АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 10 МАЙ, 1974 ВЫПУСК 2

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЛЕЙ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ АТМОСФЕРАХ

В. В. ИВАНОВ

Поступила 5 марта 1974

Рассматривается анизотропное рассеяние света в полубесконечной плоскопараллельной атмосфере. Изучается асимптотическое поведение функции Грина уравнения переноса в двух предельных случаях — в глубоких слоях и при почти консервативном рассеянии, а также асимптотика вклада в функцию Грина, даваемого фотонами, испытавшими n рассеяний, при больших n.

Введение. Трудности решения почти всех задач о многократном рассеянии света в значительной степени связаны с тем, что интенсивность излучения зависит от большого числа переменных и параметров. Поэтому важное место в теории переноса излучения занимает исследование случаев, когда число переменных в силу тех или иных причин может быть уменьшено. Как правило, это связано с разделением переменных.

Встречается разделение переменных двух типов — строгое и асимптотическое. Первое из них изучено весьма подробно в работах В. А. Амбарцумяна [1], С. Чандрасекара [2], В. В. Соболева [3, 4] и др. В основе его лежит разложение индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра и обусловленное этим разложение интенсивности излучения по азимутальным гармоникам. Коэффициенты этого разложения, зависящие от нескольких переменных, удается выразить через некоторые вспомогательные функции меньшего числа переменных.

Асимптотическое разделение переменных имеет другую природу. При многократных рассеяниях происходит угловая релаксация, т, е. фотон в ходе рассеяний постепенно „забывает“ направление своего первоначального распространения. Процесс угловой релаксации чрезвычайно быстрый, так что обычно уже после 3—5, а при очень сильно вытянутых индикатрисах — после 8—10 рассеяний информация о первоначальном направлении полета фотона успевает замыться практически полностью. Такой же характер имеет и поляризационная релаксация.

Существование угловой и поляризационной релаксации лежит в основе группы разнородных внешне, но единых в своей основе упрощений в структуре поля излучения, которые мы объединяем под общим названием „асимптотическое разделение переменных". Эти упрощения проявляются всякий раз, когда приходится иметь дело с фотонами, испытавшими большое число рассеяний. Такие случаи можно разбить на три группы. Во-первых, пространственные асимптотики, т. е. упрощения в поле излучения в глубоких слоях, при прохождении сквозь толстые слои и т. п. Во-вторых, почти консервативные асимптотики, т. е. обусловленные слабым истинным поглощением отклонения поля излучения при почти консервативном рассеянии от поля излучения в консервативном случае. Наконец, в-третьих, непосредственно асимптотики по номеру рассеяния n при больших n, т. е. учет вклада в поле излучения, даваемого n-кратно рассеянными фотонами, и тесно связанные с ними временные асимптотики при больших t в нестационарных задачах.

Характерной чертой упрощений во всех перечисленных только что предельных случаях является некоторое разделение переменных, причем окончательные выражения, как правило, допускают непосредственное физическое истолкование. Большинство из них можно написать сразу же, прямо из физических соображений. Поскольку угловая релаксация происходит очень быстро, связанные с нею асимптотические упрощения имеют очень широкую область применимости.

Изучение асимптотического разделения переменных было начато уже давно. Первыми были изучены пространственные асимптотики для полубесконечной среды и плоского слоя конечной толщины (см., в частности, [1], [3], гл. III и IV, [5, 6, 7], [4], гл. II и III). Затем были рассмотрены, главным образом в работах Х. ван де Хюлста и В. В. Соболева, асимптотики для почти консервативного рассеяния [7], [4], гл. II и III. Наконец, изучение асимптотик по n и t (см., в частности, [8—11]) приобрело особый интерес после того, как А. Уэсуги и В. Ирвин [12] и Х. ван де Хюлст [13] использовали их для ускорения сходимости итеративных решений задач о многократном рассеянии.

Настоящая работа посвящена изучению асимптотических свойств полей излучения в полубесконечных атмосферах с произвольным распределением источников. Точнее говоря, находятся асимптотики функции Грина уравнения переноса излучения всех трех описанных только что типов.

Глубокие слои. Обозначим через $G(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0)$ усредненную по азимуту функцию Грина уравнения переноса для плоской полубесконечной атмосферы, т. е. ограниченное при $\tau \to \infty$ решение уравнения

$$\mu \frac{dG(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0)}{d\tau} = -G(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0) + \\ + \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} p(\mu, \mu')\, G(\tau, \mu'; \tau_0, \mu_0)\, d\mu' + \delta(\tau - \tau_0)\,\delta(\mu - \mu_0) \tag{1}$$

при граничном условии

$$G(0, \mu; \tau_0, \mu_0) = 0, \quad \mu > 0. \tag{2}$$

Здесь τ и τ_0 — оптические глубины; μ и μ_0 — угловые переменные, отсчитываемые так, что они положительны для нисходящих направлений (т. е. когда фотон летит в сторону роста τ); λ — вероятность выживания фотона при рассеянии, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$; $p(\mu, \mu')$ — усредненная по азимуту индикатриса рассеяния с нормировкой

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} p(\mu, \mu')\, d\mu' = 1. \tag{3}$$

Пусть, далее, $I_M(\tau, \mu)$ — интенсивность в задаче Милна, т. е. решение однородного уравнения переноса

$$\mu \frac{dI_M(\tau, \mu)}{d\tau} = -I_M(\tau, \mu) + \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} p(\mu, \mu')\, I_M(\tau, \mu')\, d\mu'. \tag{4}$$

Обозначим через k наименьшее по абсолютной величине собственное значение характеристического уравнения, через $i(\mu)$ — соответствующую собственную функцию, так что

$$(1 - k\mu)\, i(\mu) = \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} p(\mu, \mu')\, i(\mu')\, d\mu', \tag{5}$$

причем примем, что

$$\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} i(\mu)\, d\mu = 1. \tag{6}$$

Решение задачи Милна I_M будем считать нормированным условием

$$2\int_0^1 I_M(0, -\mu)\, i(\mu)\, \mu d\mu = 1. \tag{7}$$

Основной результат этого раздела статьи формулируется следующим образом: при $\tau_0 = \mathrm{const}$, $\tau \to \infty$ функция Грина G имеет асимптотическое представление

$$G^{as}(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0) = 2i(\mu)\, e^{-k\tau} I_M(\tau_0, -\mu_0). \tag{8}$$

Соображения, приводящие к (8), состоят в следующем. В глубоких слоях полубесконечной атмосферы (при достаточно больших τ) относительное пространственно-угловое распределение фотонов должно быть асимптотически таким же, как в бесконечной среде с источником на минус бесконечности, т. е. должно иметь вид $i(\mu)\, e^{-k\tau}$, так что

$$G^{as}(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0) = f(\tau_0, \mu_0)\, i(\mu)\, e^{-k\tau}. \tag{9}$$

Чтобы найти f, воспользуемся хорошо известным соотношением обратимости (см., например, [14], § 2.7)

$$G(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0) = G(\tau_0, -\mu_0; \tau, -\mu), \tag{10}$$

с учетом которого (9) можно переписать также в виде

$$G^{as}(\tau_0, -\mu_0; \tau, -\mu) = f(\tau_0, \mu_0)\, i(\mu)\, e^{-k\tau}. \tag{11}$$

Согласно физическому смыслу стоящей слева функции Грина, стоящая справа величина есть интенсивность на глубине τ_0 в направлении $-\mu_0$, создаваемая источником единичной мощности, излучающим в направлении $-\mu$ на глубине τ. Поскольку мы принимаем, что $\tau \to \infty$, глубина расположения источника, порождающего поле излучения, считается неограниченно возрастающей. Тогда по физическому смыслу задачи Милна можно утверждать, что $f(\tau_0, \mu_0)$ должно быть пропорционально $I_M(\tau_0, -\mu_0)$, так что (11) и (10) дают

$$G^{as}(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0) = ci(\mu)\, e^{-k\tau} I_M(\tau_0, -\mu_0), \tag{12}$$

где c — некоторая постоянная. Ее можно получить, например, из следующего соотношения:

$$i(\mu)\, e^{-k\tau} = \int_0^1 G(\tau, \mu; 0, \mu')\, i(\mu')\, \mu' d\mu', \quad \tau > 0. \tag{13}$$

Это соотношение выражает тот факт, что интенсивность излучения в направлении μ на глубине $\tau \geqslant 0$ в бесконечной среде с источником на минус бесконечности (левая часть в (13)) есть одновременно интенсивность в полубесконечной среде, граница которой освещается излучением, распространяющимся в бесконечной среде на уровне $\tau=0$ в сторону положительных τ. Из (13) при $\tau \to \infty$ находим, учитывая (12) и (7), что $c=2$, т. е. приходим к (8).

Важным следствием формулы (8) является следующее утверждение: если в атмосфере имеются внутренние источники излучения, которые достаточно сконцентрированы к границе, а в остальном произвольны, то в глубоких слоях такой атмосферы устанавливается некоторый универсальный световой режим. Действительно, пусть $I^*(\tau, \mu)$ — мощность первичных источников. Тогда интенсивность излучения равна

$$I(\tau, \mu)=\int_0^\infty d\tau_0 \int_{-1}^1 G(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0)\, I^*(\tau_0, \mu_0)\, d\mu_0. \tag{14}$$

Если интеграл

$$C=2\int_0^\infty d\tau' \int_{-1}^1 I_M(\tau', -\mu')\, I^*(\tau', \mu')\, d\mu' \tag{15}$$

сходится, то из (14) и (8) находим для интенсивности в глубоких слоях

$$I^{as}(\tau, \mu)=Ci(\mu)\, e^{-k\tau}. \tag{16}$$

Относительное пространственно-угловое распределение излучения в глубоких слоях в этом случае от распределения источников не зависит, им определяется лишь абсолютное значение интенсивности.

Из (15) легко понять, насколько быстро мощность источников должна убывать с глубиной, чтобы устанавливался такой асимптотический режим. Хорошо известно, что глубинная асимптотика интенсивности в задаче Милна определяется выражением (см., например, [5, 7])

$$MI_M^{as}(\tau, \mu)=i(-\mu)\, e^{k\tau}-i(\mu)\, e^{-k\tau}N, \tag{17}$$

где

$$M=2\int_{-1}^1 i^2(\mu)\,\mu d\mu, \qquad N=2\int_0^1 I_M(0, -\mu)\, i(-\mu)\,\mu d\mu. \tag{18}$$

Поэтому, чтобы интеграл (15) сходился, $I^*(\tau, \mu)$ должно быть $o(e^{-k\tau})$ при $\tau \to \infty$.

Общего выражения (15) для асимптотической константы C в литературе, по-видимому, нет, хотя частные случаи этой формулы известны уже давно. Так, для изотропного рассеяния и I^*, не зависящего от μ, значение C было найдено Б. Дэвисоном [15] (для $\lambda = 1$) и Т. А. Гермогеновой [16, 17] (для произвольного λ). Х. ван де Хюлст [7] и В. В. Соболев [18] (см. также [4], гл. II) получили C для случая, когда поле излучения создается освещением атмосферы параллельными лучами (их результат следует из (8), если положить $\tau_0 = 0$).

Главное упрощение, выражаемое формулами (8) и (16), состоит в асимптотическом разделении переменных. В асимптотической области интенсивность при произвольном распределении источников выражается через две стандартные функции, от вида этого распределения не зависящие, — угловое распределение в диффузионном режиме в бесконечной среде $i(\mu)$ и милновскую интенсивность $I_M(\tau, \mu)$.

Множитель I_M в формулах (8) и (15) заслуживает некоторого обсуждения. Пусть на глубине τ_0 в направлении μ_0 в среду впущен фотон. Согласно (8), интенсивность излучения, возникающая в результате этого в достаточно глубоких слоях (в асимптотической области) пропорциональна $I_M(\tau_0, -\mu_0)$. Поэтому $I_M(\tau_0, -\mu_0)$ можно рассматривать как меру ценности вводимого фотона по отношению к созданию поля излучения в асимптотической зоне, или, короче, как асимптотическую ценность. Чем дальше от границы фотон вводится в среду, тем больше вероятность его проникновения в асимптотическую зону по сравнению с вероятностью выхода через границу. При больших τ_0 асимптотическая ценность фотона растет как $e^{k\tau_0}$, как это видно из асимптотики I_M (см. формулу (17)). Далее, очевидно, что фотоны, вводимые в среду на одной и той же глубине, но в разных направлениях, должны иметь разную асимптотическую ценность. Фотоны, летящие в сторону границы, имеют меньшую ценность, чем те, которые распространяются вглубь. В этом физический смысл того, что асимптотическая ценность есть $I_M(\tau_0, -\mu_0)$, а не $I_M(\tau_0, \mu_0)$.

Почти консервативное рассеяние. Условимся в дальнейшем величины, относящиеся к консервативному случаю, снабжать верхним индексом ^{0}, так что, например, G^0 — это функция G для $\lambda = 1$. Будем искать функцию Грина G при $1 - \lambda \ll 1$ в виде разложения

$$G(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0) = G^0(\tau, \mu, \tau_0; \mu_0) - \varepsilon G^1(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0) + \cdots, \tag{19}$$

где ε — малый параметр разложения, $\varepsilon \to 0$ при $\lambda \to 1$, и G^1 — искомая поправка. Предположим, что $1 - \lambda = o(\varepsilon)$. Тогда, подставив (19) в уравнение переноса (1), для G^1 находим уравнение

$$\mu \frac{dG^1(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0)}{d\tau} = -G^1(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0) + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} p(\mu, \mu') G^1(\tau, \mu'; \tau_0, \mu_0)\, d\mu', \tag{20}$$

совпадающее с уравнением переноса для консервативной задачи Милна. Поэтому

$$G^1(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0) = C(\tau_0, \mu_0) I_M^0(\tau, \mu), \tag{21}$$

причем интенсивность в консервативной задаче Милна I_M^0 в соответствии с (7) считается нормированной так, что

$$2\int_0^1 I_M^0(0, -\mu)\, \mu d\mu = 1. \tag{22}$$

Введя (21) в разложение (19) и воспользовавшись соотношением обратимости (10), заключаем, что $C(\tau_0, \mu_0) = aI_M^0(\tau_0, -\mu_0)$, где a — некоторая постоянная. Не ограничивая общности, ее можно принять равной единице, соответствующим образом выбрав ε. Наконец, подставив полученное выражение в (13) и учтя, что при $1 - \lambda \ll 1$, как хорошо известно, $k = O(\sqrt{1-\lambda}) \ll 1$ и

$$i(\mu) = 1 + k\frac{3}{3 - x_1}\mu + \cdots, \tag{23}$$

где x_1 — коэффициент при первом члене разложения индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра, находим

$$I_M^0(\tau, \mu) = \frac{6k}{(3 - x_1)\varepsilon}\left[\left(1 - \frac{x_1}{3}\right)\tau - \mu + \int_0^1 G^0(\tau, \mu; 0, \mu')\, \mu'^2 d\mu'\right]. \tag{24}$$

Положим в этом соотношении $\tau \to \infty$. Воспользовавшись хорошо известной асимптотикой $I_M^0(\tau, \mu)$ при $\tau \to \infty$, следующей из (17) и (23),

$$I_M^{0\,as}(\tau, \mu) = \frac{3}{4}\left[\left(1 - \frac{x_1}{3}\right)\tau - \mu + \gamma\right], \tag{25}$$

где

$$\gamma = 2\int_0^1 I_M^0(0, -\mu)\, \mu^2 d\mu, \tag{26}$$

находим

$$\varepsilon = \frac{8}{3-x_1} k. \tag{27}$$

Поэтому окончательно

$$G(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0) = G^0(\tau, \mu, \tau_0, \mu_0) - k \frac{8}{3-x_1} I_M^0(\tau, \mu) I_M^0(\tau_0, -\mu_0) + \cdots \tag{28}$$

Это и есть искомая почти консервативная асимптотика функции Грина.

Отметим, что из (24) и (27) следует полученное в [19] другим путем выражение для интенсивности в консервативной задаче Милна через поверхностную функцию Грина, т. е. фактически через интенсивность в задаче о диффузном отражении:

$$I_M^0(\tau, \mu) = \frac{3}{4}\left[\left(1 - \frac{x_1}{3}\right)\tau - \mu + \int_0^1 G^0(\tau, \mu; 0, \mu')\, \mu'^2\, d\mu'\right]. \tag{29}$$

Формула (28) допускает простую физическую интерпретацию. Поскольку вероятность гибели фотона при рассеянии $1-\lambda$ считается малой, гибнут, как правило, фотоны, испытавшие много рассеяний и поэтому успевшие проникнуть в глубокие слои. Согласно (28), почти консервативную среду можно заменить консервативной, в которой на бесконечности имеется некоторый сток фотонов, т. е. отрицательный источник. Мощность этого фиктивного источника, описывающего происходящее в глубоких слоях истинное поглощение, пропорциональна $I_M^0(\tau_0, -\mu_0)$, как это и должно быть по смыслу асимптотической ценности. Изложенные соображения восходят к X. ван де Хюлсту [7], который сформулировал их при обсуждении одного частного случая формулы (28).

Имея разложение (28) функции Грина при малых $1-\lambda$, нетрудно получить аналогичное разложение для интенсивности в задаче Милна. По существу оно является предельным случаем (28) при больших τ. Комбинируя (28) с (8) и (23), нетрудно получить

$$I_M(\tau, \mu) = I_M^0(\tau, \mu)\left(1 - k \frac{3\gamma}{3-x_1} + \cdots\right). \tag{30}$$

Формально это разложение справедливо при $\tau = \mathrm{const}$, $\lambda \to 1$, фактическая же область его применимости определяется неравенством $k\tau \ll 1$. Аналогичным образом, разложение (28) годится, если одновременно $k\tau \ll 1$ и $k\tau_0 \ll 1$.

Обозначим, как принято в астрофизике, через $I(\tau, \mu, \mu_0)$ усредненную по азимуту интенсивность диффузного излучения на глубине τ в направлении μ в полубесконечной атмосфере, которая освещается параллельными лучами с косинусом угла падения μ_0, создающими освещенность π на перпендикулярной к ним площадке. Поверхностная функция Грина $G(\tau, \mu; 0, \mu_0)$ связана с $I(\tau, \mu, \mu_0)$ соотношением

$$G(\tau, \mu; 0, \mu_0)\,\mu_0 = \delta(\mu - \mu_0)\, e^{-\frac{\tau}{\mu_0}} + 2I(\tau, \mu, \mu_0). \tag{31}$$

Поэтому из (28) при $\tau_0 = 0$ находим

$$I(\tau, \mu, \mu_0) = I^0(\tau, \mu, \mu_0) - k\,\frac{4}{3 - x_1}\, I_M^0(\tau, \mu)\, I_M^0(\tau_0, -\mu_0) + \cdots \tag{32}$$

В частном случае $\tau = 0$ (30) и (32) переходят в формулы, найденные Х. ван де Хюлстом [7] и В. В. Соболевым [20] (см. также [4], гл. II).

Пусть теперь имеется почти консервативная атмосфера с внутренними источниками излучения мощности $I^*(\tau, \mu)$. Если $I(\tau, \mu)$ — интенсивность излучения в такой атмосфере, $I^0(\tau, \mu)$ — интенсивность излучения в консервативной атмосфере с тем же распределением источников, то

$$I(\tau, \mu) = I^0(\tau, \mu) - k\,\frac{4}{3 - x_1}\, C^0 I_M^0(\tau, \mu) + \cdots, \tag{33}$$

где C^0 определяется формулой (15) (с заменой в правой части I_M на I_M^0). Это разложение получается подстановкой (28) в (14). Условие его применимости состоит, во-первых, в выполнении неравенства $k\tau \ll 1$ и, во-вторых, в том, что вклад в интеграл (15) для C^0, даваемый областью, где $k\tau' \gtrsim 1$, должен быть пренебрежимо мал.

Вклад рассеяний высоких порядков. Функцию Грина G можно представить в виде разложения

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n G_n, \tag{34}$$

в котором G_n описывает вклад в поле излучения, даваемый n-кратно рассеянными фотонами. Мы покажем сейчас, что G_n при $n \to \infty$ принимают следующую асимптотическую форму:

$$G_n^{as}(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0) = \frac{4}{\sqrt{3 - x_1}\,\sqrt{\pi}\, n^{3/2}}\, I_M^0(\tau, \mu)\, I_M^0(\tau_0, -\mu_0). \tag{35}$$

Можно предложить несколько способов вывода. Мы выбрали тот, который кажется более физичным.

Величина $G_n(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0)$ есть интенсивность на глубине τ в направлении μ, создаваемая n-кратно рассеянными фотонами, которые были первоначально инжектированы в среду на глубине τ_0 в направлении μ_0. Нас интересуют фотоны, испытавшие много рассеяний ($n \to \infty$). Большинство из них в ходе блужданий должно было побывать в глубоких слоях, откуда они вернулись затем на глубину τ. При выходе фотонов из глубоких слоев в среде должно установиться такое же относительное пространственно-угловое распределение излучения, как в консервативной задаче Милна, т. е. зависимость от переменных (τ, μ) в $G_n(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0)$ при $n \to \infty$ должна входить множителем $I_M^0(\tau, \mu)$. Далее, G_n должны удовлетворять условию обратимости $G_n(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0) = G_n(\tau_0, -\mu_0; \tau, -\mu)$, а поэтому зависимость $G_n(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0)$ от (τ_0, μ_0) должна входить посредством множителя $I_M^0(\tau_0, -\mu_0)$. Следовательно, G_n при $n \to \infty$ имеют вид

$$G_n^{as}(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0) = g_n I_M^0(\tau, \mu) I_M^0(\tau_0, -\mu_0), \tag{36}$$

и нам осталось найти g_n.

Продифференцируем (34) по λ. Получающийся ряд обладает для наших целей существенным преимуществом перед (34): из-за появления дополнительного множителя n вклад далеких членов возрастает. Воспользовавшись также (28) и тем, что $k = \sqrt{(3 - x_1)(1 - \lambda)} + \cdots$ при $\lambda \to 1$, находим

$$\frac{4}{\sqrt{3 - x_1}} I_M^0(\tau, \mu) I_M^0(\tau_0, -\mu_0) \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda}} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n\lambda^{n-1} G_n(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0), \tag{37}$$

причем члены, замененные в левой части многоточием, остаются ограниченными при $\lambda \to 1$. Из расходимости ряда (37) при $\lambda = 1$ следует, что когда λ близко к единице, основной вклад в его сумму дают далекие члены, а в них для G_n можно использовать асимптотическое представление (36). Поэтому из (37) и (36) заключаем, что

$$\frac{4}{\sqrt{3 - x_1}} \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda}} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n g_n \lambda^{n-1}. \tag{38}$$

Отсюда легко получить, например, приближенно заменяя суммирование интегрированием, что $g_n = 4/(\sqrt{3 - x_1}\sqrt{\pi}\, n^{3/2})$, а это в комбинации с (36) и приводит к искомому результату (35).

Отметим, что интенсинность в консервативной задаче Милна можно представить в виде

$$I_M^0(\tau, \mu) = \frac{3}{4}\left[\left(1 - \frac{x_1}{3}\right)\tau - \mu + \sum_{n=0}^{\infty} I_n^M(\tau, \mu)\right], \tag{39}$$

где

$$I_n^M(\tau, \mu) = \int_0^\infty G_n^0(\tau, \mu; 0, \mu')\, \mu'^2 d\mu'. \tag{40}$$

Это следует из (29) и (34). Воспользовавшись (35), находим, что при $n \to \infty$

$$I_n^M(\tau, \mu) = \gamma \frac{2}{\sqrt{3 - x_1}\sqrt{\pi}\, n^{3/2}} I_M^0(\tau, \mu) + \cdots \tag{41}$$

Формулы (35) и (38) можно использовать для значительного ускорения сходимости итеративных процедур нахождения полей излучения. Некоторые относящиеся к этому вопросы обсуждаются в [12] и [13].

Несколько слов об области применимости (35) и (38). Эти выражения получены при τ, $\tau_0 = \text{const}$, $n \to \infty$. Практически они применимы при выполнении неравенств $n \gg (3 - x_1)\tau^2$, $n \gg (3 - x_1)\tau_0^2$ и $n \gg 1$. Выход на асимптотический режим по n, описываемый (35) и (38), происходит, таким образом, тем быстрее, чем меньше τ (и τ_0). Оказывается, что для G_n при больших n можно получить и более общие асимптотические выражения, которые применимы при *любых* τ и τ_0. Этот вопрос будет рассмотрен в другом месте.

Наконец, в связи с формулами (35) и (38) уместно упомянуть об известном правиле соотнесения асимптотик по номеру рассеяния n в стационарных задачах асимптотикам по времени t в нестационарных задачах (см., например, [12]). Согласно этому правилу, если t измерять во временах свободного пробега фотона, то, положив $n = t$ в главном члене асимптотики по n, мы получим главный член асимптотики по t. Физический смысл этого правила очевиден: если фотон испытал много рассеяний, то средняя оптическая длина пути, пройденного им в расчете на одно рассеяние, равна единице.

Заключительные замечания. Полученные выше асимптотические результаты допускают обобщения. Во-первых, можно учесть поляризацию. Для изотропной среды с произвольной матрицей рассеяния учет поляризации в рамках развитой в настоящей статье асимптотической теории фактически сводится к простым заменам скалярных соотношений векторными. Во-вторых, по крайней мере часть результатов должна оставаться в силе для широкого класса неоднородных сред. Причина этого в том, что угловая релаксация происходит и в неоднородных средах, что должно вести к асимптотическому разделению переменных.

Учет поляризации и обобщение результатов на неоднородные среды будут рассмотрены в последующих публикациях.

Ленинградский государственный
университет

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF RADIATION FIELDS IN SEMI-INFINITE ATMOSPHERES

V. V. IVANOV

Anisotropic light scattering in semi-infinite plane-parallel atmospheres is considered. The asymptotic behavior of the Green's function of the transfer equation is studied. The cases considered are those of the deep layers and of the nearly conservative scattering. The contribution to the Green's function due to n times scattered photons is also found for large n.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, Научные труды, т. I, АН Арм.ССР, Ереван, 1960.
2. *С. Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
3. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГТТИ, М., 1956.
4. *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
5. *М. В. Масленников*, Труды МИАН, вып. 97, 1968.
6. *Т. А. Гермогенова*, Ж. вычислит. матем. и мат. физики, 1, 1001, 1961.
7. *H. C. van de Hulst*, B. A. N., 20, 77, 1968.
8. *I. Kuščer, P. F. Zweifel*, J. Math. Phys., 6, 1125, 1965.
9. *Л. М. Романова*, Изв. АН СССР, сер. Физика атмосферы и океана, 1, 599, 1965.
10. *T. W. Mullikin*, J. Appl. Probability, 5, 357, 1968.
11. *И. Н. Минин*, в сб. „Теоретические и прикладные проблемы рассеяния света", Наука и техника, Минск, 1971, стр. 59.
12. *A. Uesugi, W. Irvine*, Ap. J., 159, 127, 1970.
13. *H. C. van de Hulst*, Astron. Astrophys., 9, 374, 1970.
14. *К. Кейз, П. Цвайфель*, Линейная теория переноса, Мир, М., 1972.
15. *B. Davison*, Proc. Phys. Soc., A64, 881, 1951.
16. *Т. А. Гермогенова*, ДАН СССР, 115, 23, 1957.
17. *Т. А. Гермогенова*, в сб. „Некоторые математические задачи нейтронной физики", МГУ, М., 1960, стр. 93.
18. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 179, 41, 1968.
19. *В. В. Иванов*, Астрон. ж. (в печати).
20. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 45, 254, 1968.