минин нашел закон свечения среды под действием периодической подсветки (при $\lambda = 1$, $t_0 = 0$ и $y = 0$). Он применил этот результат к нахождению влияния на кривую блеска системы излучения, которое отражается от холодного спутника, освещаемого периодически главной звездой при обращении [107]. Эффект отражения излучения вспышки в эруптивных звездах изучался в [45].

Свайхартом численно рассчитано изменение распределения температуры в атмосфере со временем после того, как она была освещена внешним потоком излучения [108]. Та же задача аналитически в одномерном приближении решена в [8].

В. П. Гринин [97] также в одномерном и сером приближениях составил уравнения, описывающие изменение температуры со временем,

когда на границе полубесконечной атмосферы находится источник излучения, переменной мощности. Источник настолько сильный, что его излучение вызывает изменение коэффициента поглощения и времени t_2 ($t_2 = 0$) вследствие изменений температуры. Методом линеаризации была найдена приближенная зависимость отклонений температуры и интенсивности излучения от невозмущенных значений.

4. *Затухание температурных возмущений.* Выравнивание температурных возмущений вследствие лучистого переноса энергии было впервые рассмотрено Шпигелем [109]. Линеаризацией уравнений он нашел, что закон затухания гармонической температурной флуктуации в бесконечной среде — экспоненциальный с показателем $-n(k)t + ikz$.

Время пролета фотонов t_2 учтено в работах [110, 98]. Там производилась линеаризация системы уравнений лучистого переноса в сером приближении и лучистой теплопроводности. Получено решение также в виде экспоненты. Дисперсионное уравнение, связывающее $n(k)$ и k , является обобщением найденного в [109]. Оба времени t_1 и t_2 учитывались в рамках серого приближения в [111]. Результаты применены к лучистому охлаждению межзвездного газа и к нахождению среднего времени пребывания фотона L в спикалах. В [112] принята во внимание и теплопроводность вещества.

5. *Нахождение интенсивности излучения в полосе поглощения.* Если излучение в неразрешенной полосе поглощения распространяется в однородной среде, то стационарную интенсивность его можно найти, проинтегрировав произведение функции пропускания полосы на интенсивность, соответствующую определенной длине пробега фотонов. Как уже говорилось, эта интенсивность есть решение нестационарной задачи при $t_1 = 0$. Для конкретного случая, когда функция пропускания представляется суммой экспонент, интенсивность излучения в полосе найдена в работах [113, 114].

Отметим кратко другие применения. Нестационарные уравнения, описывающие развитие звезды, составлены в [21]. Там же найдено среднее время выхода фотона из звезды. Изучалось свечение газа при прохождении ударной волны [115]. О передаче модулированных сигналов [46] упоминалось в разделе 3.

THEORY OF NONSTATIONARY TRANSFER
OF RADIATION

D. I. NAGIRNER

The fundamental directions of the theory of nonstationary transfer of radiation and their contemporary state are elucidated. Some applications of this theory to astrophysics are stated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *S. Chandrasekhar*, Radiative Transfer, Oxford Univ. Press, London—N.-Y., 1959. (Русск. пер.: С. Чандрасекар. Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953).
2. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГИТТЛ, М., 1956.
3. *G. M. Wing*, An Introduction to Transport Theory. John Wiley and Sons, N.-Y.-London, 1962.
4. *В. Г. Горбачук, И. Н. Минин*, Нестационарные звезды, Физматгиз, М., 1963.
5. *R. E. Bellman, H. H. Kagiwada, R. Kalaba, M. C. Prestud*, Invariant Imbedding and Time-Dependent Transport Processes, Elsevier Publ. Co., N.-Y., 1964.
6. *K. M. Case, P. F. Zweifel*, Linear Transport Theory. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967. (Русск. пер.: К. Кейз, П. Цвайфель, Линейная теория переноса. Мир, М., 1972).
7. *M. M. R. Williams*, Mathematical Methods in Particle Transport Theory., Butterworths., London, 1971.
8. *И. Н. Минин*, в сб. "Теория звездных спектров", Наука, М., 1966.
9. *И. Н. Минин*, в сб. "Теоретические и прикладные проблемы рассеяния света", Наука и техника, Минск, 1971.
10. *Л. М. Романова*, в сб. "Теоретические и прикладные проблемы рассеяния света", Наука и техника, Минск, 1971.
11. *N. J. McCormick, I. Kušcer*, Adv. in Nuclear Sci. and Technology, 7, 181, 1973.
12. *C. Cercignani*, Mathematical Methods in Kinetic Theory, MacMillan, Milan, 1969. (Русск. пер.: К. Черчиньяни, Математические методы в кинетической теории газов, Мир, М., 1973).
13. *M. Kafatos*, Ar. J., 182, 433, 1973.
14. *А. Ф. Илларионов, Р. А. Сюняев*, Астрон. ж., 49, 58, 1972; 51, 698, 1974.
15. *G. Chapline, J. Stevens*, Ar. J., 184, 1041, 1973.
16. *В. А. Амбарцумян*, ДАН Арм.ССР, 8, 101, 1948.
17. *В. А. Амбарцумян*, Научные труды, т. I, Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1960.
18. *В. В. Соболев*, Астрофизика, 2, 135, 239, 1966; 3, 5, 137, 1967.
19. *E. H. Avrett, D. G. Hummer*, M.N., 130, 295, 1965.
20. *Д. И. Нагирнер*, Астрофизика, 8, 353, 1972.
21. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 37, 387, 1960.
22. *В. В. Иванов*, Астрофизика, 6, 643, 1970.
23. *K. T. Compton*, Phil. Mag., 45, 750, 1923.
24. *E. A. Milne*, J. Lond. Math. Soc., 1, 40, 1926.
25. *В. А. Фок*, Труды ГОИ, 4, вып. 34, 1926.

26. Б. И. Давыдов, ДАН СССР, 2, 474, 1935.
27. В. В. Соболев, Астрон. ж., 29, 406, 517, 1952.
28. И. Н. Минин, Вестн. ЛГУ, № 13, 137, 1959; № 19, 124, 1962.
29. A. D. Code, G. Eason, Ap. J., 159, 1029, 1041, 1970.
30. И. А. Кацев, Ж. прикл. спектр., 9, 969, 1968.
31. А. С. Монин, Изв. АН СССР, сер. геофиз., 234, 1955.
32. В. П. Гринин, Астрофизика, 7, 203, 1971.
33. Н. Б. Енибарян, Астрофизика, 1, 167, 1965.
34. И. Н. Минин, Астрон. ж., 48, 333, 1971.
35. G. M. Wing, J. Math. Mech. 7, 757, 1958.
36. R. E. Bellman, R. Kalaba, S. Ueno, J. Math. Analysis and Appl. 9, 424, 1964.
37. Л. М. Романова, Изв. АН СССР, сер. физ. атм. и океана, 1, 599, 1965; 2, 844, 1966.
38. И. А. Кацев, Ж. прикл. спектр., 11, 85, 1969.
39. I. Kušcer, P. F. Zweifel, J. Math. Phys. 6, 1125, 1965.
40. В. Ю. Теребиж, Астрофизика, 4, 141, 1968.
41. Э. П. Зеге, И. А. Кацев, Временные асимптотические решения уравнения переноса излучения и их применение, Ин-т физ. АН БССР, Минск, 1973.
42. N. Partrich, Nucl. Sci. Eng., 24, 307, 1966.
43. V. C. Boffi, T. Trombetti, Nuovo Cimento, B 47, 210, 1967.
44. И. Н. Минин, ДАН СССР, 154, 1059, 1964.
45. В. П. Гринин, Изв. КрАО, 43, 52, 1971.
46. И. А. Кацев, Изв. АН СССР, сер. физ. атм. и океана, 7, 212, 1971.
47. R. C. Erdmann, H. Lurie, Nucl. Sci. Eng., 28, 190, 198, 1967.
48. O. C. Baldonado, R. C. Erdmann, Trans. Amer. Nucl. Soc., 10, 589, 1967.
49. O. C. Baldonado, R. C. Erdmann, Jap. J. Appl. Phys., 8, 374, 1969.
50. Roger Van Norton, N.-Y. Univ. Report NYO-9085, 1960.
51. B. I. Bowden, C. D. Williams, J. Math. Phys., 5, 1527, 1964.
52. J. Lehner, G. M. Wing, Commun. of Pure and Appl. Math., 8, 217, 1955.
53. T. Mullikin, RAND Corporation Report P-2150, 1960.
54. В. В. Соболев, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
55. Л. М. Романова, Изв. АН СССР, сер. физ. атм. и океана, 5, 463, 1969.
56. Э. П. Зеге, И. А. Кацев, ДАН БССР, 13, 687, 1969.
57. W. M. Irvine, Ap. J., 144, 1140, 1966.
58. А. М. Гурфинк, С. Д. Гутшабаш, Изв. АН СССР, сер. физ. атм. и океана, 9, 255, 1973.
59. В. В. Иванов, С. Д. Гутшабаш, Изв. АН СССР, сер. физ. атм. и океана, 10, 851, 1974.
60. R. E. Bellman, R. Kalaba, S. Ueno, J. Math. Analysis and Appl., 7, 310, 1963.
61. Э. П. Зеге, И. А. Кацев, Изв. АН СССР, сер. физ. атм. и океана, 9, 945, 1972.
62. H. C. van de Hulst, W. M. Irvine, Mem. Soc. Roy. Sci. Liege, ser., 5, 7, 76, 1963.
63. В. В. Иванов, Астрофизика, 10, 193, 1974.
64. T. Holstein, Phys. Rev., 72, 1212, 1947.
65. Б. А. Векленко, ЖЭТФ, 36, 204, 1959.
66. Ю. Ю. Абрамов, А. П. Напартович, Астрофизика, 4, 195, 1968.
67. Д. И. Нагирнер, Астрофизика, 5, 31, 1969.
68. В. В. Иванов, Ш. А. Сабашвили, Astrophys. Space Sci., 17, 3, 1972.
69. В. В. Иванов, Ш. А. Сабашвили, Астрофизика, 9, 333, 1973.
70. H. Widom, Trans. Amer. Math. Soc., 100, 252, 1961.

71. А. М. Дыхне, А. П. Напартович, Перенос резонансного излучения в неоднородной плазме, ИАЭ-2026, М., 1970.
72. C. Van Trigt, Phys. Rev., 181, 97, 1969.
73. C. Van Trigt, J. Math. Phys., 14, 863, 1973.
74. T. Holstein, Phys. Rev., 83, 1159, 1951.
75. G. B. Field, Ap. J., 129, 551, 1959.
76. V. V. Ivanov, BAN, 19, 192, 1967.
77. S. Ueno, J. Math. Analysis and Appl., 4, 1, 1962.
78. S. Ueno, J. Math. Analysis and Appl., 11, 11, 1965.
79. T. K. Leong, K. K. Sel, M.N., 180, 21, 1972.
80. Н. Б. Ениббарян, Астрофизика, 2, 197, 1966.
81. И. Н. Минин, Астрофизика, 3, 345, 1967.
82. В. В. Леонов, Астрофизика, 3, 447, 1967.
83. R. W. Preissendorfer, Proc. Nat. Acad. Sci. Am., 44, 328, 1958.
84. С. А. Каплан, Астрон. ж., 39, 702, 1962.
85. R. E. Bellman, R. Kalaba, M. Wing, Proc. Nat. Acad. Sci. Am., 46, 128, 1960.
86. G. M. Wing, J. Math. and Mech., 11, 21, 1962.
87. С. А. Каплан, И. А. Климишин, В. Н. Сиверс, Астрон. ж., 37, 9, 1960.
88. С. А. Каплан, В. Н. Сиверс, Астрон. ж., 37, 824, 1960.
89. В. В. Леонов, Астрофизика, 6, 89, 1970.
90. В. Н. Сиверс, Укр. физ. ж., 10, 81, 1965.
91. И. Н. Минин, Астрофизика, 1, 173, 1965.
92. И. Н. Минин, Вестн. АГУ, № 19, 152, 1968.
93. Н. Б. Ениббарян, Астрофизика, 2, 267, 1966.
94. И. Н. Минин, Астрон. ж., 48, 333, 1971.
95. Р. С. Варданян, Н. Б. Ениббарян, Уч. зап. Ереванского ун-та, № 3 (109), 94, 1968.
96. Р. С. Варданян, Н. Б. Ениббарян, Астрофизика, 5, 203, 1969.
97. В. П. Гринин, Астрофизика, 7, 5, 1971.
98. F. Le Guel, Astron. Astrophys., 16, 356, 1972.
99. В. В. Леонов, Астрофизика, 5, 55, 1969.
100. В. В. Соболев, Астрон. ж., 31, 15, 1954.
101. W. Grotrian, Z. Astrophys., 13, 215, 1937.
102. В. В. Соболев, Астрон. ж., 27, 81, 1950.
103. В. Г. Горбачук, Астрон. ж., 31, 413, 1954.
104. В. Г. Горбачук, Астрон. ж., 38, 256, 1961.
105. Р. В. Воста, Astron. Astrophys., 21, 223, 1972.
106. В. Г. Горбачук, Вестн. АГУ, № 13, 178, 1957.
107. И. Н. Минин, Астрофизика, 1, 275, 1965.
108. T. Swthart, Ap. J., 139, 772, 1964.
109. E. A. Spiegel, Ap. J., 126, 202, 1957.
110. P. Delache, C. Froeschlé, Astron. Astrophys., 16, 348, 1972.
111. C. Froeschlé, Astron. Astrophys., 26, 229, 1973.
112. D. Anderson, Astron. Astrophys., 29, 23, 1973.
113. В. С. Малкова, Л. М. Романова, Изв. АН СССР, сер. физ. атм. и океана, 8, 763, 1972.
114. И. Н. Минин, Изв. АН СССР, сер. физ. атм. и океана, 9, 1316, 1973.
115. С. А. Каплан, И. А. Климишин, Астрон. ж., 37, 281, 1960.