

# АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

# АСТРОФИЗИКА

ТОМ 10

АВГУСТ, 1974

ВЫПУСК 3

## ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ В УСЛОВИЯХ ЛОКАЛЬНОГО ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

В. Н. САЗОНОВ

Поступила 10 декабря 1973

Пересмотрена 8 апреля 1974

Показано, что система уравнений переноса для параметров Стокса поляризованного излучения распадается на независимые уравнения после перехода к базису, состоящему из некоторых характерных для данной среды векторов поляризации, которые предлагается называть переносными поляризациями. Переносные поляризации, вообще говоря, не совпадают с нормальными поляризациями данной среды, так как они ортогональны нормальным поляризациям. Получено решение уравнений в базисе из переносных поляризаций. Это решение используется для исследования поляризации в линии поглощения, которая сильно расщеплена из-за эффекта Зеемана.

В данной работе мы покажем, каким образом систему зацепляющихся уравнений переноса для параметров Стокса поляризованного излучения можно свести к четырем независимым уравнениям, которые легко решаются (разделы 1, 2, 3). В разделе 4 дается простая интерпретация полученных результатов. В разделе 5 развитый выше способ решения применяется для исследования поляризации в линии поглощения, сильно расщепленной из-за эффекта Зеемана.

1. Генерация и перенос излучения в изотропной среде описывается уравнением

$$\frac{dI}{ds} = \epsilon - \mu I, \quad (1)$$

где  $I(r, n, \omega)$  — интенсивность излучения, зависящая от частоты  $\omega$ , направления распространения  $n$  и радиус-вектора  $r$ ,  $\epsilon(r, \omega)$  — излучательная способность среды,  $\mu(r, \omega)$  — коэффициент поглощения;

$d/ds$  — производная вдоль луча зрения (см., например [1]). В условиях локального термодинамического равновесия (ЛТР)  $\varepsilon = \mu B^{(\omega)}, T(r)$ , где  $B$  — универсальная планковская функция,  $T(r)$  — локальная температура.

В анизотропной среде излучение будет, вообще говоря, поляризованным. Поляризованное излучение характеризуется четырьмя параметрами Стокса  $I, Q, U, V$  [2]. Следующие комбинации параметров Стокса

$$I_{ik} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + Q & U - iV \\ U + iV & I - Q \end{pmatrix}$$

образуют тензор по отношению к преобразованию осей в плоскости, перпендикулярной лучу зрения. По аналогии с (1) можно сразу написать уравнение

$$\frac{d}{ds} I_{ik} = E_{ik} - M_{iklm} I_{lm}. \quad (2)$$

Здесь и далее индексы  $i, k, l, m$  пробегает значения 1, 2. По дважды повторяющимся латинским индексам производится суммирование. Как показано в [3], тензор  $M_{iklm}$  выражается через тензор второго ранга  $T_{ik}$ :

$$M_{iklm} = -\frac{i}{2} [T_{il} \delta_{km} - T_{km}^* \delta_{il}], \quad (3)$$

причем

$$T_{ik} = \frac{\omega}{c} (\varepsilon_{ik} - \delta_{ik}),$$

где  $\varepsilon_{ik}$  — тензор диэлектрической проницаемости среды,  $i, k = 1, 2$ , ось 3 декартовой системы координат направлена на наблюдателя; подразумевается, что  $(c/\omega) |T_{ik}| \ll 1$ . Мы будем называть  $T_{ik}$  тензором переноса.

Тензор  $E_{ik}$ , характеризующий излучательную способность среды, в условиях ЛТР найдем, положив при ЛТР

$$I_{ik}^{th} = \frac{B}{2} \delta_{ik}, \quad \frac{d}{ds} I_{ik}^{th} = 0.$$

Из (3) и (2) тогда получим

$$E_{ik} = \frac{-iB}{4} [T_{ik} - T_{ki}^*] \quad (4a)$$

Итак,

$$\frac{d}{ds} I_{ik} = E_{ik} + \frac{i}{2} [T_{ii} I_{ik} - T_{ki} I_{ii}]. \quad (46)$$

Наша задача — свести систему (4) к четырем независимым уравнениям типа (1).

2. С этой целью напомним некоторые электродинамические свойства однородной анизотропной среды. Будем искать электрическое поле в виде плоской волны  $E_i = E_0 \operatorname{Re} e_i \exp[-i\omega t + ikr]$ . Из уравнений Максвелла следует, что волна может распространяться без изменения своей поляризации, если

$$\left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ik}(\omega, k) - k^2 \delta_{ik} + k_i k_k \right] e_k = 0. \quad (5)$$

При заданном  $k$  задача (5) на собственные векторы  $e^z$  определяет закон дисперсии  $\omega^2(k)$  и векторы поляризации  $e^z$  так называемых нормальных волн. Здесь и далее верхние индексы без скобок отмечают различные решения задачи (5). Мы ограничимся высокочастотными волнами, которые можно считать поперечными ( $ke^z = 0$ ); как известно (см., например, [4]), существуют две такие волны, поэтому далее  $\alpha, \beta = 1, 2$ . По дважды повторяющимся греческим индексам суммирование не производится.

Когда  $(c/\omega) |T_{ik}| \ll 1$  уравнение (5) можно переписать в виде

$$T_{ik} e_k^\alpha = T^\alpha e_i^\alpha, \quad (6)$$

где  $T^\alpha = 2 \left( k - \frac{\omega^2}{c} \right)$ ;  $T_{ik} = T_{ik}(ck, k)$ . Векторы поляризации нормальных волн  $e^z$ , которые мы будем называть просто нормальными поляризациями, нормированы на единицу:  $e_i^\alpha e_i^{\alpha*} = 1$ .

Введем в рассмотрение векторы  $t^z$ , определяемые из условия

$$T_{ki} t_k^\alpha = u^\alpha t_i^\alpha. \quad (7)$$

Из (6) и (7) следует  $(u^\alpha - T^\alpha) e_i^\alpha t_i^{\alpha*} = 0$ . Если  $e_i^\alpha t_i^{\alpha*} \neq 0$ , что мы будем предполагать, то  $u^\alpha = T^\alpha$ .

Теперь из (6) и (7) следует  $(T^\alpha - T^\beta) e_i^\alpha t_i^{\beta*} = 0$ . Если  $T^\alpha \neq T^\beta$ , что мы будем предполагать, то  $e_i^\alpha t_i^{\beta*} = 0$  при  $\alpha \neq \beta$ . Нормируем  $t^z$  так, что

$$e_i^\alpha t_i^{\beta*} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (8)$$

Будем называть векторы  $t^z$  векторами переносных поляризаций или просто переносными поляризациями. Согласно (8) переносные

поляризации ортогональны нормальным. Если сами нормальные ортогональны друг другу, разница между переносными и нормальными поляризациями исчезает.

Нормальные поляризации могут быть не ортогональны, если тензор  $T_{ik}$  имеет как эрмитовскую, так и антиэрмитовскую часть, причем они сравнимы по величине.

Легко видеть, что

$$T_{ik} = \sum_n T^n e_i t_k^{n*} . \quad (9)$$

Заметим, что нормировка (8), вообще говоря, несовместима с нормировкой  $t_i^* t_i = 1$ .

3.1. Теперь вернемся к системе (4). Следуя [5], введем вместо тензора  $I_{ik}$  тензор  $I_{ik}^H$ :

$$I_{ik} = H_{il} I_{lm}^H H_{km}^* . \quad (10)$$

Из (10) и (4ε) получим уравнение для  $I_{ik}^H$

$$\frac{d}{ds} I_{ik}^H = E_{ik}^H + \frac{i}{2} [T_{il}^H I_{lm}^H - T_{ki}^{H*} I_{il}^H] , \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} E_{ik}^H &= H_{il}^{-1} E_{lm} H_{km}^{-1*} \\ T_{ik}^H &= H_{il}^{-1} T_{lm} H_{mk} + 2i H_{il}^{-1} \frac{d}{ds} H_{lk} \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть

$$H_{ik} = e_i^k, \quad H_{ik}^{-1} = t_k^i = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{pmatrix} . \quad (13)$$

Преобразование (10), (13) есть переход от декартова базиса к базису, состоящему из переносных поляризаций (см. раздел 4).

Предположим, что изменением  $H_{ik}$  по лучу зрения можно пренебречь. Тогда согласно (9), (10) и (12) тензор переноса в новом базисе  $T_{ik}^H$  будет диагональным

$$T_{ik}^H = \sum_n T^n \delta_{xi} \delta_{ok} = \begin{pmatrix} T^1 & 0 \\ 0 & T^2 \end{pmatrix} .$$

Для  $E_{ik}^H$  получим

$$E_{ik}^H = \frac{-iB}{4} \begin{bmatrix} (T^1 - T^{1*})(t_i^1 t_i^{1*}) & (T^1 - T^{2*})(t_i^1 t_i^2) \\ (T^{1*} - T^2)(t_i^1 t_i^{2*}) & (T^2 - T^{2*})(t_i^2 t_i^{2*}) \end{bmatrix}.$$

Из-за диагональности  $T_{ik}^H$  система (4) распадается на 4 независимых уравнения

$$\frac{d}{ds} I_{11}^H = E_{11}^H - \nu^1 I_{11}^H, \quad (14a)$$

$$\frac{d}{ds} I_{22}^H = E_{22}^H - \nu^2 I_{22}^H, \quad (14б)$$

$$\frac{d}{ds} I_{12}^H = E_{12}^H - \left( \frac{\nu^1 + \nu^2}{2} - i \frac{\nu^1 - \nu^2}{2} \right) I_{12}^H, \quad I_{21}^H = I_{12}^{H*}; \quad (14в)$$

где  $T^1 = \nu^1 + i\mu^1$ ,  $T^2 = \nu^2 + i\mu^2$ .

3.2. Все уравнения (14) переобозначением можно представить в виде

$$\cos \theta \frac{d}{dr} I^H = E - MI^H, \quad (15)$$

(напомним, что  $(d/ds) = \cos \theta (d/dr)$ ). Решение (15) получим следующим образом; введем  $\tau = \int_r^\infty dr' \bar{\mu}(r')$ , где  $\bar{\mu}(r)$  — средний коэффициент поглощения неполяризованного излучения; далее предположим, что  $M(\tau, \omega)/\bar{\mu}(\tau)$  не зависит от  $\tau$ . Тогда из (15) легко получить

$$I^H(\tau = 0, \omega) = \int_0^\infty d\tau \sec \theta e^{-\tau \sec \theta} \frac{E(\omega, \tau \frac{\bar{\mu}}{M})}{M(\tau, \omega)}. \quad (16)$$

Найдя таким образом  $I_{ik}^H$ , с помощью преобразования (10) можно вернуться к исходному базису.

4. Обсудим полученные результаты и дадим им наглядную интерпретацию. Поскольку  $\frac{I_{11}^H}{|t^1|^2} = \frac{t_i^{1*} t_k^1}{|t^1|^2} I_{ik}$ , то  $\frac{I_{11}^H}{|t^1|^2}$  есть интенсивность излучения, прошедшего через анализатор, настроенный на пропускание поляризации  $t^1$ . Отсюда ясно, что система уравнений переноса распалась при переходе не к нормальным, но к переносным поляри-

зациям. Это может показаться странным, так как комплексная амплитуда нормальных волн (при стационарной постановке задачи) зависит от координаты  $z$  по закону

$$E_i^1 = E_0^1 e_i^1 \exp \left[ i \frac{\omega}{c} z + i \frac{\nu^1}{2} z - \frac{\mu^1}{2} z \right],$$

$$E_i^2 = E_0^2 e_i^2 \exp \left[ i \frac{\omega}{c} z + i \frac{\nu^2}{2} z - \frac{\mu^2}{2} z \right].$$

Отсюда легко получить, например,

$$\Delta (E_i^1 E_i^{1*}) = -\mu^1 (E_i^1 E_i^{1*}) \Delta z, \quad (17a)$$

$$\Delta (E_i^1 E_i^{2*}) = -\left( \frac{\mu^1 + \mu^2}{2} - i \frac{\nu^1 - \nu^2}{2} \right) (E_i^1 E_i^{2*}) \Delta z. \quad (17b)$$

В некоторых работах (см., например, [6, 7]) из (17) делается вывод, что система уравнений переноса распадается при переходе к нормальным поляризациям. Такой вывод неверен, так как после перехода к нормальным поляризациям компонента  $I_{11}$ , например, будет пропорциональна  $|e_i^{1*} (E_0^1 e_i^1 + E_0^2 e_i^2)|^2$ ; если нормальные поляризации не ортогональны, наблюдаемая величина  $I_{11}$  не сводится к  $E_i^1 E_i^{1*}$  и не подчиняется уравнению (17a).

Поясним сказанное на примере. Пусть между источником неполяризованного излучения и наблюдателем расположен слой вещества толщиной  $l$ . Нормальные поляризации в этом слое линейны и образуют между собой угол  $\pi/4^1$ . Направим ось 1 по вектору  $e^1$  (см. рис. 1). Наблюдатель измеряет  $E_1 E_1^*$ , где  $E_1$  — проекции электрического поля на ось 1. Очевидно  $E_1 E_1^*$  есть интенсивность излучения после прохождения его через анализатор линейной поляризации, настроенный на поляризацию  $e^1$ .

Пусть поглощение волны 1 велико, а поглощение волны 2 мало, так, что  $\mu^2 l \ll 1 \ll \mu^1 l$ . Несмотря на то, что волна 1 затухла в  $\exp[\mu^1 l]$  раз, наблюдатель увидит, что  $E_1 E_1^*$  не равно нулю, так как на ось 1 проектируется волна 2. Если же наблюдатель хочет избавиться от влияния волны 2, он должен настроить анализатор на поляризацию, ортогональную нормальной поляризации  $e^2$ , т. е. на переносную поляризацию  $t^1$ . Сигнал на выходе такого анализатора подчиняется уравнению (14a).

<sup>1</sup> Исходя из принципа Онсагера, нетрудно показать, что вещество не может обладать такими свойствами. Это обстоятельство, однако, для нас сейчас не существенно.

Этим объясняется смысл и значение переносных поляризаций, введенных в [8].

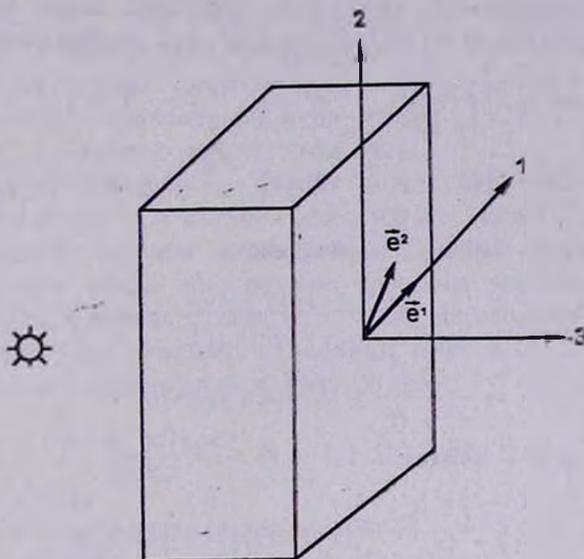


Рис. 1.

5.1. Основная цель данной работы—выяснить вопрос о нормальных и переносных поляризациях и показать, как решать систему уравнений переноса, переходя к переносным поляризациям. В качестве примера мы используем развитый выше способ решения в случае нормального эффекта Зеемана.

В декартовом базисе тензор переноса равен:

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} h & -if \\ +if & -h \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \mu_c + \delta\mu + \lambda & -i\rho \\ +i\rho & \mu_c + \delta\mu - \lambda \end{pmatrix} \quad (18)$$

где  $\mu_c$  — коэффициент поглощения в непрерывном спектре (континууме), слабо зависящий от частоты,  $h = h_a + h_p$ ,  $f = f_a + f_p$ . Коэффициенты  $f_a$ ,  $h_a$ ,  $\delta\mu$ ,  $\lambda$  и  $\rho$  описывают резонансное взаимодействие излучения с атомами в частотах линии.

Выражения для  $f_a$ ,  $h_a$ ,  $\delta\mu$ ,  $\lambda$  и  $\rho$  см. в [9] (см. также [6, 10]). Коэффициенты  $f_p$  и  $h_p$  описывают взаимодействие излучения с магнитоактивной плазмой в атмосфере звезды. Мы будем называть  $f$  — коэффициентом вращения (плоскости линейной поляризации), а  $h$  — коэффициентом пульсаций (см. [11] и [12]).

Рассмотрим сильно расщепленную линию, которая состоит из неперекрывающихся синего ( $-\sigma$ ), центрального ( $\pi$ ) и красного ( $+\sigma$ )

компонентов. Будем считать, что коэффициент вращения в плазме мал:  $f_p \ll h, \lambda^2$ .

5.2. В  $\pi$ -компоненте  $f_a = \varphi = 0$ . Сохраняя лишь члены первого порядка по  $f_p$  получим из (6), (7) и (18) для  $\pi$ -компонента

$$\begin{aligned} T^1 &= i(\mu + \lambda) + h, & e^1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\varphi \end{pmatrix}, & f^1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi^* \end{pmatrix}, \\ T^2 &= i(\mu - \lambda) - h, & e^2 &= \begin{pmatrix} -\varphi \\ 1 \end{pmatrix}, & f^2 &= \begin{pmatrix} \varphi^* \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где для краткости записи мы обозначили

$$\varphi = -\frac{f_p}{2(\lambda - ih)} = -\frac{f_p(\lambda + ih)}{2(\lambda^2 + h^2)}, \quad \mu = \mu_0 + \delta\mu.$$

Заметим, что  $e_i e_i^* = \frac{f_p \lambda}{i^2 + h^2} \neq 0$ , если  $f_p \neq 0$ .

Для  $I_{ik}^H$  и  $E_{ik}^H$  найдем

$$I_{ik}^H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I+Q & U-iV \\ U+iV & I-Q \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & (I-Q)\varphi + (I+Q)\varphi^* \\ (I-Q)\varphi^* + (I+Q)\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

Мы опустили члены типа  $(U - iV)\varphi$ , так как они пропорциональны  $\varphi^2$ .

$$E_{ik}^H = \frac{B}{2} \begin{pmatrix} \mu + \lambda & (\mu - ih)(\varphi^* + \varphi) \\ (\mu + ih)(\varphi^* + \varphi) & \mu - \lambda \end{pmatrix}$$

Пусть  $\varphi$  не зависит от  $\tau$ . Используя (14), (16), получим

$$I \pm Q = \int_0^\infty d\tau \sec \theta e^{-\tau \sec \theta} B \left( \omega, \tau \frac{\bar{\mu}}{\mu \mp \lambda} \right), \quad (19a)$$

$$U - iV = I \frac{f_p h}{\lambda^2 + h^2} - iQ \frac{f_p h}{\lambda^2 + h^2} - \frac{f_p \lambda}{\lambda^2 + h^2} \int_0^\infty d\tau \sec \theta e^{-\tau \sec \theta} B \left( \omega, \frac{\bar{\mu}}{\mu - ih} \right). \quad (19b)$$

В (19b) следует подставить  $I$  и  $Q$  из (19a). Упростим выражения (19) с помощью так называемого  $\beta$ -приближения. Положим  $B(\tau) = B_0(1 + \beta\tau)$ , тогда из (19) следует

$$I = B_0 \left( 1 + \beta \cos \theta \frac{\bar{\mu} \mu}{\mu^2 - \lambda^2} \right), \quad Q = -B_0 \beta \cos \theta \frac{\bar{\mu} \lambda}{\mu^2 - \lambda^2}; \quad (20a)$$

<sup>1</sup> Слабо расщепленная линия рассмотрена в [9]; там же рассмотрен случай сильного расщепления при сильном вращении в плазме, когда  $f_p \gg \mu_c$ .

$$|U| \ll Q, \quad V = -B_0^3 \cos \theta \frac{\bar{\mu}_i f_p h}{(\mu^2 - \lambda^2)(\mu^2 + h^2)} \quad (206)$$

Формулы (20а) совпадают с известными выражениями (см., например, [14]). Формула (20б) описывает новый качественный эффект — появление циркулярной поляризации в  $\pi$ -компоненте, обусловленное в конечном счете отличием от нуля коэффициента  $f_p$  и связанной с этим неортогональностью нормальных волн.

Коэффициент вращения  $f_p$  слабо зависит от частоты в пределах линии; произведение  $\lambda h$  в случае нормального триплета является нечетной функцией частоты относительно центра линии. В принципе возможен случай, когда  $\lambda h$  — четная функция частоты, тогда параметр Стокса  $V$ , а вместе с ним и степень циркулярной поляризации  $p_c = V/I$  также будут четными функциями частоты<sup>1</sup>.

Коэффициент вращения в плазме равен

$$f_p = -\frac{4\pi |e|^2 n B \cos \gamma}{m^2 c^2 \omega^2} = -1.1 \cdot 10^{-25} n B \cos \gamma \left( \frac{\lambda}{4500} \right)^2,$$

где  $n$  — концентрация свободных электронов,  $\lambda = (2\pi c)/\omega$  — длина волны в ангстремах. Влияние фарадеевского вращения на образование линий в спектре становится существенным, если длина  $f_p^{-1}$  сравнима или больше толщины атмосферы  $\mu_c^{-1}$ . Для магнитной звезды ( $n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ,  $B \cos \gamma = 10^4 \text{ г}$ ) получим  $f_p^{-1} = 100 \text{ км}$ , что может быть заметно меньше толщины атмосферы. Условие  $f_p/\mu_c \gg 1$  еще лучше выполняется для магнитных белых карликов, у которых  $B \cos \gamma \simeq 10^8 + 10^7 \text{ г}$ ,  $n = 5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$  и  $\mu_c^{-1} = 500 \text{ м}$ . Количественная теория образования линий в спектрах указанных объектов должна учитывать фарадеевское вращение.

6. В заключение заметим, что два предположения: 1) тензор  $1/\mu T_{ik}$  не зависит от оптической толщины  $\tau$ ; 2) справедливо  $\beta$ -приближение (т. е. в разложении  $B(\omega, \tau)$  по степеням  $\tau$  можно ограничиться первыми двумя членами), позволяют решить систему (4), не затрагивая вопроса о переносных и нормальных поляризациях [9]. Однако полученные в [9] формулы довольно громоздки. Поэтому в ряде случаев удобнее решать систему развитым в этой работе способом, даже если для получения обзримых аналитических выражений потом все равно приходится делать предположения 1 и 2.

<sup>1</sup> См. в этой связи наблюдения [13].

Заметим также, что предположение о малой величине анизотропии среды, выражающееся в неравенстве  $(c/\omega)|T_{ik}| \ll 1$ , было для нас весьма существенно. Уравнение переноса без этого предположения рассматривается в работах [15].

В работе [16] для решения системы уравнений переноса применяется метод диагонализации матрицы переноса, близкий к методу, развитому в данной работе (см. также [17]).

Благодарю за обсуждение В. А. Гинзбурга и рецензента.

Физический ин-т им. П. Н. Лебедева АН СССР  
Московский физико-технический институт

## RADIATION TRANSFER IN THE ANIZOTROPIC MEDIUM UNDER THE CONDITION OF LOCAL THERMODYNAMIC EQUILIBRIUM

V. N. SAZONOV

The system of transfer equations for the Stokes' parameters splits into independent equations after a transform to the basis which consists of several vectors of polarization of the given medium. We suggest the term „transfer polarizations“ for these vectors. Generally speaking, transfer polarizations do not coincide with the normal polarizations of the given medium because they are orthogonal to normal polarizations.

The solution of equations on the basis of transfer polarizations is obtained. This solution is used for examining the polarization in the absorption line which is highly split due to the Zeeman effect.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. В. Соболев, Курс теоретической астрофизики. Наука, М., 1967.
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Наука, М., 1967.
3. В. Н. Сазонов, В. Н. Цытович, Изв. ВУЗов, Радиофизика, 11 (9), 1287, 1968.
4. В. М. Агранович, В. А. Гинзбург, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теории экситонов, Наука, М., 1965.
5. F. K. Lamb, D. ter Haar, Oxford preprint, 38, 1970.
6. Д. Н. Рачковский, Изв. Кр.АО, 27, 148, 1962.
7. К. Кат, Publ. Astron. Soc. Japan, 20, 154, 1968.
8. В. Н. Сазонов, ЖЭТФ, 56, (3), 1075, 1969.
9. В. Н. Сазонов, Астрон. ж., 51, 1974.
10. I. M. Veskera, Solar Phys., 9, 372, 1969.
11. В. Н. Сазонов, Астрон. ж., 46 (3), 502, 1969.
12. A. G. Pacholczyk, T. L. Swihart, Ap. J., 161, 415, 1970.

13. А. Б. Северный, *Ap. J. Lett.*, 159, 73, 1970. В. М. Кушиков, *Астрон. цирк.* № 792, 1973.
14. R. Bray, R. Loughhead, *Sunspots*, London, 1964 (Р. Брей, Р. Лоухед, *Солнечные пятна*, Мир, М., 1967).
15. В. В. Железняков, *Astrophys. Space. Sci.*, 2, 403, 1968. В. В. Железняков, Е. В. Суворов, В. Е. Шапошников, *Астрон. ж.*, 51, 243, 1974.
16. Д. Н. Рачковский, *Изв. КрАО*, 47, 3, 1973.
17. A. Z. Dolginov, Yu. N. Gnedin, N. A. Silantev, *JQSRT*, 10, 707, 1970.