АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 10 МАЙ, 1974 ВЫПУСК 2

ВНУТРЕННЕЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПУЛЬСАРОВ

Д. М. СЕДРАКЯН, К. М. ШАХАБАСЯН, Я. МЮКЕТ

Поступила 10 декабря 1973

Доказано, что во вращающейся нейтронной звезде, при наличии сверхпроводящих протонов и нормальных электронов, энергетически наиболее выгодным является состояние с $H \neq 0$. Величина магнитного поля H на поверхности звезды порядка $10^{11} \div 10^{13}$ *гаусс*. Магнитное поле такого порядка реализуется в слое толщиной $10^{-2} \div 10^{-4}$ *см* у поверхности звезды.

1. *Введение.* В работе [1] был предложен механизм генерации магнитного поля пульсаров, обусловленный различным характером вращения сверхпроводящей протонной и нормальной электронной жидкостей в „*пре*"-фазе нейтронной звезды. В частности, был оценен порядок магнитного поля на поверхности звезды в предположении, что магнитное поле в основном не влияет на движение этих жидкостей. Ясно, что это довольно грубое предположение, и корректная постановка проблемы требует решения самосогласованной задачи. Для этого необходимо сразу включить в общее рассмотрение магнитное поле и при варьировании свободной энергии определить не только поля скоростей жидкостей, но и структуру внутреннего магнитного поля.

Решение задачи упрощается, если рассматривать нейтронную звезду как вращающийся цилиндр радиуса R, заполненный сверхтекучей нейтронной, сверхпроводящей протонной и нормальной электронной жидкостями [2]. Если ось вращения направить по оси z, то магнитное поле будет иметь единственную отличную от нуля компоненту $H_z = H$, и все величины будут зависеть от цилиндрического радиуса r. Решение задачи с такой упрощенной симметрией дает возможность определить общие закономерности поведения магнитного поля внутри звезды.

Напишем свободную энергию системы частиц с учетом вращения и магнитного поля и добавим к ней как кинетическую, так и магнитную энергии квантовых вихрей. Из условия равенства нулю вариации свободной энергии можно получить уравнение, определяющее магнитное поле внутри звезды. При этом, конечно, предполагаем, что из-за конечной вязкости электроны будут вращаться твердотельно с угловой скоростью Ω, а скорость протонов v_p связана с магнитным полем уравнением Максвелла:

$$\text{rot}\,\vec{H} = \alpha\,(\vec{v}_p - [\vec{\Omega}\vec{r}]), \tag{1}$$

где $\alpha = (4\pi e n_p)/c$, n_p — плотность протонов $(n_p = n_e)$, e — заряд электронов, c — скорость света. Здесь предположено также, что все протоны являются сверхпроводящими. Анализ уравнения, определяющего магнитное поле внутри звезды, показывает, что возможны два точных решения: с $H = 0$ и с H, удовлетворяющим уравнению $\Delta H = 2\alpha\Omega$. Здесь Δ радиальная часть оператора Лапласа в цилиндрических координатах.

Так как состояние с $H = 0$ энергетически более выгодно, то предполагается, что внутри звезды удовлетворяется это решение, а вблизи поверхности возможно решение с $H \neq 0$. Граница этих двух решений — R_i определяется из требования минимума свободной энергии по R_i. Оказывается что $R_i < R$, что и оправдывает наше предположение. Физически это означает, что на поверхности „*пре*“-фазы протекает ток, компенсирующий объемное внутреннее магнитное поле, созданное заряженными вихревыми токами протонов. Легко заметить, что поле магнитных вихрей, и следовательно поверхностный ток и внешнее магнитное поле, зависят от структуры протонных вихревых нитей.

Таким образом, нейтронная звезда (или пульсар) обладает вполне упорядоченной электромагнитной структурой. Значение полного магнитного момента звезды существенно зависит от состояния этой структуры. Замечательно также, что через протонные вихревые нити кинетическая энергия вращения звезды может трансформироваться в электромагнитную энергию.

2. *Свободная энергия*. Стационарному состоянию смеси вращающихся протонной и электронной жидкостей соответствует минимум свободной энергии $F = E - \vec{M}\vec{\Omega}$, где E — полная энергия, а $\vec{M}$ — полный момент импульса системы.

Свободная энергия равна

$$F = I_{\text{M}} + I_{\text{Mв}} + (E_p + E_e)_k + E_{\text{Kв}} - \vec{\Omega}(\vec{M}_p + \vec{M}_e) - \vec{\Omega}\vec{M}_{\text{в}} \tag{2}$$

где I_{M} — энергия магнитного поля, созданного макроскопическим движением жидкостей, $I_{\text{Mв}}$ — энергия магнитного поля протонных вихрей, $(E_p + E_e)_{\text{K}}$ — кинетическая энергия протонов и электронов, $\vec{M}_p$ и $\vec{M}_e$ — соответственно моменты импульса протонов и электронов, $E_{\text{Kв}}$ — кинетическая энергия протонных вихрей, $\vec{M}_{\text{B}}$ — момент импульса протонных вихрей. Варьируя выражение (2) и требуя $\delta F = 0$, получаем

$$\delta I_{\text{M}} + \delta I_{\text{Mв}} - \delta(E_{pk} - \vec{M}_p\vec{\Omega}) + \delta E_{\text{Kв}} - \vec{\Omega}\delta\vec{M}_{\text{в}} = 0 \tag{3}$$

Здесь мы учли, что электроны движутся твердотельно, следовательно $\delta(E_{e\text{K}} - \vec{M}_e\vec{\Omega}) = 0$. Из уравнения (3) получается уравнение для магнитного поля внутри звезды.

Выражения для I_{M}, E_{pk}, $\vec{M}_p$ могут быть написаны сразу. Предполагая плотность протонов n_p постоянной и обозначая магнитное поле через H, имеем для единицы длины цилиндра:

$$I_{\text{M}} = \frac{1}{8\pi}\int H^2 2\pi r dr$$

$$E_{pk} = \frac{1}{2}\rho\int v_p^2 2\pi r dr \tag{4}$$

$$M_p = \rho\int v_p r\, 2\pi r dr$$

где $\rho = m_p n_p$ — плотность массы протонов.

3. *Протонные вихри.* Для нахождения $E_{\text{Kв}}$, $\vec{M}_{\text{в}}$ и $I_{\text{Mв}}$ рассмотрим отдельную вихревую нить. Как известно из [3], движение протонов в вихревой нити квантовано и скорость равна

$$v_p = \frac{\varkappa}{2\pi}\frac{1}{r}, \tag{5}$$

где $\varkappa = \pi\hbar/m_p$. Кинетическая энергия отдельного вихря есть

$$E_{\text{Kв}} = \rho\frac{\varkappa^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}, \tag{6}$$

где b — условный внешний радиус вихря, который определяется из условия $\pi b^2 N = 1$, где N — плотность вихревых нитей. Она связана со скоростью протонов соотношением [3]

$$N = \frac{|\operatorname{rot} \vec{v}_s|}{\varkappa}. \tag{7}$$

Оценки показывают, что для нейтронной звезды $b \approx 10^{-3}$ *см*. В формуле (6) a — радиус ствола вихря, $a = (2\hbar\varepsilon_p)/(\pi p_F \Delta_p)$ [4]. Здесь p_F — фермиевский импульс протонов, $\varepsilon_p = p_F^2/2m_p$ — фермиевская энергия протонов, Δ_p — величина протонной щели, $\Delta_p \sim 10^{-2}$ *Мэв* [5]. Величина a для нейтронной звезды порядка $\sim 10^{-11}$ *см*.

Момент импульса вихрей равен

$$M_s = \rho \frac{\varkappa}{2\pi} \int 2\pi r dr. \tag{8}$$

Перейдем к расчету магнитной энергии отдельного вихря $I'_{\text{Мв}}$. Магнитное поле вблизи вихря находим из уравнения Максвелла, подставляя значение тока $j = \alpha (\varkappa/2\pi) 1/\xi$. Тогда

$$-\frac{dH}{d\xi} = \alpha v_p. \tag{9}$$

Решение уравнения (9) с условием $H(b) = 0$:

$$H(\xi) = \frac{\alpha\varkappa}{2\pi} \ln \frac{b}{\xi}. \tag{10}$$

Магнитная энергия одного вихря равна

$$I'_{\text{Мв}} = \int^{b} \frac{H^2(\xi)}{8\pi} 2\pi\xi d\xi = \left(\frac{\alpha\varkappa b}{4\pi}\right)^2 \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2 \ln^2 \frac{a}{b} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2 \ln \frac{a}{b} - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]. \tag{11}$$

Учитывая, что $a/b \ll 1$, окончательно имеем:

$$I'_{\text{Мв}} = \left(\frac{\alpha\varkappa b}{8\pi}\right)^2. \tag{12}$$

Магнитное поле внутри ствола

$$H(0) \approx H(a) = \frac{\alpha\varkappa}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Следовательно, магнитная энергия сердцевины $\pi a^2 (\alpha\varkappa/2\pi)^2 \ln^2 (a/b) \ll \ll I_{\text{Мв}}$ и ею можно пренебречь. Используя формулы (6), (7) и (12), получаем для полной кинетической энергии и полной магнитной энергии вихрей следующие выражения:

$$E_{\text{Кв}} = \rho \frac{\varkappa}{4\pi} \int |\operatorname{rot} \vec{v}_p| \ln \left(\frac{\varkappa^{1/2}}{a\pi^{1/2} |\operatorname{rot} \vec{v}_p|^{1/2}} \right) 2\pi r dr$$

$$I_{\text{Мв}} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\alpha\varkappa}{8\pi} \right)^2 \int 2\pi r dr. \tag{13}$$

4. *Уравнение, определяющее магнитное поле.* Подставляя соотношения (4), (8), (13) в уравнение (3) и учитывая связь между H и v_p по формуле (1), получаем уравнение, определяющее магнитное поле.

$$[H - \lambda_p^2 \Delta H](\Delta H')^2 + \frac{\varkappa}{8\pi} \frac{m_p c}{e} \left\{ [\Delta (\Delta H)] \Delta H' - \frac{d}{dr} (\Delta H) \frac{d}{dr} (\Delta H') \right\} = 0, \tag{14}$$

где $\lambda_p^2 = m_p c^2 / 4\pi e^2 n_p$, λ_p — лондоновская глубина проникновения для протонов,

$$H' = H - \frac{\alpha \Omega r^2}{2}, \qquad \Delta = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right).$$

При выводе уравнения (14) мы учли, что на границе звезды протоны движутся со скоростью ΩR. Отсюда следует

$$\delta v_p = -\frac{1}{\alpha} \delta \frac{dH}{dr} \bigg|_{r=R} = -\frac{1}{\alpha} \frac{d}{dr} \delta H \bigg|_{r=R} = 0 \tag{15}$$

Когда угловая скорость Ω равняется нулю, квантовые вихри отсутствуют, то есть $\varkappa = 0$. Подставляя в (14) $\varkappa = 0$, получаем известное уравнение Лондона для магнитного поля в сверхпроводниках [6]. Решение этого уравнения

$$H = H_0 \frac{I_0 (r/\lambda_p)}{I_0 (R/\lambda_p)}, \tag{16}$$

где I_0 — модифицированная цилиндрическая функция Бесселя нулевого порядка. Формула (16) описывает эффект Мейсснера. H_0 — значение внешнего магнитного поля на границе сверхпроводника. При отсутствии внешнего поля $H = 0$.

Уравнение (14) имеет два точных решения: $H = 0$ и $\Delta H' = 0$. Рассмотрим второе из них:

$$\Delta H = 2\alpha\Omega \tag{17}$$

Решение уравнения (17), удовлетворяющее условию равенства тока на границе нулю, то есть $(dH/dr)_{r=R} = 0$, имеет вид:

$$H(r) = \frac{1}{2}\alpha\Omega r^2 - \alpha\Omega R^2 \ln r + c_1. \tag{18}$$

Следуя методу, изложенному в [3], предположим, что внутри звезды до расстояния R_i имеет место решение $H = 0$, а в интервале от R_i до R — решение (18). Потребуем, чтобы магнитное поле H было непрерывным в точке R_i. Тогда постоянная интегрирования c_1 в (18) определится из условия $H(R_i) = H_0$. Решение (18) можно переписать:

$$H(r) = \frac{1}{2}\alpha\Omega(r^2 - R_i^2) + \alpha\Omega R^2 \ln\frac{R_i}{r} + H_0. \tag{19}$$

Далее, подставляя решение $H = 0$ при $r \leqslant R_i$ и решение (19) при $R_i \leqslant r \leqslant R$ в выражение $E - \vec{M}_p\vec{\Omega}$ и минимизируя его по R_i и H_0, находим, учитывая, что $R - R_i/R = (\Delta R/R) \ll 1$, следующее биквадратное уравнение:

$$(\Delta R)^4 + \frac{36\pi m_p n_p}{\alpha^2}(\Delta R)^2 - 9\frac{\varkappa n_r m_p}{\Omega\alpha^2}\left[\ln\frac{b}{ae} + \frac{\varkappa\alpha^2}{32\pi^2 m_p n_p\Omega}\right] = 0.$$

Так как для нейтронных звезд $\varkappa\alpha^2/32\pi^2 m_p n_p\Omega \gg \ln(b/ae)$ (здесь e — основание натуральных логарифмов), то уравнение приводится к виду:

$$(\Delta R)^4 + \frac{36\pi m_p n_p}{\alpha^2}(\Delta R)^2 - \frac{18}{64}\frac{\varkappa^2}{\pi^2\Omega^2} = 0. \tag{20}$$

Положительный корень уравнения (20)

$$(\Delta R)^2 = \frac{3\sqrt{2}}{8\pi}\frac{\varkappa}{\Omega}(\sqrt{1+\beta^2} - \beta),$$

где $\beta = 24\sqrt{2}\pi^2 n_p m_p\Omega/\varkappa\alpha^2$. В условиях нейтронных звезд $\beta \ll 1$, следовательно,

$$(\Delta R)^2 = \frac{3\sqrt{2}}{8\pi}\frac{\varkappa}{\Omega}. \tag{21}$$

Подставляя в (19) $r = R$, найдем магнитное поле на поверхности:

$$H(R) = -\frac{\alpha\Omega}{3}(\Delta R)^2. \tag{22}$$

При выводе формулы (22) учтено условие $\Delta R \ll R$. Для абсолютного значения магнитного поля, используя формулы (21) и (22), получим

$$|H(R)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e\hbar}{m_p c} n_p. \tag{23}$$

Для распространенных моделей нейтронных звезд плотность протонов на границе „*пре*"-фазы меняется в области от 10^{34} $см^{-3}$ до 10^{36} $см^{-3}$ [7]. Для таких плотностей $a \approx 10^{-11}$ *см*, $b \approx \Delta R \approx 10^{-4}$ *см* для $\Omega \approx 10^{1}$ $сек^{-1}$ и $b \approx \Delta R \approx 10^{-3}$ *см* для $\Omega \approx 10^{2}$ $сек^{-1}$. Так что условия $a \ll b$ и $\Delta R \ll R$ оправданы.

Подставляя вышеуказанные значения плотности в формулу (23), получаем на поверхности звезды большие магнитные поля порядка $10^{11} \div 10^{13}$ *гаусс*. Эти поля меняются по закону (19) от поверхностного значения до нуля на расстоянии ΔR порядка $10^{-4} \div 10^{-2}$ *см*. Следовательно по границе между „*пре*" и „*Ае*" фазами течет сильный сверхпроводящий ток.

Заметим, что всякие колебания протонных вихревых нитей приведут к изменению полученного полного магнитного поля по времени. Тогда звезда может являться источником магнито-дипольного излучения электромагнитных волн, частота которых будет определяться частотой колебаний этих нитей.

Авторы выражают благодарность профессору Г. С. Саакяну, В. М. Арутюняну, Э. В. Чубаряну за полезные обсуждения.

Ереванский государственный
университет

THE INTERIOR MAGNETIC FIELD OF PULSARS

D. M. SEDRAKIAN, K. M. SHAHABASSIAN, J. MÜCKET

It is shown, that for rotating neutron stars with superconductive protons and normal electrons the condition with $H \neq 0$ is energetically more advantageous. The order of the magnetic field on the surface of neutron stars is $10^{11} \div 10^{13}$ *gauss*. The magnetic field of that order exists in the layer with thickness $10^{-2} \div 10^{-4}$ *cm* near the surface.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. М. Седракян, К. М. Шахабасян*, Астрофизика, 8, 557, 1972.
2. *В. Л. Гинзбург*, УФН, 103, 393, 1971.
3. *И. М. Халатников*, Теория сверхтекучести, Наука, М., 1971.
4. *П. Де Жен*, Сверхпроводимость металлов и сплавов, Мир, М., 1968.
5. *G. Baym, C. Pethick, D. Pines*, Nature, 224, 673, 1969.
6. *Д. Шенберг*, Сверхпроводимость, ИИЛ, М., 1955.
7. *Г. С. Саакян*, Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс, Наука, М., 1972.