АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 9 НОЯБРЬ, 1973 ВЫПУСК 4

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ИЗЛУЧАТЕЛЬНОЙ И ПОГЛОЩАТЕЛЬНОЙ СПОСОБНОСТЬЮ СРЕДЫ

В. В. СОБОЛЕВ

Поступила 4 октября 1973

Полученное ранее [1, 2] соотношение между излучательной и поглощательной способностью среды применяется к трем случаям: 1) полубесконечная среда, 2) плоский слой, 3) однородный шар. В каждом из этих случаев по одной из указанных величин определяется другая.

В двух заметках автора [1, 2] получено соотношение между излучательной и поглощательной способностью среды, которая может испускать, поглощать и рассеивать лучистую энергию. При этом рассеяние считалось сначала изотропным, а затем — анизотропным. Вместе с тем принималось, что рассеяние света в элементарном объеме происходит с произвольным перераспределением по частоте (в частных случаях с полным перераспределением по частоте или без изменения частоты). Сейчас мы применим это соотношение к решению некоторых задач.

Возьмем упомянутое соотношение в том виде, в каком оно получено в заметке [2]. Пусть данная среда занимает произвольный объем V. Обозначим через $\alpha(\nu, \vec{r})$, $\sigma(\nu, \vec{r})$ и $\varkappa(\nu, \vec{r})$ соответственно коэффициенты поглощения, рассеяния и истинного поглощения для частоты ν в точке $\vec{r}$, причем $\alpha(\nu, \vec{r}) = \sigma(\nu, \vec{r}) + \varkappa(\nu, \vec{r})$. Тогда вероятность выживания фотона после поглощения его в элементарном объеме будет равна $\lambda(\nu, \vec{r}) = \sigma(\nu, \vec{r})/\alpha(\nu, \vec{r})$. Если на элементарный объем dV падает излучение частоты ν_1 в направлении $\vec{n}_1$, то долю излучения, рассеянного этим объемом в интервале частот от ν_2 до $\nu_2 + d\nu_2$ в направлении $\vec{n}_2$ внутри телесного угла $d\omega_2$, обозначим через $\sigma(\nu_1, \vec{r})\, g(\nu_1, \nu_2, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{r})\, dV d\nu_2 d\omega_2$. Величина σg считается произвольной функцией от $\vec{r}$, ν_1, ν_2 и угла γ между направлениями $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, однако симметричной относительно переменных ν_1 и ν_2, как это имеет место при рассеянии излучения в спектральной линии.

Для среды с указанными свойствами сравним между собой две величины: 1) поглощательную способность $a(\nu, \vec{n})$, представляющую собой долю фотонов, испытывающих в объеме V истинное поглощение (т. е. гибнущих в ходе многократных рассеяний) из числа фотонов частоты ν, падающих на объем в некотором месте в направлении $\vec{n}$; 2) интенсивность $I(\nu, -\vec{n})$ излучения частоты ν, выходящего из объема V в том же месте в обратном направлении при равномерном распределении источников, т. е. когда обусловленный ими коэффициент излучения дается формулой $\varepsilon_0(\nu, \vec{r}) = \varkappa(\nu, \vec{r}) B_*$, где $B_* = \text{const}$. Как показано в [2], эти величины связаны соотношением

$$\frac{I(\nu, -\vec{n})}{a(\nu, \vec{n})} = B_*, \tag{1}$$

которое можно рассматривать в качестве обобщения закона Кирхгофа на рассеивающую среду.

Если в данной среде $\lambda(\nu, \vec{r}) = \lambda = \text{const}$, то соотношение (1) можно записать также в виде

$$\frac{I(\nu, -\vec{n})}{a(\nu, \vec{n})} = \frac{B_0}{1-\lambda}, \tag{2}$$

где $\varepsilon_0(\nu, \vec{r}) = \alpha(\nu, \vec{r}) B_0$ и $B_0 = \text{const}$.

С помощью (1) легко получить формулу, связывающую излучательную и поглощательную способность всего объема V. Эта формула имеет вид

$$E_e(\nu, -\vec{n}) = \frac{B_*}{H} E_a(\nu, \vec{n}), \tag{3}$$

где $E_a(\nu, \vec{n})$ — энергия, испытывающая в объеме истинное поглощение при освещении его параллельными лучами частоты ν, падающими в направлении $\vec{n}$ и создающими освещенность H перпендикулярной к ним площадки, и $E_{e}(\nu, -\vec{n})$ — энергия частоты ν, излучаемая этим объемом при равномерном распределении в нем источников в обратном направлении и рассчитанная на единицу телесного угла.

Соотношения (1)—(3) позволяют определить одну из входящих в них величин, если известна другая. В настоящей статье мы приведем ряд примеров использования этих соотношений, рассматривая геометрические формы, наиболее часто встречающиеся в астрофизике (полубесконечная среда, плоский слой, однородный шар).

Полубесконечная среда. Допустим для простоты, что оптические свойства полубесконечной среды зависят не от всех координат, а только от расстояния до границы среды. Тогда поглощательная способность среды будет зависеть лишь от частоты фотона ν и от угла падения arc cos ζ. Обозначая поглощательную способность через $a(\nu, \zeta)$ мы можем написать

$$a(\nu, \zeta) = 1 - A(\nu, \zeta), \tag{4}$$

где $A(\nu, \zeta)$ — отражательная способность среды, т. е. ее альбедо.

Если альбедо среды известно, то формулы (1) и (4) позволяют найти интенсивность излучения, выходящего из среды при равномерном распределении источников. Эта интенсивность для фотонов частоты ν, выходящих из среды под углом arc cos ζ к нормали, будет равна

$$I(\nu, \zeta) = B_{*}[1 - A(\nu, \zeta)]. \tag{5}$$

Для среды, в которой $\lambda = \text{const}$, формулу (5) можно переписать в виде

$$I(\nu, \zeta) = B_0 \frac{1 - A(\nu, \zeta)}{1 - \lambda}. \tag{6}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи формул (5) и (6).

1) Предположим сначала, что в среде происходит изотропное рассеяние света без изменения частоты при постоянном λ. Тогда, как показал В. А. Амбарцумян [3], альбедо полубесконечной среды определяется формулой

$$A(\zeta) = 1 - \varphi(\zeta)\sqrt{1 - \lambda}, \tag{7}$$

где $\varphi(\zeta)$ — функция Амбарцумяна. Подстановка (7) в (6) приводит к следующему выражению для интенсивности излучения, выходящего из полубесконечной среды при равномерном распределении источников:

$$I(\zeta) = B_0 \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{1 - \lambda}}. \tag{8}$$

Формула (8) была также получена В. А. Амбарцумяном в другой работе [4]. Для этого он использовал метод сложения слоев и ранее найденное им выражение для коэффициента отражения полубесконечной среды. Отметим, что в работе Фелтена и Риса [5] была указана возможность перехода от (7) к (8) при допущении справедливости закона Кирхгофа в данном случае.

2) Пусть в полубесконечной среде происходит изотропное рассеяние света в спектральной линии с полным перераспределением по частоте и истинное поглощение в непрерывном спектре. Тогда величина g пропорциональна коэффициенту рассеяния σ_ν, а коэффициент истинного поглощения $\varkappa$ может считаться не зависящим от частоты в пределах спектральной линии. В частности, подобной средой является звездная атмосфера. Проблема многократного рассеяния света в звездной атмосфере с указанными оптическими свойствами была рассмотрена в работе автора [6] (см. также [7]).

Пользуясь найденным в [6] выражением для коэффициента отражения атмосферы, получаем следующую формулу для ее альбедо:

$$A(\nu, \zeta) = \frac{\mu_\nu}{1+\mu_\nu}\frac{\varphi(x)}{2}\int_0^1 \varphi(x')[K(x') + K_1(x')]\,\frac{x dx'}{x+x'}, \tag{9}$$

где $\mu_\nu = \sigma_\nu/\varkappa$, $x = \zeta/(1+\mu_\nu)$, функция $\varphi(x)$ определяется уравнением

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{2}\varphi(x)\int_0^1 \frac{\varphi(x')}{x+x'}\,K(x')\,dx', \tag{10}$$

а функции $K(x)$ и $K_1(x)$ формулами, приведенными в [6].

Подставляя (9) в (5), мы можем определить интенсивность излучения, выходящего из атмосферы с равномерным распределением источников (т. е. когда $\varepsilon_0 = \varkappa B_*$ и $B_* = \text{const}$). Делая эту подстановку и применяя (10), находим

$$I(\nu, \xi) = \frac{B_*}{1+\mu_\nu} + \frac{\mu_\nu}{1+\mu_\nu}B_*\varphi(x)\left[\sqrt{1-\int_0^1 K(x)\,d(x)} - \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(x')K_1(x')\,\frac{x' dx'}{x+x'}\right]. \tag{11}$$

Величина $I(\nu, \zeta)/B_*$ определяет профиль линии поглощения в спектре звезды на угловом расстоянии $\arccos\zeta$ от центра диска. Формула (11) была получена раньше [6] другим способом.

Отметим, что недавно Линский [8], пользуясь вероятностным методом (см. [7]), показал справедливость соотношения (5) для случая изотропного рассеяния света в спектральной линии с полным перераспределением по частоте (но без учета поглощения в непрерывном спектре) в полубесконечной атмосфере.

3) В статье И. Н. Минина [9] рассмотрена проблема переноса монохроматического излучения в полубесконечной среде при анизотропном рассеянии. Применяя вероятностный метод, он определил величины $I(\zeta)$ и $A(\zeta)$ и нашел, что они связаны между собой соотношением (6).

Плоский слой. Будем считать, что оптические свойства плоского слоя, как и рассмотренной выше полубесконечной среды, зависят только от расстояния до одной из границ. Обозначим через $a(\nu, \zeta)$ поглощательную способность слоя для фотонов частоты ν, падающих на данную границу под углом $\arccos\zeta$ к нормали (вообще говоря, при падении фотонов на другую границу поглощательная способность будет иной). Очевидно, что величину $a(\nu, \zeta)$ можно представить в виде

$$a(\nu, \zeta) = 1 - A(\nu, \zeta) - T(\nu, \zeta), \tag{12}$$

где $A(\nu, \zeta)$ — доля фотонов, отраженных слоем (т. е. его альбедо), и $T(\nu, \zeta)$ — доля фотонов, пропущенных слоем (как непосредственно, так и после рассеяний).

Пусть $I(\nu, \zeta)$ — интенсивность излучения частоты ν, выходящего из плоского слоя через ту же границу под углом $\arccos\zeta$ к нормали при равномерном распределении источников. Применяя формулы (1) и (12), получаем

$$I(\nu, \zeta) = B_* [1 - A(\nu, \zeta) - T(\nu, \zeta)]. \tag{13}$$

Если $\lambda = \text{const}$, то вместо (13) имеем

$$I(\nu, \zeta) = B_0 \frac{1 - A(\nu, \zeta) - T(\nu, \zeta)}{1 - \lambda}. \tag{14}$$

Формулы (13) и (14) дают возможность определить величину $I(\nu, \zeta)$, если известны величины $A(\nu, \zeta)$ и $T(\nu, \zeta)$. Приведем примеры таких определений при $\lambda = \text{const}$.

1) Допустим, что в плоском слое происходит изотропное рассеяние монохроматического излучения. Обозначим через τ_0 оптическую толщину этого слоя. Проблема диффузного отражения и пропускания света плоским слоем была рассмотрена в работе В. А. Амбарцумяна [10]. Пользуясь его результатами, находим

$$A(\zeta, \tau_0) = 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{2}\alpha_0\right)\varphi(\zeta, \tau_0) - \frac{\lambda}{2}\beta_0\psi(\zeta, \tau_0), \tag{15}$$

$$T(\zeta, \tau_0) = \frac{\lambda}{2}\beta_0\varphi(\zeta, \tau_0) + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\alpha_0\right)\psi(\zeta, \tau_0), \tag{16}$$

где $\varphi(\zeta, \tau_0)$ и $\psi(\zeta, \tau_0)$ — функции Амбарцумяна и α_0 и β_0 — нулевые моменты этих функций, т. е. величины, определенные равенствами

$$\alpha_k = \int_0^1 \varphi(\zeta, \tau_0)\zeta^k d\zeta, \qquad \beta_k = \int_0^1 \psi(\zeta, \tau_0)\zeta^k d\zeta \tag{17}$$

при $k = 0$.

Подставляя (15) и (16) в (14) и используя соотношение

$$\left(1 - \frac{\lambda}{2}\alpha_0 - \frac{\lambda}{2}\beta_0\right)\left(1 - \frac{\lambda}{2}\alpha_0 + \frac{\lambda}{2}\beta_0\right) = 1 - \lambda, \tag{18}$$

получаем искомую формулу для интенсивности излучения, выходящего из плоского слоя при равномерном распределении источников:

$$I(\zeta, \tau_0) = B_0 \frac{\varphi(\zeta, \tau_0) - \psi(\zeta, \tau_0)}{1 - \frac{\lambda}{2}\alpha_0 + \frac{\lambda}{2}\beta_0}. \tag{19}$$

Эта формула была найдена раньше другим способом (см. [7]).

2) Пусть в плоском слое происходит изотропное рассеяние излучения в спектральной линии с полным перераспределением по частоте. В работе В. В. Иванова [11] были введены функции $X(z, \tau_0)$ и $Y(z, \tau_0)$, через которые выражаются интенсивности излучения, выходящего из слоя при различных источниках энергии. (Здесь $z = \zeta/\alpha(x)$, а $\alpha(x)$ — отношение коэффициента поглощения в безразмерной частоте x к коэффициенту поглощения в центре линии). В частности, в работе [11] найдена формула для интенсивности излучения, выходящего из слоя при равномерном распределении источников. Пользуясь соотношением (14), можно получить эту формулу с помощью коэффициентов диффузного отражения и пропускания рассматриваемого слоя.

3) В работе И. Н. Минина [12] изучался перенос монохроматического излучения в плоском слое при анизотропном рассеянии. В частности, он определил величины $A(\zeta)$, $T(\zeta)$ и $I(\zeta)$ и отметил существование зависимости (14) между ними.

Мы видим, что многие задачи, для решения которых требовались специальные исследования, весьма просто решаются с помощью соотношения (1).

Однородный шар. Рассмотрим теперь пример применения формулы (3) (а не соотношения (1), как делалось выше).

Пусть в однородном шаре радиуса r_0 и оптического радиуса $\tau_0 = \alpha r_0$ происходит изотропное рассеяние монохроматического излучения с вероятностью выживания фотона λ. При исследовании многократного рассеяния света в шаре особый интерес представляют две задачи, различающиеся расположением источников энергии: 1) источники распределены в шаре равномерно, 2) шар освещен параллельными лучами. Если нас интересует лишь полное излучение, выходящее из шара, то решение одной из этих задач легко выражается через решение другой задачи с помощью формулы (3).

Поскольку первая задача является более простой и решение ее известно [13, 14], то мы воспользуемся им для определения светимости шара, освещенного параллельными лучами.

Допустим, что параллельные лучи создают освещенность H перпендикулярной к ним площадки. Тогда на шар падает энергия $E_0 = \pi r_0^2 H$. Легко видеть, что энергия, поглощаемая шаром, будет равна

$$E_1 = \frac{E_0}{\tau_0^2}\left[\tau_0^2 - \frac{1}{2} + \left(\tau_0 + \frac{1}{2}\right) e^{-2\tau_0}\right]. \tag{20}$$

Из энергии E_1 некоторая часть испытывает в шаре истинное поглощение, а другая часть рассеивается шаром. Обозначая эти энергии соответственно через E_a и E_s, имеем

$$E_1 = E_a + E_s. \tag{21}$$

Как видно из (21), для определения светимости шара E_s достаточно найти величину E_a. С этой целью применим формулу (3), переписав ее в виде

$$E_a = \frac{H}{B_0}(1-\lambda) E_e, \tag{22}$$

где E_e — энергия, излучаемая шаром в единице телесного угла при равномерном распределении источников (т. е. когда $\varepsilon_0 = \alpha B_0$). Подставляя (22) в (21), получаем

$$E_s = E_1 - \frac{H}{B_0}(1-\lambda) E_e. \tag{23}$$

Входящая в (23) величина E_e выражается через моменты функций Амбарцумяна, т. е. через величины α_k и β_k, определенные равенствами (17) для плоского слоя оптической толщины $2\tau_0$. Пользуясь формулой (23) и упомянутым выражением, находим

$$E_s = E_1 - \frac{E_0}{\tau_0^2}\Big\{2\left[\tau_0^2(\alpha_1+\beta_1)+2\tau_0\beta_2-(\alpha_3-\beta_3)\right]\times$$
$$\times\left(1-\frac{\lambda}{2}\alpha_0-\frac{\lambda}{2}\beta_0\right)-\lambda(\alpha_1-\beta_1-2\tau_0\beta_0)\left[\tau_0(\alpha_1+\beta_1)+\alpha_2+\beta_2\right]\Big\}. \tag{24}$$

Величину E_s можно также выразить через моменты резольвентной функции $\Phi(\tau, 2\tau_0)$ для плоского слоя оптической толщины $2\tau_0$. Эта функция определяется интегральным уравнением

$$\Phi(\tau, 2\tau_0) = \frac{\lambda}{2}\int_0^{2\tau_0} E_1(|\tau - t|)\,\Phi(t, 2\tau_0)\,dt + \frac{\lambda}{2}E_2(\tau). \tag{25}$$

Подстановка указанного выражения в (23) дает

$$E_s = E_1 - \frac{4(1-\lambda)E_0}{\lambda\tau_0^2}\Big\{\frac{\tau_0^3}{3}-(1-\lambda)\Big[\frac{\tau_0^3}{3}(1+\Phi_0)^2 -$$
$$-\tau_0^2(1+\Phi_0)\Phi_1+\tau_0\Phi_1^2+\frac{1}{6}(1+\Phi_0)\Phi_3-\frac{1}{2}\Phi_1\Phi_2\Big]\Big\}, \tag{26}$$

где

$$\Phi_k = \int_0^{2\tau_0}\Phi(\tau, 2\tau_0)\,\tau^k d\tau. \tag{27}$$

Формулы (23), (24) и (26) уже были получены раньше в работе автора [14]. Теперь мы можем дать численные значения величины E_s, так как недавно Д. И. Нагирнер [15] и В. М. Лоскутов [16] опубликовали подробные таблицы величин Φ_k, α_k и β_k в зависимости от λ и τ.

В табл. 1 приведены значения так называемого „сферического альбедо", определенного формулой

$$A_s = \frac{E_s}{E_0}, \tag{28}$$

т. е. представляющего собой отношение энергии, рассеянной шаром при освещении его параллельными лучами, к энергии, падающей на шар. В таком смысле в астрономии употребляется термин „сферическое альбедо планеты".

Табл. 1 содержит результаты вычислений, выполненных В. М. Лоскутовым по приведенным выше формулам с помощью как упомянутых таблиц величин α_k и β_k, так и асимптотических выражений для этих величин при $\tau_0 \gg 1$. В последней строке таблицы даны значения A_s, найденные по формуле

$$A_s = 1 - 2\alpha_1\sqrt{1-\lambda}, \qquad (29)$$

вытекающей из (24) при $\tau_0 = \infty$.

Таблица 1

СФЕРИЧЕСКОЕ АЛЬБЕДО A_s

τ_0 \ λ	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99	1
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.107	0.130	0.154	0.179	0.204	0.217	0.228	0.231
0.4	0.178	0.214	0.257	0.302	0.351	0.376	0.397	0.402
0.6	0.213	0.266	0.323	0.386	0.455	0.492	0.523	0.531
0.8	0.235	0.296	0.365	0.442	0.529	0.577	0.618	0.629
1.0	0.245	0.313	3.390	0.478	0.581	0.639	0.690	0.703
1.5	0.247	0.321	0.408	0.515	0.648	0.729	0.802	0.822
2.0	0.235	0.309	0.400	0.515	0.668	0.766	0.860	0.886
3.0	0.212	0.280	0.368	0.485	0.656	0.778	0.907	0.945
5.0	0.185	0.246	0.325	0.433	0.603	0.743	0.919	0.980
10.0	0.165	0.220	0.290	0.387	0.541	0.676	0.889	0.995
20.0	0.156	0.207	0.273	0.364	0.509	0.636	0.847	0.999
∞	0.147	0.195	0.257	0.342	0.478	0.597	0.795	1.000

Из таблицы, в частности, видно, что альбедо шара с ростом его оптического радиуса τ_0 сначала возрастает, а затем убывает (кроме случая $\lambda = 1$), медленно приближаясь к своему предельному значению, даваемому формулой (29).

Следует отметить, что в работе В. В. Иванова [17] рассмотрена задача о многократном рассеянии излучения в спектральной линии с полным перераспределением по частоте при равномерном распределении источников в шаре. Пользуясь полученным им выражением для величины $E_s(\nu)$ и соотношением (3), можно найти энергию, испытавшую в шаре истинное поглощение, и сферическое альбедо при освещении шара параллельными лучами.

Ленинградский государственный университет

SOME APPLICATIONS OF THE RELATIONSHIP BETWEEN EMISSIVITY AND ABSORPTIVITY OF A MEDIUM

V. V. SOBOLEV

The relationship between emissivity and absorptivity of a medium which has been found earlier [1, 2] is applied to three particular cases: 1) semi-infinite medium, 2) plane layer, 3) gomogeneous sphere. In each case the emissivity is given in terms of absorptivity, and vice versa.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 209, 1071, 1973.
2. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 212, 1096, 1973.
3. *В. А. Амбарцумян*, Астрон. ж., 19, 30, 1942.
4. *В. А. Амбарцумян*, ДАН Арм.ССР, 8, 149, 1948.
5. *J. E. Felten, M. J. Rees*, Astron. Astrophys., 17, 226, 1972.
6. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 26, 129, 1949.
7. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
8. *J. L. Linsky*, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 12, 777, 1972.
9. *И. Н. Минин*, Вестник Ленингр. ун-та, № 1, 1961.
10. *В. А. Амбарцумян*, ДАН СССР, 38, 257, 1943.
11. *В. В. Иванов*, Астрон. ж., 40, 257, 1963.
12. *И. Н. Минин*, Астрон. ж., 43, 1244, 1966.
13. *M. A. Heaslet, R. F. Warming*, J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer, 5, 669 1965.
14. *В. В. Соболев*, Астрофизика, 8, 197, 1972.
15. *Д. И. Нагирнер*, Астрофизика, 9, 3, 1973.
16. *В. М. Лоскутов*, Астрофизика, 9, 3, 1973.
17. *В. В. Иванов*, в сб. „Звезды, туманности, галактики", Ереван, 1969.