

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 9

АВГУСТ, 1973

ВЫПУСК 3

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕНЗОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВИРИАЛА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЗМОЖНЫХ ФИГУР САМОГРАВИТИРУЮЩЕЙ МАТЕРИИ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Р. С. ОГАНЕСЯН, М. Г. АБРАМЯН

Поступила 4 мая 1973

Пересмотрена 27 июня 1973

Рассмотрен вопрос определения возможных форм эллипсоидальных фигур равновесия самогравитирующей вращающейся замагниченной несжимаемой массы, с использованием тензорного уравнения вириала. Получен ряд новых серий сфероидальных и эллипсоидальных фигур равновесия в зависимости от структур магнитных полей.

Существование магнитных полей в космическом пространстве вообще и у отдельных космических объектов в частности заставляет учесть влияние магнитных сил на динамику космической плазмы, на равновесие и устойчивость самогравитирующих и вращающихся фигур. Действительно, существование космических образований в виде вытянутых туманностей, волокон, рукавов и т. д. наводит на мысль, что для объяснения их равновесных форм необходимо учесть также магнитные силы. В связи с этим часто рассматриваются силовые магнитные поля той или иной геометрии, могущей играть существенную роль при формировании разных конфигураций самогравитирующей плазмы.

Пусть имеем самогравитирующую, однородно вращающуюся несжимаемую массу бесконечной электропроводности, внутри которой существует магнитное поле $\vec{B}(x)$. Вопросы равновесия и устойчивости рассматриваемой системы в рамках физики сплошных сред определяются следующей системой уравнений:

$$\rho \frac{du_j}{dt} + 2\rho \varepsilon_{jkl} \omega_k u_l = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(p + \frac{|\vec{B}|^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} B_j B_k + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left(V + \frac{1}{2} [\vec{\omega x}]^2 \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_j^2} = -4\pi G\rho, \quad (2)$$

$$p = p(\rho). \quad (3)$$

Умножая уравнение (1) на x_j и интегрируя по объему системы, после некоторых преобразований получим тензорное уравнение вириала в виде [1]

$$\frac{dN_{ij}}{dt} + 2\varepsilon_{jkl} \omega_k N_{il} = 2T_{ij} - 2M_{ij} + W_{ij} + \delta_{ij} \{ (\gamma - 1) U + M \} + \omega^2 I_{ij} - \omega_j \omega_k I_{ik} + \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} [x_i (2B_j B_k d\Sigma_k - |\vec{B}|^2 d\Sigma_j)] - \int_{\Sigma} p x_i d\Sigma_j, \quad (4)$$

где введены следующие тензорные обозначения:

$$N_{ij} = \int_V \rho x_i u_j d\vec{x} \text{—тензор вириала,}$$

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \int_V \rho u_i u_j d\vec{x} \text{—тензор кинетической энергии,}$$

$$W_{ij} = \int_V [\rho x_i \frac{\partial V}{\partial x_j}] d\vec{x} \text{—тензор гравитационной энергии,} \quad (5)$$

$$M_{ij} = \int_V \frac{B_i B_j}{8\pi} d\vec{x} \text{—тензор магнитной энергии,}$$

$$I_{ij} = \int_V \rho x_i x_j d\vec{x} \text{—тензор момента инерции,} \quad (6)$$

$$U = \int_V \frac{p}{\gamma - 1} d\vec{x} \text{—внутренняя тепловая энергия.}$$

В уравнении (4) через Σ обозначена поверхность системы. Поскольку на поверхности гидростатическое давление обращается в нуль, то имеем:

$$\int_{\Sigma} p x_i d\Sigma_j = 0. \quad (7)$$

В этой работе рассматривается случай, когда магнитное поле не обращается в нуль на поверхности конфигурации, так что магнитные члены в уравнении (4) можно представить в виде

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \delta_{ij} M - 2M_{ij} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} x_i \left(B_j B_k d\Sigma_k - \frac{1}{2} |\vec{B}|^2 d\Sigma_j \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} x_i B_k \left(\frac{\partial B_j}{\partial x_k} - \frac{\partial B_k}{\partial x_j} \right) d\vec{x}. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда с учетом (7) и (8) уравнение (4) примет вид

$$\frac{dN_{ij}}{dt} + 2\varepsilon_{jkl}\omega_k N_{il} = 2T_{ij} + M_{ij} + W_{ij} + \delta_{ij}(\gamma - 1)U + \omega^2 I_{ij} - \omega_j \omega_k I_{ik}. \quad (9)$$

Уравнение (9) представляет тензорное уравнение вириала второго порядка для вращающихся самогравитирующих несжимаемых масс при наличии магнитных полей, не обращающихся в нуль на поверхности системы.

Для конфигураций, находящихся в магнитоэстатическом равновесии, $u_i = 0$, уравнения (1) и (9) примут вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(V + \frac{1}{2} [\vec{\omega} \mathbf{x}]^2 \right) + \frac{1}{4\pi\rho} B_k \left(\frac{\partial B_j}{\partial x_k} - \frac{\partial B_k}{\partial x_j} \right), \quad (10)$$

$$\delta_{ij}(\gamma - 1)U + W_{ij} + M_{ij} + \omega^2 I_{ij} - \omega_j \omega_k I_{ik} = 0. \quad (11)$$

Действуя оператором $\varepsilon_{ijn} (\partial/\partial x_n)$ на обе стороны уравнения (10), с учетом уравнения состояния (3), получим

$$\varepsilon_{ijn} \frac{\partial}{\partial x_n} \left\{ \frac{B_k}{\rho} \left(\frac{\partial B_j}{\partial x_k} - \frac{\partial B_k}{\partial x_j} \right) \right\} = 0. \quad (12)$$

Решения этого уравнения образуют класс силовых магнитных полей, могущих повлиять на равновесное состояние рассматриваемой системы (в дальнейшем имеются в виду именно такие поля). Их присутствие особенно ярко сказывается при рассмотрении вопросов фигур равновесия несжимаемых конфигураций. В частности, легко убедиться, что тороидальные магнитные поля типа

$$B_i = x_j P_{ij}(\vec{x}), \quad (13)$$

$$P_{ij}(\vec{x}) = \rho F(z) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(где $z \equiv \rho(x_1^2 + x_2^2)$, а $F(z)$ — произвольная функция своего аргумента) удовлетворяют уравнению (12). В сферической системе координат решение (13) имеет следующий вид [2]:

$$\vec{B} = e_\varphi \frac{F(\rho r^2 \sin^2 \vartheta)}{r \sin \vartheta}.$$

Отметим, что решение (13) справедливо как для однородного, так и для неоднородного распределения массы.

Теперь рассмотрим влияние этих полей на форму эллипсоидальных фигур равновесия жидких несжимаемых масс.

Представим поверхность однородно вращающейся массы в виде трехосного эллипсоида:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1. \quad (14)$$

Внутри такой фигуры гравитационный потенциал имеет вид [3]

$$V(\vec{x}) = -c_j x_j^2, \quad (15)$$

где коэффициенты c_j выражаются через

$$c_j = \frac{3}{4} Gm \int_0^\infty \frac{1}{a_j^2 + s} \frac{ds}{\Delta(s)}, \quad (16)$$

$$\Delta(s) \equiv [(a_1^2 + s)(a_2^2 + s)(a_3^2 + s)]^{1/2}.$$

Здесь m есть масса однородного эллипсоида;

$$m = \frac{4}{3} \pi \rho a_1 a_2 a_3. \quad (17)$$

При этом тензор гравитационной энергии (5) с учетом (15) примет вид

$$\mathcal{W}_{ij} = -2c_j I_{ij}, \quad (18)$$

где тензор момента инерции трехосного эллипсоида I_{ij} имеет вид

$$I_{ij} = \frac{m}{5} a_i^2 \delta_{ij}. \quad (19)$$

Так как тензор гравитационной энергии и тензор момента инерции диагональны, то из тензорного уравнения вириала (11) заключаем, что фигура может иметь вид эллипсоида, если тензор магнитного поля (8) имеет диагональную форму:

$$M_{ij} = 0, \text{ если } i \neq j. \quad (20)$$

Очевидно, что тороидальные магнитные поля (13) удовлетворяют этому требованию.

Теперь, свертывая уравнение (11), получим

$$W + M + 3(\gamma - 1)U + \omega^2 I = 0. \quad (21)$$

Здесь мы предполагаем, что вращение происходит вокруг оси x_3 : $\omega_j = \omega \delta_{3j}$, а

$$I = I_{11} + I_{22} = \int \rho (x_1^2 + x_2^2) dx, \\ M = M_{ii}, \quad W = W_{ii}. \quad (22)$$

(21) дает соотношение между различными энергиями конфигурации, находящейся в магнитостатическом равновесии. Так как $(\gamma - 1)U$ есть величина всегда положительная, то отсюда получается важный результат — в магнитостатическом равновесии должно удовлетворяться следующее неравенство:

$$M + \omega^2 I < |W|. \quad (23)$$

Это условие ограничивает величину магнитного поля (для данной угловой скорости) сверху.

Запишем теперь уравнение (11) для диагональных элементов

$$\begin{aligned} (\gamma - 1)U &= (2c_1 - \omega^2)I_{11} - M_{11}, \\ (\gamma - 1)U &= (2c_2 - \omega^2)I_{22} - M_{22}, \\ (\gamma - 1)U &= 2c_3 I_{33} - M_{33}. \end{aligned} \quad (24)$$

Приравняв правые части (24), с учетом (19) получим

$$(2c_1 - \omega^2)a_1^2 - \frac{5}{m}M_{11} = (2c_2 - \omega^2)a_2^2 - \frac{5}{m}M_{22} = 2c_3 a_3^2 - \frac{5}{m}M_{33}. \quad (25)$$

Исключая из (24) угловую скорость ω , с учетом (16) получим:

$$(a_2^2 - a_1^2) \left\{ \int_0^1 \left[\frac{a_1^2 a_2^2}{(a_1^2 + s)(a_2^2 + s)} - \frac{a_2^2}{a_3^2 + s} \right] \frac{ds}{\Delta(s)} + \frac{M_{33}}{10 Gm^3} \right\} - \frac{a_2^2 M_{11} - a_1^2 M_{11}}{\frac{3}{10} Gm^3} = 0. \quad (26)$$

Уравнение (26) есть необходимое условие, при котором эллипсоиды (14) являются фигурой равновесия рассматриваемой системы. При этом связь между физическими параметрами конфигурации (магнитное поле, угловая скорость) и формой эллипсоида выражается следующими соотношениями:

$$\Omega_1 \equiv \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} - \frac{a_1^2}{a_1^2} (\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_3) = \frac{1}{\pi G\rho} \left[c_1 - \frac{a_3^2}{a_1^2} c_3 \right], \quad (27)$$

$$\Omega_2 \equiv \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} - \frac{a_2^2}{a_2^2} (\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_3) = \frac{1}{\pi G\rho} \left[c_2 - \frac{a_3^2}{a_2^2} c_3 \right], \quad (28)$$

которые легко получаются из уравнений (25) с учетом безразмерного обозначения:

$$\mathfrak{M}_i = - \frac{M_{ii}}{\frac{2}{5} \pi G \rho a_3^2}. \quad (29)$$

Теперь рассмотрим возможные фигуры равновесия замагниченной самогравитирующей жидкой массы, равномерно вращающейся вокруг оси x_3 .

1. *Сфероиды*: $a_1 = a_2 \equiv a \neq a_3$. При этом, как видно из (16), $c_1 = c_2 \equiv c \neq c_3$, а из условия (26) следует, что сфероиды станут фигурами равновесия, если только имеет место соотношение

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 \equiv \mathfrak{M}. \quad (30)$$

Тогда с учетом вышеуказанного, из (27) и (28) получим, что для сфероидальных фигур

$$\Omega \equiv \Omega_1 = \Omega_2 = \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} - \frac{a_3^2}{a^2} (\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_3) = \frac{1}{\pi G\rho} \left[c - \frac{a_3^2}{a^2} c_3 \right]. \quad (31)$$

Полученное соотношение связывает физические параметры системы с формой сфероидальной фигуры. Отметим, что (31) при отсутствии магнитного поля дает соотношение для сфероидов Маклорена [3]. Так

что наличие магнитных полей может оказать существенное влияние на форму сфероидальных фигур равновесия. Рассмотрим подробнее этот вопрос при наличии тороидальных магнитных полей типа (13). При этом условии (30) дает

$$\int (x_1^2 - x_2^2) \left[F_{(z)}^2 + z F(z) \frac{dF}{dz} \right] dx = 0. \quad (32)$$

Так как здесь интегрирование производится по объему сфероида, то из аксиальной симметрии конфигурации следует, что (32) удовлетворяется для всякой функции $F(z)$, конечной в центре сфероида. Для иллюстрации положим:

$$F_{(z)} = \lambda (x_1^2 + x_2^2)^n, \quad (\lambda = \text{const}). \quad (33)$$

Тогда с учетом (33), (13), (8) из (29) получим:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{5\rho(n+1)\lambda^2}{4\pi G m a_3^2} \int x_1^2 (x_1^2 + x_2^2)^{2n} dx, \quad (34)$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{5\rho(n+1)\lambda^2}{4\pi G m a_3^2} \int x_2^2 (x_1^2 + x_2^2)^{2n} dx, \quad (35)$$

$$\mathfrak{M}_3 = 0. \quad (36)$$

Комбинация (33) и (13) приводит к магнитному полю тороидального типа более общего характера, чем рассмотренное поле в работах [3, 5]. В частности, при $n = 0$, когда магнитное поле дается в виде

$$B_1 = -\lambda \rho x_2, \quad B_2 = \lambda \rho x_1, \quad B_3 = 0 \quad (37)$$

(в сферической системе координат — $\vec{B} = e_\varphi \lambda \rho r \sin \vartheta$), интегрирование в (34) и (35) по объему сфероида дает

$$\mathfrak{M} = \frac{\lambda^2}{8\pi^2 G} \frac{a^2}{a_3^2} = \frac{B_0^2}{8\pi^2 G \rho^2 a^2} \frac{a^2}{a_3^2}$$

Так что соотношение (31) для рассматриваемого поля дает

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi G \rho} - \frac{R_0^2}{8\pi^2 G \rho^2 a^2} = \frac{1}{\pi G \rho} \left[c - \frac{a_3^2}{a^2} c_3 \right], \quad (38)$$

где $B_0 = \lambda \rho a$ — есть индукция магнитного поля на экваторе сфероида. Здесь можно различить два случая:

а) *Сплюснутые сфероиды:* $a > a_3$. Для этих фигур последний член в (38) — величина положительная, откуда следует, что $\Omega > 0$, т. е.

$$\rho\omega^2 a > \frac{B_0^2}{2\pi\rho a}, \quad (39)$$

когда на экваторе фигуры центробежная сила больше магнитной силы, тогда фигура равновесия примет вид сплющенного сфероида [4]. При этом, обозначая $a_3^2 = a^2(1 - e^2)$ и производя интегрирование в (16), получим:

$$c = \pi G\rho \left[\frac{(1 - e^2)^{1/2}}{e^3} \arcsin e - \frac{1 - e^2}{e} \right], \quad (40)$$

$$c_3 = 2\pi G\rho \left[\frac{1}{e^3} - \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{e^3} \arcsin e \right].$$

Отметим, что при $e \rightarrow 0$, $c_j \rightarrow (2/3)\pi G\rho$. Теперь с учетом (40) соотношение (38) примет вид

$$\Omega \equiv \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} - \frac{B_0^2}{4\pi^2 G\rho^2 a^2} = \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{e^3} [(3 - 2e^2) \arcsin e - 3e(1 - e^2)^{1/2}]. \quad (41)$$

График функции $\Omega(e)$ приведен на рис. 1, откуда, в частности, видно, что она имеет максимум в точке $e_0 = 0.9299\dots$, равный

$$\Omega_0 \equiv \Omega(e_0) = 0.22467\dots$$

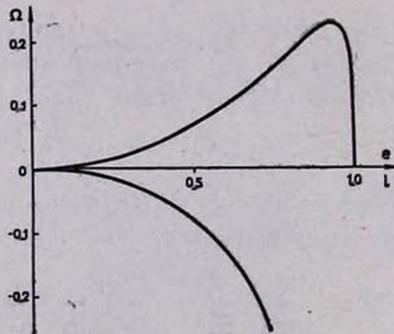


Рис. 1.

При отсутствии магнитного поля из (41) и (42) следует предельное значение угловой скорости для сфероидов Маклорена [5]:

$$\omega_{пр}^2 = 2\pi G\rho\Omega_0.$$

Так что магнитное поле увеличивает этот предел у сплюснутых сфероидов:

$$\omega_{\text{пр}}^2 = 2\pi G\rho \left\{ \Omega_0 + \frac{B_0^2}{4\pi^2 G\rho^2 a^2} \right\}.$$

Условие (23) для рассматриваемых эллипсоидов дает

$$\frac{\omega^2}{2\pi G\rho} - \frac{B_0^2}{4\pi^2 G\rho^2 a^2} < \frac{(1-e^2)^{1/2}}{e} \arcsin e, \quad (43)$$

что тоже указывает на ограниченность величин Ω у сплюснутых сфероидов. Неравенство нарушается только в окрестностях точки $e = 1$, вблизи которой эти фигуры неустойчивы [3].

В общем случае сплюснутые сфероиды являются возможными фигурами равновесия, если

$$\Omega_0 > \Omega \equiv \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} - (1-e^2)(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_s) > 0. \quad (44)$$

б) *Вытянутые сфероиды*: $a_3 > a$. Когда на экваторе сфероида магнитные силы превосходят центробежные, сфероидальные фигуры равновесия вытягиваются вдоль оси вращения [4].

Интегрируя (16) с учетом обозначения $a^2 = a_3^2(1-l^2)$ получим

$$c = \pi G\rho \frac{1-l^2}{2} \left[\frac{2l}{1-l^2} - \ln \frac{1+l}{1-l} \right],$$

$$c_3 = \pi G\rho (1-l^2) \left[\ln \frac{1+l}{1-l} - 2l \right].$$

Здесь тоже при $l \rightarrow 0$: $c_j \rightarrow (2/3)\pi G\rho$. По аналогии с (41) для этих фигур получаем

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} - \frac{B_0^2}{4\pi^2 G\rho^2 a^2} = \frac{3}{l^2} - \frac{3-l^2}{2l^3} \ln \frac{1+l}{1-l}. \quad (45)$$

При $l \rightarrow 0$, $\Omega \rightarrow 0$; а при $l \rightarrow 1$ функция $\Omega(l)$ стремится к минус бесконечности (см. на рис. 1), т. е. с ростом магнитных полей вытянутость фигуры вдоль оси вращения увеличивается. Очевидно, что при отсутствии вращения ($\omega = 0$) и при наличии тороидального магнитного поля типа (13) фигура равновесия также является вытянутым сфероидом.

Для вытянутых сфероидов гравитационная потенциальная энергия имеет вид

$$W = -\frac{3}{5} G \frac{m}{a_3} \frac{l}{2} \ln \frac{1+l}{1-l}.$$

Так что условие (23) дает тот же результат.

В общем случае, когда магнитные поля удовлетворяют условию

$$0 > \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} - \frac{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_3}{1 - l^2} > -\infty, \quad (46)$$

вытянутые вдоль оси вращения сфероиды являются возможными фигурами равновесия.

2. Если наряду с условием (30) удовлетворяется также условие

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} - \mathfrak{M} + \mathfrak{M}_3 = 0, \quad (47)$$

то, как следует из (38), (27) и (28), возможной фигурой равновесия является однородно-вращающаяся замагниченная сфера $a_1 = a_2 = a_3 = R$. В частности, при наличии тороидального магнитного поля (36) условие (47) дает [4]

$$B_0 = \omega R \sqrt{2\pi\rho}. \quad (48)$$

Итак, в зависимости от величины магнитного поля, удовлетворяющего условию (31), фигуры равновесия могут иметь вид либо сплюснутых и вытянутых сфероидов, либо сферы. При этом возможные значения параметра Ω заключены в интервале

$$\Omega_0 > \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} - \frac{a_3^2}{a^2} (\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_3) > -\infty. \quad (49)$$

Вне этого интервала существование сфероидальных фигур равновесия исключается.

3. *Трехосные эллипсоиды: $a_1 \neq a_2 \neq a_3$.*

С помощью обозначений

$$u = a_3^2/a_1^2, \quad v = a_3^2/a_2^2, \quad x = s/a_3^2, \\ D^2 = (1+x)(1+ux)(1+vx), \quad (50)$$

условие (26) и соотношения (27), (28) с учетом (16) запишутся в видах, удобных для исследований:

$$\mathfrak{M}_3 + \frac{v\mathfrak{M}_2 - u\mathfrak{M}_1}{u-v} = \int_0^\infty (1-u-v-uvx) \frac{x dx}{D^3}, \quad (51)$$

$$\Omega_1 = \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} - v(\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_3) = \int_0^\infty \frac{v(1-v)x dx}{(1+x)(1+vx)D}, \quad (52)$$

$$\Omega_2 = \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} - u(\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2) = \int_0^{\infty} \frac{u(1-u)x dx}{(1+x)(1+vx)D} \quad (53)$$

Пользуясь тем, что рассматриваемому случаю соответствует $u \neq v$, составим следующую комбинацию:

$$\Omega_3 = \frac{u\Omega_1 - v\Omega_2}{u - v}$$

С учетом (52) и (53) получаем

$$\Omega_3 = \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} - uv \frac{\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1}{u - v} = uv \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+ux)(1+vx)D} \quad (54)$$

Это дает соотношение между физическими параметрами системы с формой трехосного эллипсоида. Как видно, последний член в (54) [симметричен по отношению u и v , откуда следует, что той же симметрией обладает и магнитный член (в частности, это следует также из (32))

$$\frac{\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1}{u - v} = \frac{\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1}{v - u}$$

Теперь исследуем условие (51). Сначала отметим, что оно дает геометрию возможных трехосных эллипсоидальных фигур в зависимости от магнитного поля. В частности, когда магнитное поле отсутствует, оно дает геометрию эллипсоидов Якоби. При этом для каждого u из интервала $1 > u > 0$ существует определенное значение v из интервала $1 - u > v > 0$, для которых удовлетворяется (51). Оказывается, что для этих эллипсоидов [5]

$$0 < \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} \leq \Omega_{33} \equiv 0.1871\dots, \quad (55)$$

откуда следует, что существует предельная угловая скорость, выше которой эллипсоиды Якоби не смогут стать фигурами равновесия.

В общем случае, как видно из (51), магнитное поле изменяет геометрию эллипсоидов Якоби. Притом для этого необходимо, чтобы

$$\alpha \equiv \mathfrak{M}_3 + \frac{v\mathfrak{M}_2 - u\mathfrak{M}_1}{u - v} \neq 0.$$

При этом величина угловой скорости этих эллипсоидов определяется из (54).

Магнитное поля по своим действиям на форму фигуры равновесия трехосных эллипсоидов можно разделить на три класса.

а) *Магнитные поля, не влияющие на форму эллипсоидов Якоби.* Этот класс составляют магнитные поля, обращающие параметр α в нуль, тем самым сохраняя геометрию эллипсоидов Якоби. Но, как видно из (54), они могут изменять предельную скорость вращения фигуры:

$$\omega_{\text{пр}}^2 = 2\pi G\rho \left\{ \Omega_{30} + u_0 v_0 \frac{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2}{v_0 - u_0} \right\}, \quad (56)$$

где u_0 и v_0 — параметры предельной фигуры серии Якоби.

В частности, при наличии тороидальных магнитных полей типа (13), с учетом (33)—(36) (для трехосных эллипсоидов уже $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$) α примет вид

$$\alpha = \frac{v\mathfrak{M}_2 - u\mathfrak{M}_1}{u - v} = \frac{15}{32} \frac{\lambda^2(n+1)}{\pi G\rho a_1 a_2 a_3^3} \int \frac{vx_2^2 - ux_1^2}{u - v} (x_1^2 + x_2^2)^{2n} dx. \quad (57)$$

Отсюда видно, что тороидальное магнитное поле, соответствующее значению $n = 0$ (его вид дается через (37)), входит в рассматриваемый класс силовых магнитных полей, так как при этом

$$\alpha \sim \int (vx_2^2 - ux_1^2) dx \sim ua_1^2 - va_2^2 \equiv 0.$$

Далее, для магнитного члена, входящего в (54), получаем

$$u_0 v_0 \frac{v\mathfrak{M}_1 - u\mathfrak{M}_2}{v_0 - u_0} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 G} > 0.$$

Так что эти поля увеличивают предельную скорость вращения эллипсоидов Якоби [4]

$$\omega_{\text{пр}}^2 = 2\pi G\rho \left(\Omega_{30} + \frac{\lambda^2}{4\pi^2 G} \right). \quad (58)$$

б) *Сплюсывающие магнитные поля.* Этот класс образуется магнитными полями, придающими α значения больше нуля ($\alpha > 0$). При этом, условие (51) удовлетворяется уже при иных значениях u и v по отношению к параметрам серии эллипсоидов Якоби. Так что получаются новые серии трехосных эллипсоидальных фигур, в которых каждому значению параметра $1 > u > 0$ соответствует значение v_1 , из интервала $1 - u > v_1 > 0$, где v_1 уже меньше по величине, чем v_n у

соответствующего эллипсоида Якоби (т. е. $v_x > v_1$, для одного и того же значения u). При этом с увеличением величины α , значения u , соответствующие данному u , все больше уменьшаются. Так, например, если $x_2 > x_1 > 0$, то для данного значения u из интервала (0.1) имеем (см. рис. 2)

$$v_x > v_{x_1} > v_{x_2} \tag{59}$$

или

$$\begin{aligned} (a_1)_x &> (a_1)_{x_1} > (a_1)_{x_2}, \\ (a_2)_x &< (a_2)_{x_1} < (a_2)_{x_2}, \\ (a_3)_x &> (a_3)_{x_1} > (a_3)_{x_2}, \end{aligned} \tag{60}$$

где вторые индексы указывают на значения параметров эллипсоидов различных серий с $\alpha = 0; \alpha_1; \alpha_2$. При выводе этих соотношений мы пользовались постоянством объема фигуры: $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \text{constant}$. Из (60) видно, что с увеличением α ось, вокруг которой происходит вращение фигуры, все больше уменьшается. С этой точки зрения класс магнитных полей $\alpha > 0$ мы называем сплющивающим. Следует отметить также, что с увеличением α уменьшаются пределы изменения u и v , удовлетворяющие условию (51). Например, для $\alpha > 0.71\dots$ возможные значения u и v следующие: $u, v > 0.4$, а для $\alpha > 1.79\dots$ получим $u, v < 0.2$ и т. д. Все эти факты говорят, о том, что с увеличением α соответствующие серии трехосных эллипсоидов все больше сжимаются по оси вращения и вытягиваются вдоль одной из осей x_1 или x_2 .

Важно также отметить, что полученные серии трехосных эллипсоидов симметричны по отношению параметров u, v , то есть если в какой-то серии существует фигура с u_1, v_1 , то существует и фигура с $u = v_1, v = u_1$ (в той же серии).

Информацию о величине угловой скорости этих серий фигур дает нам соотношение (54), откуда, в частности, видно, что существует предельная скорость вращения для данной серии

$$\omega_{\text{пр}}^2 = 2\pi G\rho \left\{ uv \left[\frac{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2}{v - u} + \int_0^\infty \frac{x(1+x) dx}{D^3} \right] \right\}_{\text{max-для данной серии.}} \tag{61}$$

В частности, при наличии тороидальных магнитных полей типа (13) с учетом (33), когда параметр α дается через (57), получим, что тороидальные магнитные поля, соответствующие значениям $n > 0$, являются сплющивающими в вышеуказанном смысле слова. В частности, при $n = 1/2$ имеем

$$\alpha = \frac{3\lambda^2}{56\pi^2 G} \frac{a_1^2 a_2^2}{a_3^2} > 0, \quad (62)$$

$$uv \frac{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2}{v - u} = -\frac{9\lambda^2}{56\pi^2 G} (a_1^2 + a_2^2) = 3\alpha(u + v) > 0.$$

Из (62) следует, что $\alpha \sim a_3^{-4}$ (с учетом постоянства объема системы), так что этот результат согласуется с полученным, т. е. с увеличением α „сплюснутость“ трехосных эллипсоидальных фигур увеличивается.

в) *Вытягивающие магнитные поля*, при которых α обращается в отрицательное число. Очевидно, что при этом получившиеся новые серии трехосных эллипсоидов характеризуются тем свойством, что каждому значению параметра α из интервала $1 > u > 0$ соответствует значение v уже большее по величине, чем у соответствующих эллипсоидов серии Якоби (рис. 2): $v > v_*$. Тем более, в этих сериях существуют эллипсоиды с параметрами $u > 1$, $v > 1$, то есть вытянутые вдоль оси вращения трехосные эллипсоиды.

Приближенные расчеты показывают, что параметр α ограничен снизу:

$$|\alpha| \leq |\alpha_0| = 0.342... \quad (63)$$

Если магнитные поля таковы, что соответствующий им параметр $|\alpha|$ больше, чем $|\alpha_0|$, то фигуры равновесия в виде трехосных эллипсоидов невозможны.

На рис. 2 приведено несколько кривых, представляющих связь параметра α с формой эллипсоидальной фигуры, где в качестве параметра взята величина u . Точки пересечения этих кривых с осью абсцисс соответствуют эллипсоидам серии Якоби. Кривые, соответствующие значениям параметра $\alpha > 0$, образуют серии „сплюснутых“ трехосных эллипсоидов (по отношению к эллипсоидам Якоби). И, наконец, кривые, расположенные ниже оси абсцисс, представляют рассматриваемые серии вытянутых трехосных эллипсоидальных фигур.

Теперь о нескольких свойствах серий вытянутых эллипсоидальных фигур.

При $\alpha_0 < \alpha < 0$ каждому значению параметра u , взятому из интервала $0 \leq u \leq 1$, соответствуют два значения v : v_1, v_2 ($v_2 > v_1$). Отметим, что все кривые, расположенные ниже оси абсцисс, пересекаются ею при $v \gg 1$. Так что при этом имеем две серии вытянутых эллипсоидов, между полуосями которых существуют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (a_1)_x &< (a_1)_1 < (a_1)_2, \\ (a_2)_x &> (a_2)_1 > (a_2)_2, \\ (a_3)_x &< (a_3)_1 < (a_3)_2. \end{aligned}$$

При стремлении α к нулю одна из этих серий превращается в серию Якоби, а другая — приблизительно в серию дискообразных фигур с параметрами $1 > u > 0; v \gg 1$ ($a_1 > a_3 \gg 1, a_2 \ll 1$), вращающихся вокруг полуоси a_3 .

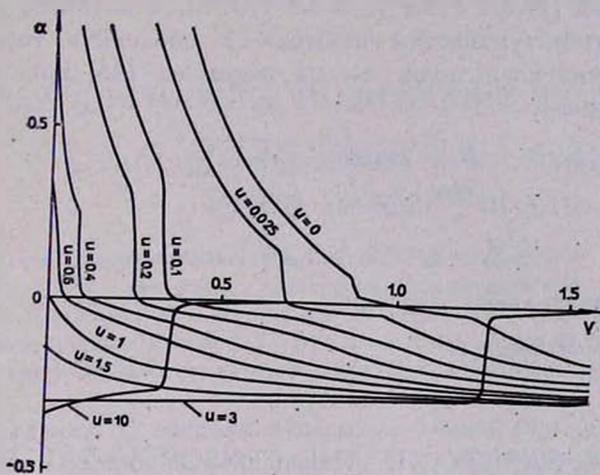


Рис. 2.

При $1 < u < 2,8...$ каждому значению u соответствует одно или два значения v (в зависимости от величины α). Эти серии эллипсоидов при $\alpha \rightarrow 0$ стремятся к бесконечным дискам с параметрами

$$a_3 > a_1 \gg 1, \quad a_2 \ll 1. \tag{64}$$

Так как все эти серии симметричны относительно u и v , то возможны и фигуры с параметрами

$$a_3 \leq a_2 \gg 1, \quad a_1 \ll 1. \tag{65}$$

Наконец, при $u > 2.8$ каждому значению u соответствует только одно значение v . Эти серии эллипсоидальных фигур при $\alpha \rightarrow 0$ стремятся к фигурам (64) или приблизительно к бесконечному эллиптическому цилиндру: $u, v \gg 1$ ($a_3 \gg 1, a_1 \cong a_2 \ll 1$).

Итак, трехосные эллипсоидальные фигуры получаются, когда

$$\infty > \alpha \geq a_0.$$

При стремлении α к нулю получаем фигуры трех измерений: эллипсоиды серии Якоби, дискообразные серии фигур и иглообразно вытянутые трехосные фигуры.

Значения угловых скоростей полученных серий даются соотношением (61).

Полученные результаты качественно не противоречат наблюдаемым вытянутым формам некоторых образований. Известно [6], что планетарные туманности долго сохраняют свои более или менее правильные формы. Пренебрегая лучистой энергией, качественно оценим величину магнитного поля на поверхности туманности A21. Установлено, что эта туманность имеет форму вытянутого сфероида с отношением полуосей [7] 0.4 ± 0.2 ($e = 0.8 \div 0.98$), у которого $a \approx 0.3$ пс. Если форму этой туманности попытаться объяснить тороидальным характером магнитного поля, то из формулы (45) при отсутствии вращения находим

$$B_0 = 2\pi\rho a \sqrt{-G\Omega(e)}.$$

Полагая, что $\rho = 1.6 \cdot 10^{-20}$ г/см³ [6], получим

$$B_0 = 4.4 \cdot 10^{-6} \div 10^{-5} \text{ гаусс},$$

т. е. удовлетворительные значения.

Ереванский государственный
университет

ON THE APPLICATION OF THE TENSOR VIRIAL EQUATION FOR THE DETERMINATION OF THE POSSIBLE FIGURES OF THE SELF-GRAVITATING MATTER IN THE PRESENCE OF A MAGNETIC FIELD

R. S. OGANESSIAN, M. G. ABRAHAMIAN

The question of the determination of the possible forms of the ellipsoidal figures of the equilibrium of the self-gravitating rotating magnetized incompressible mass are considered by means of the tensor virial equation. Som new series of spheroidal and ellipsoidal equilibrium figures are obtained, depending on the structure of the magnetic fields.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. S. P. S. Anand, R. S. Kushwaha, Ann. Astrophys., 25, 310, 1962.
2. I. W. Roxburgh, B. R. Durney, M. N., 135, 329, 1967.
3. N. R. Lebovitz, Ap. J., 134, 500, 1961.
4. Р. С. Оганесян, М. Г. Абрамян, Астрон. ж. (в печати).
5. М. Ф. Субботин, Курс небесной механики, т. 3, Гостехиздат, М., 1949.
6. Г. А. Гурзадян, Планетарные туманности, Физматгиз, М., 1962.
7. Т. А. Лозинская, Астрон. ж., 49, 1158, 1972.