АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 10 АВГУСТ, 1974 ВЫПУСК 3

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЗРЫВНОГО РАСПАДА ГРАВИТИРУЮЩИХ СИСТЕМ

Е. М. НЕЖИНСКИЙ

Поступила 14 февраля 1972
Пересмотрена 4 ноября 1973

В работе доказано, что в задаче n тел решения, описывающие одновременное столкновение или взрыв из одной точки, неустойчивы. Исследование ведется с небесно-механической точки зрения, т. е. считается, что при взрыве (столкновении) разлетаются (сталкиваются) материальные точки, между которыми действуют только гравитационные силы.

До недавнего времени астрономы, теоретики и наблюдатели, относительно мало внимания обращали на ядра галактик. Однако, по мере накопления наблюдательных данных, в ряде работ [1] все чаще появляется мысль о том, что значение ядер в галактиках недооценивалось. Например, по мнению В. А. Амбарцумяна, в ядрах происходят бурные процессы (истечение газа, эруптивные выбросы газовой материи и плазмы, взрывы, приводящие к расколу ядер на две или более сравнимые по величине части и т. п.), которые играют определяющую роль в образовании и эволюции галактик.

По-видимому, решение вопроса о том, какую функцию выполняют ядра в галактиках, еще далеко от завершения, но к нему можно приблизиться рассмотрением частных схем.

В этой работе мы попытались изучить взрывы, которые могут происходить в ядрах галактик или каких-либо других центрах конденсации материи. Задача рассмотрена с небесно-механической точки зрения, т. е. считается, что при взрыве разлетаются как бы материальные точки, между которыми действуют только гравитационные силы.

1. Введем следующие обозначения*: $\Sigma = \sum_{i=1}^{n}$; $\Sigma' = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}$; $\Sigma^* = \sum_{1\le j<i\le n}$; t — время; n — число частиц в системе; $\varkappa = 1$ — постоянная тяготения; ζ_i — вектор положения i-ой частицы, его задание равносильно заданию координат $(x_i,\ y_i,\ z_i)$; m_i — масса i-ой частицы; $\rho_{ik} = |\zeta_i - \zeta_k|$; $U = \Sigma^* \frac{m_j m_i}{\rho_{ij}}$ — силовая функция; $J = \Sigma\, m_i \zeta_i$ — момент инерции.

Замечание 1. В статье все вычисления будем производить в барицентрической системе координат, т. е. инерциальной системе координат с началом в центре масс.

Определение (см. также [2] § 355). В трехмерном эвклидовом пространстве n векторов ζ_i (см. замечание 1), определяющих положения n тел с массами $m_1, \ldots, m_n$, образуют центральную конфигурацию по отношению к этим телам, если сила, действующая на i-е тело в рассматриваемый фиксированный момент времени, пропорциональна массе m_i и вектору ζ_i, т. е. если

$$U_{\zeta_i} = \sigma m_i \zeta_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

причем скаляр $\sigma = -U/J$ и не зависит от i.

Замечание 2. Будем считать две центральные конфигурации по отношению к одним и тем же массам одинаковыми, если одна переходит в другую при соответствующем изменении единицы масштаба.

Замечание 3. Очевидно, что понятие центральной конфигурации не связано с ориентацией барицентрической системы координат.

В [2] показано, что перед одновременным столкновением и сразу после взрыва частицы образуют центральные конфигурации. В статье мы рассмотрим, устойчива ли форма этих конфигураций перед столкновением (см. ниже разделе 4) и после взрыва (см. ниже разделы 6—10).

2. Если во все барицентрические координаты частиц, образующих центральную конфигурацию перед столкновением (сразу после взрыва), ввести множитель $(t - t_0)^{-2/3}$ (t_0 — момент столкновения), то новые координаты в окрестности $t_0 = 0$

$$\xi_i = t^{-2/3} \zeta_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

* Эти обозначения такие же, как в книге А. Уинтера [2] (гл. V).

не меняются (см. [2]). Произведем, кроме того, следующую замену переменной t

$$\mathbf{t} = -\ln t \tag{1'}$$

(ясно, что $\mathbf{t} \to +\infty$ при $t \to 0$ и $t = \exp(-\mathbf{t})$. Тогда

$$t f' = -\dot{f}, \qquad t^2 f'' = \ddot{f} + \dot{f}, \tag{2}$$

где штрихами и точками обозначены производные по t и $\mathbf{t}$ соответственно, а f — произвольная, дважды дифференцируемая функция.

С помощью формул (2) легко установить (см. [2]), что уравнения движения

$$m_i \zeta_i'' = U_{\zeta_i}, \quad i = 1, \ldots, n$$

в новых переменных (1), (1′) можно переписать

$$m_i \left(\ddot{\zeta}_i - \frac{1}{3} \dot{\zeta}_i - \frac{2}{9} \zeta_i \right) = U_{\zeta_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

где $$U = \Sigma^* \frac{m_i m_j}{\rho_{ij}}, \qquad \rho_{ij} = |\zeta_i - \zeta_j|, \quad U = t^{2/3} U, \qquad U_{\zeta_i} = t^{4/3} U_{\zeta_i}.$$

3. В момент $\mathbf{t}_0$ на центральную конфигурацию

$$\zeta_i = \text{const}, \quad i = 1, \ldots, n$$

(где $\zeta_i = \text{const}$, $i = 1, \ldots, n$ — частное решение уравнений (3) (см. [2])) наложим небольшое возмущение

$$\zeta_i + \Delta\zeta_i = (x_i + \alpha_i, \quad y_i + \beta_i, \quad z_i + \gamma_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда из уравнений движения (3), сохраняя члены первого порядка малости, получим уравнения возмущенного движения в первом приближении, или уравнения в вариациях

$$\left| \begin{aligned} \ddot{\alpha}_i - \frac{\dot{\alpha}_i}{3} - \frac{2}{9}\alpha_i &= \sum_{j=1}^{n}{}' \frac{m_j}{\rho_{ij}^3} [(\alpha_j - \alpha_i) - 3(x_j - x_i) d_{ij}], \\ \ddot{\beta}_i - \frac{\dot{\beta}_i}{3} - \frac{2}{9}\beta_i &= \sum_{j=1}^{n}{}' \frac{m_j}{\rho_{ij}^3} [(\beta_j - \beta_i) - 3(y_j - y_i) d_{ij}], \\ \ddot{\gamma}_i - \frac{\dot{\gamma}_i}{3} - \frac{2}{9}\gamma_i &= \sum_{j=1}^{n}{}' \frac{m_j}{\rho_{ij}^3} [(\gamma_j - \gamma_i) - 3(z_j - z_i) d_{ij}], \end{aligned} \right. \tag{4}$$

где $i = 1, \ldots, n$,

$$d_{ij} = \frac{(x_j - x_i)(\alpha_j - \alpha_i) + (y_j - y_i)(\beta_j - \beta_i) + (z_j - z_i)(\gamma_j - \gamma_i)}{\rho_{ij}^2}.$$

Если ввести новые переменные

$$\varkappa_i = \sqrt{m_i}\,\alpha_i, \qquad \varkappa_{i+n} = \sqrt{m_i}\,\beta_i, \qquad \varkappa_{i+2n} = \sqrt{m_i}\,\gamma_i, \quad (i = 1, \dots, n), \tag{5}$$

систему (4) можно переписать

$$\ddot{\varkappa}_i + \sum_{j=1}^{3n} a_{ij}\varkappa_j = \frac{1}{3}\dot{\varkappa}_i, \quad i = 1, \dots, 3n, \tag{6}$$

где

$$a_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{2}{9} + \sum\limits_{l=1}^{n}{}' \dfrac{m_l}{\rho_{li}^3}\left[1 - 3\dfrac{(x_l - x_i)^2}{\rho_{li}^2}\right] & \text{при } 1 \leqslant i = j \leqslant n \\ -\dfrac{2}{9} + \sum\limits_{l=1}^{n}{}' \dfrac{m_l}{\rho_{lu}^3}\left[1 - 3\dfrac{(y_l - y_u)^2}{\rho_{lu}^2}\right] & n < i = j \leqslant 2n, \\ & u = i - n \\ -\dfrac{2}{9} + \sum\limits_{l=1}^{n}{}' \dfrac{m_l}{\rho_{lv}^3}\left[1 - 3\dfrac{(z_l - z_v)^2}{\rho_{lv}^2}\right] & 2n < i = j \leqslant 3n, \\ & v = i - 2n \\ -\dfrac{\sqrt{m_i m_j}}{\rho_{ij}^3}\left[1 - 3\dfrac{(x_j - x_i)^2}{\rho_{ij}^2}\right] & i \neq j,\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant n \\ -\dfrac{\sqrt{m_u m_t}}{\rho_{ut}^3}\left[1 - 3\dfrac{(y_t - y_u)^2}{\rho_{ut}^2}\right] & i \neq j,\ n < i,\ j \leqslant 2n, \\ & u = i - n,\ t = j - n \\ -\dfrac{\sqrt{m_v m_w}}{\rho_{vw}^3}\left[1 - 3\dfrac{(z_w - z_v)^2}{\rho_{vw}^2}\right] & i \neq j,\ 2n < i,\ j \leqslant 3n, \\ & v = i - 2n,\ w = j - 2n \\ \sum\limits_{l=1}^{n}{}' \dfrac{3m_l(x_l - x_i)(y_l - y_i)}{\rho_{il}^5} & 1 \leqslant i \leqslant n,\ j = i + n \\ 3\dfrac{\sqrt{m_i m_t}\,(x_t - x_i)(y_t - y_i)}{\rho_{it}^5} & i + n \neq j,\ 1 \leqslant i \leqslant n, \\ & n < j \leqslant 2n,\ t = j - n \\ \sum\limits_{l=1}^{n}{}' \dfrac{3m_l(x_l - x_i)(z_l - z_i)}{\rho_{il}^5} & 1 \leqslant i \leqslant n,\ j = i + 2n \\ 3\dfrac{\sqrt{m_i m_w}\,(x_w - x_i)(z_w - z_i)}{\rho_{wi}^5} & i + 2n \neq j,\ 1 \leqslant i \leqslant n, \\ & 2n < j \leqslant 3n,\ w = j - 2n \\ \sum\limits_{l=1}^{n}{}' \dfrac{3m_l(y_l - y_u)(z_l - z_u)}{\rho_{lu}^5} & n < i \leqslant 2n,\ j = i + n, \\ & u = i - n \\ 3\dfrac{\sqrt{m_u m_w}\,(y_w - y_u)(z_w - z_u)}{\rho_{uw}^5} & i + n \neq j,\ n < i \leqslant 2n, \\ & 2n < j \leqslant 3n,\ u = i - n,\ w = j - 2n. \end{cases} \tag{7}$$

причем $a_{ij} = a_{ji}$.

Запишем (6) в векторном виде

$$\ddot{\varkappa} + A\varkappa = \frac{1}{3}\dot{\varkappa}.$$

Произведем в этом уравнении неособенное линейное преобразование $\varkappa = D\tau$, приводящее матрицу A к диагональному виду, т. е. $D^{-1}AD = \Lambda$, где Λ — диагональная матрица,

$$\ddot{\tau} + \Lambda\tau - \frac{1}{3}\dot{\tau} = 0,$$

или, что то же,

$$\ddot{\tau}_i + \lambda_i\tau_i - \frac{1}{3}\dot{\tau}_i = 0, \quad i = 1, \dots, 3n. \tag{8}$$

4. Изучим устойчивость произвольной центральной конфигурации перед столкновением (т. е. при $t \to \infty$). Уравнения в вариациях (4), как показано в раделе 3, могут быть приведены к виду (8).

Используем спектральный анализ. Пусть $\tau_i = r_i e^{\omega_i t}$. Тогда из уравнений (8) получим дисперсионные уравнения

$$\omega_i^2 - \frac{1}{3}\omega_i + \lambda_i = 0, \quad i = 1, \dots, 3n. \tag{9}$$

По теореме Виета $\omega_{i_1} + \omega_{i_2} = 1/3$, следовательно, хотя бы одна из частот (скажем ω_{i_1}) будет иметь $\mathrm{Re}\,\omega_{i_1} \geqslant 1/6$ и даст неустойчивое решение. То есть перед столкновением пространственная центральная конфигурация, состоящая из n частиц, имеет по крайней мере $3n$ неустойчивых частот. Итак, можно сделать вывод, что в данном случае конфигурация расползается. (Это нетрудно видеть даже на примере столкновения двух тел).

5. Теперь обсудим более подробно, всегда ли найденные неустойчивые частоты указывают на неустойчивость формы центральной конфигурации.

В самом деле, неустойчивая частота может возникнуть, скажем, из-за смещения начала координат.* Поэтому необходимо предваритель-

* Если сместить начало инерциальной системы координат таким образом, чтобы центр масс центральной конфигурации имел координаты $(a + bt, 0, 0)$, то при переходе к переменным (1) появится формальная неустойчивая частота, так как (см. (1), (1′)) $a = t^{-2/3}a + t^{1/3}b$, $t = e^{-t}$, $t \to +\infty$, $a = e^{2/3t}a + e^{-1/3t}b$.

но исключить из рассмотрения возмущения, сохраняющие форму системы, но приводящие к появлению неустойчивых частот. К таким возмущениям следует отнести: 1) возмущения, приводящие к твердотельному сдвигу системы относительно выбранного начала координат, 2) возмущения, приводящие к изменению только размеров системы, но не ее формы.

Если же после исключения таких возмущений останется неустойчивая частота ω, то форма системы неустойчива, так как хотя бы для одной совокупности индексов i, j

$$\rho_{ij} - (\rho_{ij})_{t=t_0} \sim e^{\omega(t-t_0)}, \tag{10}$$

где t_0 — момент, в который на центральную конфигурацию наложили возмущение.

Рассматриваемые динамические системы — системы обратимого типа, поэтому, если при столкновении имеются устойчивые частоты, то при разлете они превращаются в неустойчивые и наоборот. Действительно, как видно из (10), при столкновении ω — устойчивая частота, если $\operatorname{Re}\omega < 0$ $(t \to \infty)$, при разлете $t_0 \to \infty$ и частота ω становится неустойчивой.

6. Перейдем к рассмотрению центральных конфигураций, образующихся при взрыве.

Из дисперсионных уравнений (9) получим

$$\omega_{i_{1,2}} = \frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} - \lambda_i}\,. \tag{11}$$

Отсюда видно, что если $\lambda_i \geqslant 0$, то $\operatorname{Re}\omega_{i_{1,2}} \geqslant 0$, и для рассматриваемых нами конфигураций (см. последнее замечание в разделе 5) частоты $\omega_{i_{1,2}}$ устойчивы; при $\lambda_i < 0$ ω_{i_2} — неустойчивая частота.

Следовательно, для выяснения устойчивости конфигурации, образующейся при взрыве, необходимо исследовать знаки λ_i. С этой целью и рассмотрим квадратичную форму $\sum\limits_{i=1}^{3n}\sum\limits_{j=1}^{3n} a_{ij}x_i x_j$.

7. Учитывая замечания, сделанные в разделе 5, исключим возмущения, приводящие к сдвигу центра масс (т. е. возмущения, приводящие к сдвигу системы как целого); иначе говоря, наложим на возмущения линейные связи

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \beta_i m_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \gamma_i m_i = 0,$$

или в новых переменных (5)

$$\sum_{i=1}^{n} \varkappa_i \sqrt{m_i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} \varkappa_{i+n} \sqrt{m_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \varkappa_{i+2n} \sqrt{m_i} = 0. \qquad (12)$$

Линейные условия (12) наложены на переменные, входящие в квадратичную форму $\sum_{i=1}^{3n} \sum_{j=1}^{3n} a_{ij} \varkappa_i \varkappa_j$. Зная матрицу коэффициентов этой квадратичной формы (см. (7)), найдем 3 ее собственных вектора и собственных значения ($\delta^{(j)}$ — собственный вектор, соответствующий λ_j. Собственные векторы нормированы, т. е. $\sum_{i=1}^{3n} \delta_i^{(j)2} = 1$):

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2/9,$$

$$\begin{cases} \delta_i^{(1)} = \dfrac{\sqrt{m_i}}{\sqrt{\Sigma m_j}}, & i = 1, \ldots, n, \\ \delta_i^{(1)} = 0, & i = n+1, \ldots, 3n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta_i^{(2)} = \dfrac{\sqrt{m_{i-n}}}{\sqrt{\Sigma m_j}}, & i = n+1, \ldots, 2n, \\ \delta_i^{(2)} = 0, & i = 1, \ldots, n, \ 2n+1, \ldots, 3n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta_i^{(3)} = \dfrac{\sqrt{m_{i-2n}}}{\sqrt{\Sigma m_j}}, & i = 2n+1, \ldots, 3n, \\ \delta_i^{(3)} = 0, & i = 1, \ldots, 2n. \end{cases}$$

Теперь запишем квадратичную форму в виде

$$\sum_{i=1}^{3n} \sum_{j=1}^{3n} g_{ij} \varkappa_i \varkappa_j = \frac{2}{9} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{m_i}\, \varkappa_i}{\sqrt{\Sigma m_j}} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{m_i}\, \varkappa_{i+n}}{\sqrt{\Sigma m_j}} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{m_i}\, \varkappa_{i+2n}}{\sqrt{\Sigma m_j}} \right)^2 \right] + \sum_{i=1}^{3n} \sum_{j=1}^{3n} a_{ij} \varkappa_i \varkappa_j. \qquad (13)$$

В силу линейных связей (12) выражения в квадратных скобках (13) равны нулю. Будем искать отрицательные характеристические числа μ_l формы $\sum_{i=1}^{3n} \sum_{j=1}^{3n} g_{ij} \varkappa_i \varkappa_j$ вместо характеристических чисел λ_l формы $\sum_{i=1}^{3n} \sum_{j=1}^{3n} a_{ij} \varkappa_i \varkappa_j$, при этом ясно [3], что $\lambda_l = \mu_{l-3}$ при $3 < l \leqslant 3n$. Наконец, отметим, что для доказательства неустойчивости формы конфигурации, образовавшейся после взрыва, осталось найти (см. раздел 5) только 2 отрицательных характеристических числа ($\mu_1 < 0$, $\mu_2 < 0$) формы $\sum_{i=1}^{3n} \sum_{j=1}^{3n} g_{ij} x_i x_j$.

8. Теперь осуществим перенумерацию частиц таким образом, чтобы расстояние между первой и второй частицами (ρ_{12}) было максимальным. Кроме того, ориентацию барицентрической системы координат выберем так, чтобы ось x была параллельна прямой, проходящей через точки 1 и 2. Тогда $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$. Характеристическое уравнение для (13) в этом случае имеет вид (см. также (7))

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} g_{11} - \mu & g_{12} \cdots g_{1,3n} \\ \cdots & \cdots \\ g_{3n,1} & g_{3n,2} \cdots g_{3n,3n} - \mu \end{vmatrix} = A^{*} \tag{14}$$

9. Введем новые обозначения

$$b_{ii} = a_{ii} + \frac{2}{9}, \quad i = 1, \ldots, 3n. \tag{15}$$

В силу (13)

$$b_{ii} = g_{ii} + \frac{2}{9} \Sigma' m_j (\Sigma m_j)^{-1 **}, \quad i = 1, \ldots, 3n. \tag{15'}$$

В дальнейшем нам потребуются следующие леммы;

Лемма 1. $b_{ii} + b_{i+n,i+n} + b_{i+2n,i+2n} = 0$, $i = 1, \ldots, n$ (или, если учесть (15′), то $g_{ii} + g_{i+n,i+n} + g_{i+2n,i+2n} < 0$, $i = 1, \ldots, n$).

Доказательство очевидно (см. (15), (7)).

Лемма 2. Если для какого-либо i ($i = 1, \ldots, n$) $b_{ii} > 0$, то существует такой поворот системы координат (x, y, z) вокруг оси x***, что $b_{i+n,i+n} < 0$, $b_{i+2n,i+2n} < 0$.

Доказательство.

По предыдущей лемме $b_{ii} + b_{i+n,i+n} + b_{i+2n,i+2n} = 0$. Так как, кроме того, $b_{ii} > 0$, то возможны 3 случая: 1) $b_{i+n,i+n} < 0$, $b_{i+2n,i+2n} < 0$, что и утверждалось в лемме. 2) $b_{i+n,i+n} < 0$, $b_{i+2n,i+2n} > 0$.

---

* См. Приложение.

** То есть в сумме $\Sigma' m_j$ пропускается член с номером $j \equiv i \pmod n$.

*** Начало координат и направление оси x фиксированы (см. р. 8).

Если в этом случае повернуть систему координат (x, y, z) вокруг оси x на $\pi/2$, то

$$b_{i+n,\, i+n} \geqslant 0, \quad b_{i+2n,\, i+2n} < 0,$$

так как (см. (7)) при таком повороте все координаты x_i останутся теми же, а y_i и z_i меняются местами. Из (7) также видно, что функции $b_{i+n,\, i+n}$, $b_{i+2n,\, i+2n}$ непрерывно зависят от поворота осей y и z вокруг оси x. Сумма этих функций (см. лемму 1) отрицательна $(b_{i+n,\, i+n} + b_{i+2n,\, i+2n} = -b_{ii} = \text{const} < 0)$. Следовательно существуют такие положения осей y и z, при которых $b_{i+n,\, i+n} < 0$, $b_{i+2n,\, i+2n} < 0$.
3) $b_{i+n,\, i+n} \geqslant 0$, $b_{i+2n,\, i+2n} < 0$. Доказательство аналогично 2).

Лемма 3. Для центральных конфигураций, образовавшихся после взрыва,

$$\frac{2}{9}(\Sigma m_j)^{-1} \geqslant \rho_{12}^{-3},$$

где $\rho_{12} = \max\{\rho_{ij}\}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $n > 2$.

Доказательство.

Для центральных конфигураций (сразу после взрыва) верно следующее равенство ([2], § 365а).

$$\frac{2}{9}(\Sigma m_j)^{-1} = (\Sigma^* m_i m_j \rho_{ij}^{-1}) \cdot (\Sigma^* m_i m_j \rho_{ij}^2)^{-1}, \tag{16}$$

если $\rho_{12} = \max\{\rho_{ij}\}$, то из (16)

$$(\Sigma^* m_i m_j \rho_{ij}^{-1})(\Sigma^* m_i m_j \rho_{ij}^2)^{-1} \geqslant \rho_{12}^{-3}.$$

10. *Теорема.* Для квадратичной формы (13) $(n > 2)$ всегда можно найти по крайней мере 2 отрицательных характеристических числа $(\mu_1 < 0,\ \mu_2 < 0)$.

Доказательство.

Из леммы 1 следует, что для каждого i $(i = 1, \ldots, n)$ по крайней мере одно из g_{ii}, $g_{i+n,\, i+n}$, $g_{i+2n,\, i+2n}$ меньше нуля.

Система координат (x, y, z) (см. 8) выбрана таким образом, что фиксировано только направление оси x. Поэтому, если b_{11} (или b_{22}) > 0, то (по лемме 2) всегда можно поворотом системы координат (x, y, z) вокруг оси x добиться того, чтобы и $g_{n+1,\, n+1}$ и $g_{2n+1,\, 2n+1}$ (или и $g_{n+2,\, n+2}$ и $g_{2n+2,\, 2n+2}$) были одновременно меньше нуля.

Из (14) видно, что если какие-либо два из g_{11}, $g_{n+1,\,n+1}$, $g_{2n+1,\,2n+1}$ или из g_{22}, $g_{n+2,\,n+2}$, $g_{2n+2,\,2n+2}$ меньше нуля, то

$$C_1 < 0, \quad C_2 > 0,$$

где C_1 и C_2 — главные миноры первого и второго порядка соответственно*.

Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда $b_{11} < 0$, $b_{22} < 0$, $g_{n+1,\,n+1} > 0$, $g_{2n+1,\,2n+1} > 0$, $g_{n+2,\,n+2} > 0$, $g_{2n+2,\,2n+2} > 0$. Действительно, пусть

$$C_1 = g_{11} < b_{11} < 0,$$

$$C_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}.$$

Оценим C_2. Из того, что $g_{n+1,\,n+1} > 0$, $g_{2n+1,\,2n+1} > 0$, следует $b_{11} < -\frac{4}{9}\sum\limits_{j \neq 1}{}' m_j(\Sigma m_j)^{-1}$. Аналогично $b_{22} < -\frac{4}{9}\sum\limits_{j \neq 2}{}' m_j(\Sigma m_j)^{-1}$. Отсюда $|g_{11}| > \frac{2}{3}\sum\limits_{j \neq 1}{}' m_j(\Sigma m_j)^{-1}$, $|g_{22}| > \frac{2}{3}\sum\limits_{j \neq 2}{}' m_j(\Sigma m_j)^{-1}$. Для $g_{12} (= g_{21})$ по лемме 3 можно дать следующую оценку:

$$g_{12} = \frac{2}{9}\sqrt{m_1 m_2}(\Sigma m_j)^{-1} + 2\sqrt{m_1 m_2}\rho_{12}^{-3} \leqslant \frac{2}{3}\sqrt{m_1 m_2}(\Sigma m_j)^{-1}.$$

Тогда

$$C_2 \geqslant \begin{vmatrix} -\frac{2}{3}\sum\limits_{j \neq 1}{}' m_j(\Sigma m_j)^{-1} & \frac{2}{3}\sqrt{m_1 m_2}(\Sigma m_j)^{-1} \\ \frac{2}{3}\sqrt{m_1 m_2}(\Sigma m_j)^{-1} & -\frac{2}{3}\sum\limits_{j \neq 2}{}' m_j(\Sigma m_j)^{-1} \end{vmatrix} > 0.$$

Следовательно, всегда можно найти $\mu_1 = C_1 < 0$, $\mu_2 = \frac{C_2}{C_1} < 0$ [4].

---

* Действительно, пусть, например, $g_{11} < 0$, $g_{n+1,\,n+1} < 0$. Тогда (см. лемму 1) хотя бы одно из g_{22}, $g_{n+2,\,n+2}$, $g_{2n+2,\,2n+2}$ меньше нуля и (см. 14).

$$C_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{n+2,\,n+2} \end{vmatrix} > 0, \text{ если } g_{n+2,\,n+2} < 0; \quad C_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{2n+2,\,2n+2} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\text{если } g_{2n+2,\,2n+2} < 0; \quad C_2 = \begin{vmatrix} g_{22} & 0 \\ 0 & g_{n+1,\,n+1} \end{vmatrix} > 0, \text{ если } g_{22} < 0.$$

Выводы. Итак, на основе результатов, полученных в этой работе, можно сделать следующие выводы. Центральные конфигурации, то есть конфигурации, образованные частицами непосредственно перед столкновением или сразу после взрыва, неустойчивы, форма их со временем искажается. Этот факт носит достаточно общий характер и, повидимому, является одной из основных причин, вызывающих трудности при решении задачи n тел ($n > 2$). Так как в окрестности точки столкновения (или в окрестности точки взрыва) гравитационное поле обладает слишком большой неоднородностью, даже малые возмущения вблизи особой точки радикальным образом меняют траектории частиц.

Намечается еще один своеобразный вывод. При взрыве движение частиц определяется силой $F_i = \varepsilon m_i r_i$, т. е. подчинено обобщенному закону Гука. Иначе говоря, дискретная система продолжает в какой-то форме сохранять свойства непрерывной среды, однако в новых условиях (система дискретна) эти свойства неустойчивы, и суммарный закон сил очень быстро становится другим.

Теперь посмотрим, какие приложения полученные результаты имеют для звездных систем. Представим себе, что в ядре галактики происходит взрыв. Тогда разлетающиеся частицы образуют конфигурацию, близкую к центральной. Небольшие (всегда имеющие место) возмущения быстро исказят эту конфигурацию, и мы, изучая скорости и координаты образовавшихся осколков, уже не сможем восстановить первоначальную картину. Аналогичные рассуждения имеют место и в том случае, когда в результате взрыва образуется система галактик.

В заключение я хотел бы выразить благодарность кандитату физико-математических наук В. А. Антонову за руководство данной работой.

Институт теоретической астрономии
АН СССР

STUDY OF THE PROCESS OF AN EXPLOSIVE DISINTEGRATION OF SELF-GRAVITATING SYSTEMS

E. M. NEZHINSKI

The solutions of the n-body problem corresponding to simultaneous collision of all n bodies or to a situation arising immediately after the explosion are shown to be unstable. It is supposed that the system of n ($\geqslant 2$) particles moves in accordance with Newton's law of gravitation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян,* Проблемы эволюции вселенной, Изд-во АН Арм.ССР, Ереван, 1968.
2. *А. Уинтнер,* Аналитические основы небесной механики, Наука, М., 1967.
3. *Р. Курант, Д. Гильберт,* Методы математической физики, 1, Гостехиздат, М.-Л., 1951.
4. *И. М. Бабаков,* Теория колебаний, Наука, М., 1965.

$$
= \left| \begin{array}{ccc}
\sum'_{j\neq 1} \frac{m_j}{\rho_{1j}^3}\left[1-3\frac{(x_j-x_1)^2}{\rho_{1j}^2}\right] - \frac{2}{9}\sum'_{j\neq 1} m_j(\Sigma m_j)^{-1} - \mu & \frac{2}{9}\frac{\sqrt{m_1 m_2}}{\Sigma m_j} + 2\frac{\sqrt{m_1 m_2}}{\rho_{12}^3} \cdots & g_{1,\,n+1} \\
\frac{2}{9}\frac{\sqrt{m_1 m_2}}{\Sigma m_j} + 2\frac{\sqrt{m_1 m_2}}{\rho_{12}^3} & \sum'_{j\neq 2} \frac{m_j}{\rho_{2j}^3}\left[1-3\frac{(x_j-x_2)^2}{\rho_{2j}^2}\right] - \frac{2}{9}\sum'_{j\neq 2} m_j(\Sigma m_j)^{-1} - \mu \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
g_{n+1,\,1} & 0 \cdots & \sum'_{j\neq 1} \frac{m_j}{\rho_{1j}^3}\left[1-3\frac{(y_j-y_1)^2}{\rho_{1j}^2}\right. - \frac{2}{9}\sum'_{j\neq 1} m_j(\Sigma m_j)^{-1} - \\
0 & g_{n+2,\,2} \cdots & g_{n+2,\,n+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
g_{2n+1,\,1} & 0 \cdots & g_{2n+1,\,n+1} \\
0 & g_{2n+2,\,2} \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots
\end{array} \right.
$$

$$
\begin{array}{ccc|}
0 \quad \cdots & g_{1,\,2n+1} & 0 \quad \cdots \\
 & & \\
g_{2,\,n+2} \cdots & 0 & g_{2,\,2n+2} \cdots \\
\multicolumn{3}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
g_{n+1,\,n+2} \cdots & g_{n+1,\,2n+1} & 0 \quad \cdots \\
 & & \\
\begin{array}{l} \sum\limits_{j\neq 2}' \dfrac{m_j}{\rho_{2j}^3}\left[1-3\,\dfrac{(y_j-y_2)^2}{\rho_{2j}^2}\right]- \\ -\dfrac{2}{9}\sum\limits_{j\neq 2}' m_j(\Sigma m_j)^{-1}-\mu \quad \cdots \end{array} & 0 & g_{n+2,\,2n+2} \cdots \\
\multicolumn{3}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
0 \quad \cdots & \begin{array}{l} \sum\limits_{j\neq 1}' \dfrac{m_j}{\rho_{1j}^3}\left[1-3\,\dfrac{(z_j-z_1)^2}{\rho_{1j}^2}\right]- \\ -\dfrac{2}{9}\sum\limits_{j\neq 1}' (m_j(\Sigma m_j)^{-1}-\mu \end{array} & g_{2n+1,\,2n+2} \cdots \\
 & & \\
g_{2n+2,\,n+2} \cdots & g_{2n+2,\,2n+1} & \begin{array}{l} \sum\limits_{j\neq 2}' \dfrac{m_j}{\rho_{2j}^3}\left[1-3\,\dfrac{(z_j-z_2)^2}{\rho_{2j}^2}\right]- \\ -\dfrac{2}{9}\sum\limits_{j\neq 2}' m_j(\Sigma m_j)^{-1}-\mu \quad \cdots \end{array} \\
\multicolumn{3}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}
\tag{1.1}
$$